# Fock加群の特異ベクトルについて

東北大学大学院理学研究科　中野　弘夢
Hiromu Nakano
Graduate School of Science and Faculty of Science,
Tohoku university

## 1　はじめに

以下では今回の講演で紹介できなかった Fock 加群の特異ベクトルに関する比例定数公式の別証明について紹介する．この公式の証明は [4] において Virasoro の特異ベクトルのアーベル化の公式を用いて与えられている．今回の研究では比例定数公式の共形場理論を用いた別の証明を得た．証明で重要になるのは [6] で導入されたローラン対称多項式の空間上の内積である. その論文ではヤング図形が互いに異なる Jack 多項式の直交性が証明なしに用いられているが今回の研究でその証明を得たので簡単に紹介する．この比例定数公式やその証明の道具は正の有理レベルにおける Fock 加群の構造や $sl_2$ 型の拡大 $W$ 代数の表現論 [6] を調べるのにきわめて重要になる.

## 2　自由場の理論

この章では Heisenberg 代数と呼ばれる無限次元 Lie 代数とそれから構成される共形場理論について [6] に従って簡単に説明する.

$\mathcal{K}=\mathbb{C}(t)$ を $t$ 変数有理関数体とし $\mathcal{O}$ を次で与えられる $\mathcal{K}$ の部分環とする.

$$\mathcal{O}=\left\{\ \frac{f}{g}\mid f,g\in\mathbb{C}[t],\ g(0)\neq 0\right\}$$

以下では $\mathcal{R}=\mathcal{K},\mathcal{O},$ または $\mathbb{C}$ とする.

**定義 2.1.**

*1.* ${}_{\mathcal{R}}U(\mathfrak{b}_\pm)$ と ${}_{\mathcal{R}}U(b_0)$ を $\mathcal{R}$ 上の $\mathbb{Z}$-graded な多項式環

$${}_{\mathcal{R}}U(\mathfrak{b}_\pm)=\mathcal{R}[b_{\pm1},b_{\pm2},\dots]\ ,\qquad {}_{\mathcal{R}}U(\mathfrak{b}_0)=\mathcal{R}[b_0]$$

とする. ただし $b_n$ の次数を $\deg b_n = -n$ とした.

2. $\mathcal{R}$ 上の $\mathbb{Z}$-graded 結合代数を

$$ {}_{\mathcal{R}}U(\overline{\mathfrak{b}}) = {}_{\mathcal{R}}U(\mathfrak{b}_-)\hat{\otimes}_{\mathcal{R}}{}_{\mathcal{R}}U(\mathfrak{b}_+) $$

とおく. ただし $\hat{\otimes}_{\mathcal{R}}$ は次数ごとに完備化されたテンソル積とする. ${}_{\mathcal{R}}U(\overline{\mathfrak{b}})$ 上に次で代数の構造を入れる:

$$ [b_m, b_n] = m\delta_{m,-n} \cdot \mathrm{id}\ ,\ m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\ . $$

3. Heisenberg 代数 ${}_{\mathcal{R}}U(\mathfrak{b})$ を交換関係

$$ [b_m, b_n] = m\delta_{m,-n} \cdot \mathrm{id}\ ,\ m, n \in \mathbb{Z} $$

を満たす $\mathbb{Z}$-graded 結合代数として次で定義する:

$$ {}_{\mathcal{R}}U(\mathfrak{b}) = {}_{\mathcal{R}}U(\overline{\mathfrak{b}}) \otimes_{\mathcal{R}} {}_{\mathcal{R}}U(\mathfrak{b}_0). $$

**定義 2.2.** $\beta \in \mathcal{R}$ とする.

1. $\mathcal{R}$ 上の左 Fock 加群 ${}_{\mathcal{R}}F_\beta$ を最高ウェィト $\beta$ を持つ左 ${}_{\mathcal{R}}U(\mathfrak{b})$ 加群として次で定義する:
関係式

$$ b_0 |\beta\rangle = \beta |\beta\rangle, \qquad b_n |\beta\rangle = 0,\ n \geq 1 $$

を満たす最高ウェイトベクトル $|\beta\rangle$ に対して $\mathcal{R}$ 上のベクトル空間の同型

$$ \begin{aligned} {}_{\mathcal{R}}U(\mathfrak{b}_-) &\to {}_{\mathcal{R}}F_\beta \\ P &\mapsto P|\beta\rangle \end{aligned} $$

が成り立つ.

2. $\mathcal{R}$ 上の右 Fock 加群 ${}_{\mathcal{R}}F_\beta^\vee$ を最高ウェイト $\beta$ を持つ右 ${}_{\mathcal{R}}U(\mathfrak{b})$ 加群として次で定義する:

$$ \langle\beta| b_0 = \beta \langle\beta|, \qquad \langle\beta| b_{-n} = 0,\ n \geq 1 $$

を満たす最高ウェイトベクトル $\langle\beta|$ に対して $\mathcal{R}$ 上のベクトル空間の同型

$$ \begin{aligned} {}_{\mathcal{R}}U(\mathfrak{b}_+) &\to {}_{\mathcal{R}}F_\beta^\vee \\ P &\mapsto \langle\beta| P \end{aligned} $$

が成り立つ.

*3.* ${}_{\mathcal{R}}F_\beta$ と ${}_{\mathcal{R}}F_\beta^\vee$ との間に次の自然なペアリング

$$\langle\ |\ \rangle\ : {}_{\mathcal{R}}F_\beta^\vee \times {}_{\mathcal{R}}F_\beta \to \mathcal{R}$$

が任意の $\phi \in {}_{\mathcal{R}}F_\beta^\vee$, $u \in {}_{\mathcal{R}}F_\beta$ と $P \in {}_{\mathcal{R}}U(\mathfrak{b})$ に対して

$$\langle\beta|\beta\rangle = 1 \quad , \quad \langle\phi P|u\rangle = \langle\phi|Pu\rangle$$

を満たすように唯一つ決まる.

*4.* ゼロモード $b_0$ の共役 $\hat{b}$ を交換関係

$$[b_n, \hat{b}] = \delta_{n,0}\mathrm{id}$$

を満たすものとして定める. この時 $\gamma \in \mathcal{R}$ に対して $e^{\gamma\hat{b}}$ は次の ${}_{\mathcal{R}}U(\mathfrak{b}_-)$ と ${}_{\mathcal{R}}U(\mathfrak{b}_+)$ と可換なシフト作用素を定める.

$$\begin{aligned} e^{\gamma\hat{b}}\ :\ {}_{\mathcal{R}}F_\beta &\to {}_{\mathcal{R}}F_{\beta+\gamma}\ , \\ |\beta\rangle &\mapsto |\beta+\gamma\rangle \end{aligned}$$

**定義 2.3.**

*1.* $b(z)$ を $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の母関数として

$$b(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^{-n-1}$$

とおく. $b(z)$ は 次の作用素積展開 (OPE) を持つ.

$$b(z)b(w) = \frac{1}{(z-w)^2} + \cdots .$$

2. $\alpha_0 \in \mathcal{R}$ に対してエネルギー運動量テンソルを

$$T(z) = \frac{1}{2}(: b(z)^2 : + \alpha_0\partial_z b(z)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$$

で定義する. この時モード $\{L_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は 中心荷電 $c_{\alpha_0} = 1-3\alpha_0^2$ の Virasoro 代数を生成する.

3. 中心荷電 $c_{\alpha_0}$ の $\mathcal{R}$ 上の Virasoro 代数の普遍包絡環を ${}_{\mathcal{R}}U(\mathcal{L})$ とおく. 左 Fock 加群 ${}_{\mathcal{R}}F_\beta$ は左 ${}_{\mathcal{R}}U(\mathcal{L})$ 加群となり最高ウェイトベクトル $|\beta\rangle$ は次の関係式を満たす.

$$L_0\,|\beta\rangle = h_\beta\,|\beta\rangle\,, \qquad L_n\,|\beta\rangle = 0, \quad n \geq 1,$$

ただし $h_\beta = \beta(\beta-\alpha_0)/2$ とする.

次に場 $\phi(z)$ を

$$\phi(z) = \hat{b} + b_0 \log z - \sum_{n\neq 0} \frac{b_n}{n} z^{-n}$$

で定義する. OPE は

$$\phi(z)\phi(w) = \log(z-w) + \cdots \ .$$

で与えられる.

**定義 2.4.** $\beta \in \mathcal{R}$ に対して　場 $V_\beta(z)$ を

$$\begin{aligned} V_\beta(z) &=: e^{\beta\phi(z)} := e^{\beta\hat{b}} z^{\beta b_0} \overline{V}_\beta(z) \ , \\ \overline{V}_\beta(z) &= e^{\beta \sum_{n\geq 1} \frac{b_{-n}}{n} z^n} e^{-\beta \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n} z^{-n}} \end{aligned}$$

で定義する. ただし $z^{\beta b_0} = e^{\beta b_0 \log z}$ とする.

**命題 2.5.** $\beta \in \mathcal{R}$ に対して場 $V_\beta(z)$ は以下の性質を満たす.

*1.* $\gamma \in \mathcal{R}$ に対して $V_\beta(z)$ は Fock 加群の間の写像

$$V_\beta(z) : {}_{\mathcal{R}}F_\gamma \to {}_{\mathcal{R}}F_{\beta+\gamma}[[z, z^{-1}]] z^{\beta\gamma}$$

を定義し, 任意の $|u\rangle \in {}_{\mathcal{R}}F_\gamma$, $\langle\phi| \in {}_{\mathcal{R}}F^\vee_{\beta+\gamma}$ に対して

$$\langle\phi| \, V_\beta(z) \, |u\rangle \in z^{\beta\gamma} \mathbb{C}[z, z^{-1}]$$

を定める.

*2.* $T(z)$ と $V_\beta(z)$ の OPE は次で与えられる :

$$T(z)V_\beta(w) = \frac{h_\beta}{(z-w)^2} V_\beta(w) + \frac{1}{z-w} \partial V_\beta(w) + \cdots \ .$$

*3.* $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathcal{R}$ に対して

$$\prod_{i=1}^k V_{\beta_i}(z_i) = e^{\sum_{i=1}^k \beta_i \hat{b}} \prod_{i=1}^k z_i^{\beta_i b_0} \prod_{1\leq i<j\leq k} (z_i - z_j)^{\beta_i\beta_j} : \prod_{i=1}^k \overline{V}_{\beta_i}(z_i) :$$

が成り立つ. ただし

$$: \prod_{i=1}^k \overline{V}_{\beta_i}(z_i) := \prod_{i=1}^k e^{\beta_i \sum_{n\geq 1} \frac{b_{-n}}{n} z_i^n} e^{-\beta_i \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n} z_i^{-n}} \ .$$

## 3　ツイスト de Rham 理論とセルバーグ積分

$\mathcal{R}$ を $\mathcal{K}$ または $\mathbb{C}$ とする. この章では [1],[5] に基づいてツイスト de Rham 理論とセルバーグ積分の関係について簡単に紹介する.

$m \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathbb{C}^m$ の中の超平面

$$D_Y = \bigcup_{i=1}^{m}(y_i = 0)\bigcup_{i=1}^{m}(y_i - 1 = 0)\bigcup_{1\le i<j\le m}(y_i - y_j = 0)$$

を考える.

$m \geq 1$ に対して複素多様体 $Y_m$ を

$$Y_m = \mathbb{C}^m \setminus D_Y = \{(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{C}^m | y_i \neq y_j, y_i \neq 0, 1\}$$

で定義する. $\rho, \sigma, \tau \in \mathcal{R}$ に対して $Y_m$ 上の多価正則関数

$$G_m(\rho, \sigma, \tau; y) = \prod_{i=1}^{m} y_i^{\rho}(1 - y_i)^{\sigma} \prod_{1\le i\neq j\le m}(y_i - y_j)^{\tau}$$

を定義する. この多価関数から定まる対数微分を

$$\omega_m(\rho, \sigma, \tau) = \mathrm{d}\ \log G_m = \sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\rho}{y_i} - \frac{\sigma}{1 - y_i}\Big)\mathrm{d}y_i + \sum_{1\le i<j\le m}\tau\frac{\mathrm{d}y_i - \mathrm{d}y_j}{y_i - y_j}$$

とおく. この一価な一形式はツイスト微分

$$\nabla_{\omega_m(\rho,\sigma,\tau)} = \mathrm{d} + \omega_m(\rho, \sigma, \tau)\wedge$$

を定める. $\Omega^{\bullet}(*D_Y)$ を $Y_m$ 上で正則な有理微分形式の全体とし $(\Omega^{\bullet}(*D_Y), \nabla_{\omega_m(\rho,\sigma,\tau)})$ をツイスト de Rham 複体とする.

$\mathcal{R}$ 上の局所系 ${}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_m(\rho, \sigma, \tau)$ を

$$\nabla_{\omega_m(\rho,\sigma,\tau)} f(y) = 0$$

の局所解全体とする. $\mathcal{R}$ 上の双対局所系 ${}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_m^{\vee}(\rho, \sigma, \tau)$ を

$$\nabla_{-\omega_m(\rho,\sigma,\tau)} f(y) = 0$$

の局所解全体とする. この時 ${}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_m^{\vee}(\rho, \sigma, \tau)$ 係数のツイストホモロジー群 $H_p(Y_m, {}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_m^{\vee}(\rho, \sigma, \tau))$ と ${}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_m(\rho, \sigma, \tau)$ 係数のツイストコホモロジー群

$$H^p(Y_m, {}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_m(\rho, \sigma, \tau)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(H_p(Y_m, {}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_m^{\vee}(\rho, \sigma, \tau)), \mathcal{R})$$

が定まる. ツイスト deRham 理論からコホモロジー群の間の同型

$$H^p(Y_m, {}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_m(\rho,\sigma,\tau)) \simeq H^p(\Omega^\bullet(*D_Y), \nabla_{\omega_m(\rho,\sigma,\tau)})$$

が従う.

対称群 $\mathfrak{S}_m$ がコホモロジー群 $H^p(\Omega^\bullet(*D_Y), \nabla_{\omega_m(\rho,\sigma,\tau)}) \simeq H^p(Y_m, {}_{\mathcal{K}}\mathcal{L}_m(\rho,\sigma,\tau))$ に作用している. この作用に関してコホモロジー群の反対称の部分空間を

$$H^p(Y_m, {}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_m(\rho,\sigma,\tau))^{\mathfrak{S}_m,-}$$

とおく.

パラメータ $\rho,\sigma,\tau$ が適当な条件を満たす時次の定理が従う.

**定理 3.1.** $\rho,\sigma,\tau \in \mathcal{R}$ が次の条件

$$d(d+1)\tau \notin \mathbb{Z},\ d(d-1)\tau + d\rho \notin \mathbb{Z},\ d(d-1) + d\sigma \notin \mathbb{Z},\ 1 \le d \le m$$

を満たすと仮定する. この時以下の性質が成り立つ :

*1.* ツイストコホモロジーの次元が以下のように定まる [1].

$$\begin{aligned}
&\dim_{\mathcal{R}} H^p(Y_m, {}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_m(\rho,\sigma,\tau)) = 0\ ,\ p \ne m\ ,\\
&\dim_{\mathcal{R}} H^m(Y_m, {}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_m(\rho,\sigma,\tau)) = m!\ ,\\
&\dim_{\mathcal{R}} H^m(Y_m, {}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_m(\rho,\sigma,\tau))^{\mathfrak{S}_m,-} = 1.
\end{aligned}$$

*2.* $\mathbb{R}^m$ の中の $m$ 次元単体

$$\Delta_m = \{1 > y_1 > y_2 > \cdots > y_m > 0\}$$

から構成される非自明なサイクル $[\Delta_m(\rho,\sigma,\tau)] \in H_m(Y_m, {}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_m^\vee(\rho,\sigma,\tau))$ が存在し多価関数 $G_m(\rho,\sigma,\tau;y)$ の $[\Delta_m(\rho,\sigma,\tau)]$ 上の積分が以下のセルバーグ積分で与えられる [5].

$$\begin{aligned}
S_m(\rho,\sigma,\tau) &= \int_{[\Delta_m(\rho,\sigma,\tau)]} G_m(\rho,\sigma,\tau;y)\frac{\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m}{y_1\cdots y_m}\\
&= \frac{1}{m!}\prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(1+i\tau)\Gamma(\rho+(i-1)\tau)\Gamma(1+\sigma+(i-1)\tau)}{\Gamma(1+\tau)\Gamma(1+\rho+\sigma+(m+i-2)\tau)}
\end{aligned}$$

次に $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\mathbb{C}^N$ の中の超平面

$$D = \bigcup_{i=1}^N (z_i = 0) \bigcup_{1\le i<j\le N}^N (z_i - z_j = 0)$$

を定義する．この超平面に対して $N$ 次元複素多様体

$$X_N = \mathbb{C}^N \setminus D = \{(z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N | z_i \neq z_j, z_i \neq 0\}$$

を定義する．

$\kappa \in \mathcal{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対して $X_N$ 上で正則な多価関数

$$U_N(z;\kappa) = \prod_{1 \leq i \neq j \leq N} (1 - \frac{z_i}{z_j})^\kappa$$

を定義する．

$U_N(z;\kappa)$ の対数微分

$$\begin{aligned} \omega_N(\kappa) &= \mathrm{d}\ \log U_N(z;\kappa) \\ &= \kappa \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} \frac{\mathrm{d}(z_i - z_j)}{z_i - z_j} + (1-N)\kappa \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathrm{d}z_j}{z_j} \end{aligned}$$

に対してツイスト de Rham 複体 $(\Omega^\bullet(*D), \nabla_N(\kappa))$ が定まる．ただし $\Omega^\bullet(*D)$ は $X_N$ 上で正則な有理微分形式全体の空間とする．

$U_N(z;\kappa)$ から定まる局所系及び双対局所系をそれぞれ ${}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_N(\kappa)$ , ${}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_N^\vee(\kappa)$ とおく． ${}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_N^\vee(\kappa)$ 係数のツイストホモロジー及び ${}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_N(\kappa)$ 係数のツイストコホモロジーをそれぞれ

$$H_p(X_N, {}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_N^\vee(\kappa)) \ , \quad H^p(X_N, {}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_N(\kappa))$$

とおく．ツイスト de Rham 理論によりコホモロジーの間の同型

$$H^p(X_N, {}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_N(\kappa)) \simeq H^p(\Omega^\bullet(*D), \nabla_{\omega_N(\kappa)})$$

が従う．

ここで新しいパラメータ $z, y_1, \ldots, y_{N-1}$ を

$$z_1 = z \ , \ z_i = zy_{i-1} \ , \ i = 2, \ldots, N$$

で定まるものとして定義する．これに対応して $U_N(z;\kappa)$ は次のように変換される．

$$\begin{aligned} U_N(z, zy_1, \ldots, zy_{N-1};\kappa) &= \prod_{i=1}^{N-1} y_i^{(1-N)\kappa}(1-y_i)^{2\kappa} \prod_{1 \leq i \neq j \leq N-1} (y_i - y_j)^\kappa \\ &= G_{N-1}((1-N)\kappa, 2\kappa, \kappa) \end{aligned}$$

Künneth の公式を用いると

$$H_N(X_N, {}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_N^\vee(\kappa)) \simeq H_1(\mathbb{C}^*, \mathcal{R}) \otimes H_{N-1}(Y_{N-1}, {}_{\mathcal{R}}\mathcal{L}_{N-1}^\vee((1-N)\kappa, 2\kappa, \kappa)) \ .$$

というホモロジー群の同型が従う． $2\pi i[\gamma] \in H_1(\mathbb{C}^*, \mathcal{R})$ を原点回りのサイクルから定まるホモロジー類とする．

**定義 3.1.** $[\Gamma_N(\kappa)]$ と $[\overline{\Gamma}_N(\kappa)]$ を

$$[\overline{\Gamma}_N(\kappa)] = \frac{[\Delta_{N-1}((1-N)\kappa, 2\kappa, \kappa)]}{S_{N-1}((1-N)\kappa, 2\kappa, \kappa)} \ , \qquad [\Gamma_N(\kappa)] = [\gamma] \times [\overline{\Gamma}_N(\kappa)]$$

で定義する. 定義から次が従う.

$$\int_{[\Gamma_N(\kappa)]} U_N(z;\kappa) \prod_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}z_i}{z_i} = 1$$

ここで $\mathcal{R}[z_1^{\pm}, \dots, z_N^{\pm}]^{\mathfrak{S}_N}$ を $\mathcal{R}$ 係数のローラン対称多項式環とする.

**定義 3.2.** $f \in \mathcal{R}[z_1^{\pm}, \dots, z_N^{\pm}]^{\mathfrak{S}_N}$ に対して $\mathcal{R}$ 上の線形写像

$$\langle\ \rangle_\kappa^N \ : \ \mathcal{R}[z_1^{\pm}, \dots, z_N^{\pm}]^{\mathfrak{S}_N} \to \mathcal{R}$$

を以下で定義する：

$$\langle f(z) \rangle_\kappa^N = \int_{[\Gamma_N(\kappa)]} U_N(z;\kappa) f(z) \prod_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}z_i}{z_i} \ .$$

$f \in \mathcal{R}[z_1^{\pm}, \dots, z_N^{\pm}]^{\mathfrak{S}_N}$ に対して $\overline{f} \in \mathcal{R}[z_1^{\pm}, \dots, z_N^{\pm}]^{\mathfrak{S}_N}$ を

$$\overline{f}(z_1, \dots, z_N) = f(z_1^{-1}, \dots, z_N^{-1})$$

で定義する. 上の線形写像に対して以下の命題が成り立つ.

**命題 3.3.**

1. $\langle\ 1\ \rangle_\kappa^N = 1$
2. $\langle\ f\ \rangle_\kappa^N = 0 \quad \textit{if}\ \mathrm{deg} f \neq 0$
3. $\langle\ f\ \rangle_\kappa^N = \langle\ \overline{f}\ \rangle_\kappa^N$ .

# 4 Jack 多項式

$\mathcal{R}$ を $\mathcal{K}$ または $\mathbb{C}$ とする. 以下では [3] に合わせて Jack 多項式の理論を簡単に紹介し, [6] により導入されたローラン対称多項式の空間上の内積について詳しく説明する.

$\mathcal{R}$ 上の $N$ 変数対称多項式環を ${}_{\mathcal{R}}\Lambda_N = \mathcal{R}[x_1, \dots, x_N]^{\mathfrak{S}_N}$ とおく. $N > M$ に対して ${}_{\mathcal{R}}\Lambda_N$ から ${}_{\mathcal{R}}\Lambda_N$ への写像 $\rho_{N,M}$ を

$$\begin{aligned}\rho_{N,M} : {}_{\mathcal{R}}\Lambda_N &\to {}_{\mathcal{R}}\Lambda_M \\ x_i &\mapsto x_i \quad i \leq M \\ x_i &\mapsto 0 \quad i > M\end{aligned}$$

で定義する. この写像から無限変数の対称多項式の空間

$${}_{\mathcal{R}}\Lambda = \varprojlim_{N} {}_{\mathcal{R}}\Lambda_N$$

が定まる. 全射準同型

$$\rho_N \ : \ {}_{\mathcal{R}}\Lambda \to {}_{\mathcal{R}}\Lambda_N$$

を $\rho_N(x_i) = x_i \ (1 \leq i \leq N), \ \ \rho_N(x_i) = 0 \ (i > N)$ として定義する.

ヤング図形 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots), \ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$ に対し, 次数 $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ と長さ $l_\lambda = \#\{i; \lambda_i > 0\}$ が定義される. ヤング図形の各 box $s = (i, j)$ $(1 \leq i \leq l_\lambda, 1 \leq j \leq \lambda_i)$ について

$$\begin{aligned}&a_\lambda(s) = \lambda_i - j \qquad a'_\lambda(s) = j - 1 \ \ (\text{arm length, dual arm length}) \\ &l_\lambda(s) = \lambda'_j - i \qquad l'_\lambda(s) = i - 1 \ \ (\text{leg length, dual leg length})\end{aligned}$$

が定義される.

ヤング図形の間に dominant order と呼ばれる部分順序 $\lambda \geq \mu$ が

$$\lambda \geq \mu \iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq \sum_{j=1}^{n} \mu_i, \quad n = 1, 2, \dots$$

で定義される.　ヤング図形 $\lambda$ 対して

$$p_\lambda(x) = p_{\lambda_1}(x) p_{\lambda_2}(x) \cdots \in {}_{\mathcal{R}}\Lambda$$

とおく. ここに $p_n(x)$ は無限変数の冪和対称関数 $p_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n$ である. また無限単項対称式

$$m_\lambda(x) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_\infty \lambda} x^\alpha$$

が定義される.

**定義 4.1.** $\kappa \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ とする. 任意の分割 $\lambda$ に対して対称多項式の空間 ${}_{\mathcal{R}}\Lambda$ 内積 $(\ ,\ )_\kappa$ を

$$\begin{aligned}(\ ,\ )_\kappa\ :\ {}_{\mathcal{R}}\Lambda \otimes_{\mathcal{R}} {}_{\mathcal{R}}\Lambda &\to \mathcal{R}\\ (p_\lambda(x), p_\mu(x))_\kappa &\mapsto \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda \kappa^{l_\lambda}\end{aligned}$$

で定める. ただし

$$\begin{aligned}z_\lambda &= \prod_{i\geq 1} i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda)!\\ m_i(\lambda) &= \#\{j; \lambda_j = i\}\ .\end{aligned}$$

**定理 4.1.** $\kappa \in \mathcal{R} \setminus \mathbb{Q}_{\leq 0}$ とする. ヤング図形 $\lambda$ に対して $P_\lambda(x;\kappa) \in {}_{\mathcal{R}}\Lambda$ で以下の性質を満たすものが唯一存在する.

1. $(P_\lambda(x;\kappa), P_\mu(x;\kappa))_\kappa = 0$ *if* $\lambda \neq \mu$
2. $P_\lambda(x;\kappa) = m_\lambda(x) + \sum_{\lambda > \mu} u_{\lambda,\mu}(\kappa) m_\mu(x), \quad u_{\lambda\mu}(\kappa) \in \mathcal{R}.$

この定理の性質を満たす $P_\lambda(x;\kappa) \in {}_{\mathcal{R}}\Lambda$ を分割 $\lambda$ に対する Jack 多項式と呼ぶ.

**定義 4.2.** $N$ 変数対称多項式の空間 ${}_{\mathcal{R}}\Lambda_N$ に以下の内積が定義できる.

$$(\ ,\ )_\kappa^N\ :\ {}_{\mathcal{R}}\Lambda_N \otimes_{\mathcal{R}} {}_{\mathcal{R}}\Lambda_N \to \mathcal{R}$$

*such that*

$$(f,g)_\kappa^N = \int_{[\Gamma_N(\kappa)]} U_N(z;\kappa^{-1}) \overline{f}(z) g(z) \prod_{i=1}^N \frac{\mathrm{d}z_i}{z_i}\ .$$

この内積と Jack 多項式との間に次の定理が成り立つ.

**定理 4.2.** $\kappa \in \mathcal{R} \setminus \mathbb{Q}_{\leq 0}$ とする. 長さが $N$ 以下の二つのヤング図形 $\lambda, \mu$ に対して次が成り立つ.

$$(P_\lambda(z;\kappa), P_\mu(z;\kappa))_\kappa^N = \delta_{\lambda,\mu} \frac{b_\lambda^N(\kappa)}{b_\lambda(\kappa)},$$
$$b_\lambda(\kappa) = \prod_{s\in\lambda} \frac{\kappa a_\lambda(s) + l_\lambda(s) + 1}{\kappa a_\lambda(s) + l_\lambda(s) + \kappa}, \quad b_\lambda^N(\kappa) = \prod_{s\in\lambda} \frac{N + \kappa a'_\lambda(s) - l'_\lambda(s)}{N + (a'_\lambda(s)+1)\kappa - l'_\lambda(s) - 1}\ .$$

**注意 4.3.** Macdonald の本では次のトーラス上の内積が定義されている.

$$\langle f,g\rangle'_N=\frac{1}{N!}\int_T\overline{f}(z)g(z)\Delta(z;\kappa)\mathrm{d}z\quad,\ for\ f(z),g(z)\in\mathcal{R}[z_1^{\pm},\ldots,z_N^{\pm}]^{\mathfrak{S}_N}$$

ただし $\Delta(z;\kappa)=\prod_{i\neq j}(1-z_iz_j{}^{-1})^{1/\kappa}$ であり

$$T=\{z=(z_1,\ldots,z_N)\in\mathbb{C}^N\mid|z_i|=1,\ 1\le i\le N\}$$

とする. この内積に関して次が成り立つ.

$$\langle P_\lambda(z;\kappa),P_\mu(z;\kappa)\rangle'_N=c_N\delta_{\lambda,\mu}\frac{b_\lambda^N(\kappa)}{b_\lambda(\kappa)},\qquad l(\lambda),l(\mu)\le N$$

$$b_\lambda^N(\kappa)=\prod_{s\in\lambda}\frac{N+\kappa a'_\lambda(s)-l'_\lambda(s)}{N+(a'_\lambda(s)+1)\kappa-l'_\lambda(s)-1}\ .$$

ただし

$$c_N=\frac{1}{N!}\int_T\Delta(z;\kappa)\mathrm{d}z\ .$$

正規化定数を除いて定理 4.2 の内積と一致することに注意する.

定理 4.2 の証明を述べる前に次の重要な定理を挙げる [2].

**定理 4.3.** $\rho,\sigma,\tau\in\mathcal{R}\setminus\mathbb{Q}_{\le0}$ 定理 3.1 と同じ条件を満たすとする. この時

$$I_{\lambda,m}(\rho,\sigma,\tau)=\int_{[\Delta(\rho,\sigma,\tau)]}P_\lambda(y;\tau^{-1})G_m(\rho,\sigma,\tau;y)\frac{\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m}{y_1\cdots y_m}$$

の値が

$$I_{\lambda,m}(\rho,\sigma,\tau)=v_{\lambda,m}(\tau)\prod_{i=1}^m\frac{\Gamma(\lambda_i+\rho+\tau(m-i))\Gamma(1+\sigma+\tau(m-i))}{\Gamma(\lambda_i+1+\rho+\sigma+\tau(2m-i-1))}$$

で与えられる. ただし

$$v_{\lambda,m}(\rho,\sigma,\tau)=\prod_{1\le i<j\le m}\frac{\Gamma(\lambda_i-\lambda_j+\tau(j-i+1))}{\Gamma(\lambda_i-\lambda_j+\tau(j-i))}.$$

特に $\lambda=0$ の時 $I_{0,m}=S_m(\rho,\sigma,\tau)$ となりセルバーグ積分と一致する.

**定理 4.2 の証明.** 互いに異なるヤング図形に関して直交性

$$(P_\lambda(z;\kappa),P_\mu(z;\kappa))_\kappa^N=0\quad\lambda\neq\mu\ ,\ |\lambda|=|\mu|\ ,$$

が成り立てば $(P_\lambda(z;\kappa),P_\lambda(z;\kappa))^N_\kappa$ の値は Pieri の公式を用いて帰納的に計算できる. 詳しくは [3] の第 VI 章を参照して欲しい. この直交条件を示すために解析的な議論を行う必要がある. 以下に概略を述べる.

$\kappa\in\mathcal{K}\setminus\mathbb{C}$ とする. 異なるヤング図形の組 $(\lambda,\mu)$ で

$$(P_\lambda(z;\kappa),P_\mu(z;\kappa))^N_\kappa\neq 0\quad \lambda\neq\mu\ ,\ |\lambda|=|\mu|$$

を満たすものが存在すると仮定する. $(P_\lambda(z;\kappa),P_\mu(z;\kappa))^N_\kappa$ は $\kappa\in\mathcal{K}\setminus\mathbb{C}$ に関して有理式であるから, ある正の整数 $k=\kappa^{-1}|_{t=t_0}$ で

$$(P_\lambda(z;k^{-1}),P_\mu(z;k^{-1}))^N_{k^{-1}}\neq 0$$

を満たすものが存在する. ここで次の積分を考える.

$$I(s,k)=\int_{[\gamma]}\int_{[\Delta_{N-1}((1-N)s,2s,s)]}U(z;s+k)\overline{P}_\lambda(z;k^{-1})P_\mu(z;k^{-1})\prod_{i=1}^N\frac{\mathrm{d}z_i}{z_i}.$$

仮定から

$$\lim_{s\to 0}\frac{I(s,k)}{S_{N-1}((1-N)s,2s,s)}=(P_\lambda(z;k^{-1}),P_\mu(z;k^{-1}))^N_{k^{-1}}\neq 0$$

であることに注意すると $I(s,k)$ は $s=0$ で $N-1$ 次の極を持つことが分かる. 一方で定理 4.3 の公式を用いて $I(s,k)$ を計算すると $N-1$ 次の極の係数はトーラス上の内積 $\langle P_\lambda(z;k^{-1}),P_\mu(z;k^{-1})\rangle'_N$ に比例することが示せる.

$$\langle P_\lambda(z;k^{-1}),P_\mu(z;k^{-1})\rangle'_N=0$$

であったのでこれは矛盾である. よって $\kappa\in\mathbb{C}(t)\setminus\mathbb{C}$ に対して

$$(P_\lambda(z;\kappa),P_\mu(z;\kappa))^N_\kappa=0\quad \lambda\neq\mu\ ,\ |\lambda|=|\mu|\ ,$$

が成り立つ. パラメータ $t$ に関して解析接続することにより $\kappa\in\mathbb{C}(t)\setminus\mathbb{Q}_{\leq 0}$ に関して直交性が成り立つ. □

# 5 遮蔽作用素と特異ベクトル

この章では今までの準備の下に遮蔽作用素と呼ばれる Virasoro 絡作用素を導入し, 特異ベクトルの比例定数公式の証明について説明する. 以下 $\mathcal{R}$ を $\mathcal{K}$ または $\mathbb{C}$ とする.

まず二つの元 $\alpha_+,\alpha_-\in\mathcal{R}$ で $\alpha_+\alpha_-=-2$ を満たし, さらに $\alpha_+^2\notin\mathbb{Q}$ を満たすものを固定する. $\kappa_\pm=\alpha_\pm^2/2$ とおく. これに対応して中心荷電 $1-3(\alpha_++\alpha_-)^2$ の $\mathcal{R}$ 上の Virasoro 代数の普遍包絡環を ${}_{\mathcal{R}}U(\mathcal{L})$ とおく.

$r, s \in \mathbb{Z}$ に対して以下の記号を定義する.

$$\begin{aligned} \beta_{r,s} &= \frac{1-r}{2}\alpha_+ + \frac{1-s}{2}\alpha_-, \\ h_{r,s} &= \frac{1}{2}\beta_{r,s}\big(\beta_{r,s} - \alpha_+ - \alpha_-\big) \\ &= \frac{r^2-1}{4}\kappa_+ + \frac{s^2-1}{4}\kappa_- - \frac{rs-1}{2} \end{aligned}$$

Fock 加群 ${}_R F_{\beta_{r,s}}$, ${}_{\mathcal{R}}F^{\vee}_{\beta_{r,s}}$ をそれぞれ ${}_{\mathcal{R}}F_{r,s}$, ${}_{\mathcal{R}}F^{\vee}_{r,s}$ と略記する.

**注意 5.1.** 任意の $r, s \in \mathbb{Z}$ に対して $L_0 \left|\beta_{r,s}\right\rangle = h_{r,s}\left|\beta_{r,s}\right\rangle$ であり, $h_{r,s} = h_{-r,-s}$ である.

共形次元がそれぞれ $h_{\alpha_\pm} = h_{1,\pm 1} = 1$ である二つの場

$$\mathcal{Q}_+(z) = V_{\alpha_+}(z), \quad \mathcal{Q}_-(z) = V_{\alpha_-}(z)$$

の $N$ 個の積

$$\begin{aligned} &\mathcal{Q}_\pm(z_1)\mathcal{Q}_\pm(z_2)\cdots\mathcal{Q}_\pm(z_N) \\ &= e^{N\alpha_\pm\hat{b}}\prod_{i=1}^{N} z_i^{\alpha_\pm b_0} \prod_{1\le i\ne j\le N}(z_i - z_j)^{\frac{\alpha_\pm^2}{2}} : \prod_{i=1}^{N}\overline{\mathcal{Q}_\pm}(z_i) : \end{aligned}$$

を考える. ただし

$$: \prod_{i=1}^{N}\overline{\mathcal{Q}_\pm}(z_i) := \prod_{k\ge 1} e^{\alpha_\pm \sum_{i=1}^{N}\frac{z_i^k}{k}b_{-k}} \prod_{k\ge 1} e^{-\alpha_\pm \sum_{i=1}^{N}\frac{z_i^{-k}}{k}b_k} .$$

$r \ge 1$ , $s \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathcal{Q}_+(z_1)\mathcal{Q}_+(z_2)\cdots\mathcal{Q}_+(z_r)$ の Fock 加群 ${}_{\mathcal{R}}F_{r,s}$ への作用は

$$\mathcal{Q}_+(z_1)\mathcal{Q}_+(z_2)\cdots\mathcal{Q}_+(z_r) = e^{r\alpha_+\hat{b}}U_r(z;\kappa_+)\prod_{i=1}^{r} z_i^{s-1} : \prod_{i=1}^{r}\overline{\mathcal{Q}_+}(z_i) :$$

と書ける. また $r \in \mathbb{Z}$ , $s \ge 1$ に対して $\mathcal{Q}_-(z_1)\mathcal{Q}_+(z_2)\cdots\mathcal{Q}_-(z_s)$ の Fock 加群 ${}_{\mathcal{R}}F_{r,s}$ への作用は

$$\mathcal{Q}_-(z_1)\mathcal{Q}_-(z_2)\cdots\mathcal{Q}_-(z_s) = e^{s\alpha_-\hat{b}}U_s(z;\kappa_-)\prod_{i=1}^{s} z_i^{r-1} : \prod_{i=1}^{s}\overline{\mathcal{Q}_-}(z_i) :$$

と書ける. これらの多価関数をそれぞれツイストサイクル $[\Gamma_r(\kappa_+)]$, $[\Gamma_s(\kappa_-)]$ 上で積分したものが遮蔽作用素である.

**定義 5.2.** $r \geq 1$ , $s \geq 1$ , $k \in \mathbb{Z}$ に対して遮蔽作用素と呼ばれる ${}_{\mathcal{R}}U(\mathcal{L})$ の元と可換な作用素が以下で定義される.

$$\mathcal{Q}_+^{[r]} = \int_{[\Gamma_r(\kappa_+)]} z^{r-1} \mathcal{Q}_+(z)\mathcal{Q}_+(zy_1)\cdots\mathcal{Q}_+(zy_{r-1}) \prod_{i=1}^{r-1} \mathrm{d}y_i \ : \ {}_{\mathcal{R}}F_{r,k} \to {}_{\mathcal{R}}F_{-r,k} \ ,$$

$$\mathcal{Q}_-^{[s]} = \int_{[\Gamma_s(\kappa_-)]} z^{s-1} \mathcal{Q}_-(z)\mathcal{Q}_-(zy_1)\cdots\mathcal{Q}_-(zy_{s-1}) \prod_{i=1}^{s-1} \mathrm{d}y_i \ : \ {}_{\mathcal{R}}F_{k,s} \to {}_{\mathcal{R}}F_{k,-s}$$

**注意 5.3.** $p_-/p_+ \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対して $\alpha_+ = \sqrt{2p_-/p_+} + t \in \mathcal{O}$, $\alpha_- = -2\alpha_+^{-1} \in \mathcal{O}$ を固定した時, $\mathcal{O}$ 整値性

$$\mathcal{Q}_+^{[r]}({}_{\mathcal{O}}F_{r,k}) \subset {}_{\mathcal{O}}F_{-r,k}$$
$$\mathcal{Q}_-^{[s]}({}_{\mathcal{O}}F_{k,s}) \subset {}_{\mathcal{O}}F_{k,-s}$$

が成り立つ [6].

ここで

$$Q_\lambda(x;\kappa) = b_\lambda(\kappa)P_\lambda(x;\kappa)$$

とおき, $\gamma \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ に対して $\mathcal{R}$ 同型写像

$$\begin{aligned} \rho_\gamma \ : \ {}_{\mathcal{R}}\Lambda &\to {}_{\mathcal{R}}U(\mathfrak{b}_-) \\ p_n(x) &\mapsto \gamma b_{-n}, \ n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

を定義する.

定理 4.2 を用いることにより次の命題が示せる.

**命題 5.4.** $\lambda_{N,M} = (M, M, \dots, M)$ とおく. 遮蔽作用素の $|\beta_{r,s}\rangle$ への作用が以下で与えられる.

*1.* $r \geq 1$ と $s \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\mathcal{Q}_+^{[r]} \left|\beta_{r,s}\right\rangle = \begin{cases} 0 & s \geq 1 \\ \rho_{\frac{2}{\alpha_+}}(Q_{\lambda_{r,|s|}}(x;\kappa_-)) \left|\beta_{-r,s}\right\rangle & s \leq 0 \end{cases}.$$

*2.* $r \in \mathbb{Z}$ と $s \geq 1$ に対して

$$\mathcal{Q}_-^{[s]} \left|\beta_{r,s}\right\rangle = \begin{cases} 0 & r \geq 1 \\ \rho_{\frac{2}{\alpha_-}}(Q_{\lambda_{s,|r|}}(x;\kappa_+)) \left|\beta_{r,-s}\right\rangle & r \leq 0 \end{cases}.$$

ここで Fock 加群の特異ベクトルの定義について復習する.

**定義 5.5.** Fock 加群 ${}_{\mathcal{R}}F_\beta$ のゼロでない元 $u_\beta$ が特異ベクトルであるとは

$$L_n u_\beta = 0, \quad n \geq 1$$

を満たすものとして定義される.

命題 5.4 より Fock 加群 $F_{-r,-s},\ r,s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ は $L_0$ 固有値が $h_{r,s} + rs$ の非自明な特異ベクトル $\rho_{\frac{2}{\alpha_+}}(Q_{\lambda_{r,s}}(x;\kappa_-))\,|\beta_{-r,-s}\rangle$ を持つことが分かる.

パラメータ $\kappa_+$ に関して

$$\kappa_+ \in \mathcal{R} \setminus \mathbb{Q}$$

であったから Fock 加群 ${}_{\mathcal{R}}F_{-r,-s}$ に対して

$${}_{\mathcal{R}}F_{-r,-s} = {}_{\mathcal{R}}U(\mathcal{L})\,|\beta_{-r,-s}\rangle$$

が成り立つ [5]. よって特異ベクトル $\rho_{\frac{2}{\alpha_+}}(Q_{\lambda_{r,s}}(x;\kappa_-))\,|\beta_{-r,-s}\rangle$ は ${}_{\mathcal{R}}U(\mathcal{L})$ 表示を持つ. そこで

$$\begin{aligned}
&{}_{\mathcal{R}}S_{r,s}\,|\beta_{-r,-s}\rangle = c_{r,s}\rho_{\frac{2}{\alpha_+}}(Q_{\lambda_{r,s}}(x;\kappa_-))\,|\beta_{-r,-s}\rangle\,, \quad c_{r,s} \in \mathcal{R} \\
&{}_{\mathcal{R}}S_{r,s} = L_{-1}^{rs} + \cdots \in {}_{\mathcal{R}}U(\mathcal{L}_-)
\end{aligned}$$

とおく. ${}_{\mathcal{R}}S_{r,s}$ は $L_{-1}^{rs}$ の係数を 1 とすることで一意的に定まる ${}_{\mathcal{R}}U(\mathcal{L}_-)$ の元である.

ここで

$$J_\lambda(x;\kappa) = \prod_{s\in\lambda}(\kappa a_\lambda(s) + l_\lambda(s) + 1)P_\lambda(x;\kappa)$$

とおく.

上の特異ベクトルの比例定数 $c_{r,s}$ は具体的に書ける. すなわち次の定理が成り立つ [4].

**定理 5.1.** $\kappa_+ \in \mathcal{R} \setminus \mathbb{Q}$ とし $r,s \geq 1$ とする. この時 ${}_{\mathcal{R}}F_{-r,-s}$ の特異ベクトルに対して以下の等式が成り立つ.

$${}_{\mathcal{R}}S_{r,s}\,|\beta_{-r,-s}\rangle = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}(i\kappa_+ - j)\rho_{\frac{2}{\alpha_+}}(J_{\lambda_{r,s}}(x;\kappa_-))\,|\beta_{-r,-s}\rangle$$

この定理は次の二つの三点関数を計算することにより示せる.

$$\begin{aligned}
&\langle\beta_{-2r-1,-2s-1}|\,V_{\beta_{-r,-s}}(z)\,{}_{\mathcal{R}}S_{r,s}\,|\beta_{-r,-s}\rangle\,, \\
&\langle\beta_{-2r-1,-2s-1}|\,V_{\beta_{-r,-s}}(z)\rho_{\frac{2}{\alpha_+}}(J_{\lambda_{r,s}}(x;\kappa_-))\,|\beta_{-r,-s}\rangle
\end{aligned}$$

二番目の式は Jack 多項式の理論から計算できる. 一方一番目の式は次の定理から計算できる.

**定理 5.2.** $h \in \mathcal{R}$ とする. 任意の単項式 $L_{-I} = L_{-i_1} L_{-i_2} \cdots L_{-i_M} \in {}_{\mathcal{R}}U(\mathcal{L}_-)$ に対して微分作用素

$$D_h(L_{-I}) = \left(z^{-i_M+1}\frac{\partial}{\partial z} + h(-i_M+1)z^{-i_M}\right)\cdots\left(z^{-i_1+1}\frac{\partial}{\partial z} + h(-i_1+1)z^{-i_1}\right)$$

を定義し ${}_{\mathcal{R}}U(\mathcal{L}_-)$ の任意の元に対しては線形に拡張する. この時, 関数 $z^{h_{r_1,s_1}-h-h_{r_3,s_3}}$ $(r_1, s_1, r_3, s_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ への $D_h({}_{\mathcal{R}}S_{r_3,s_3})$ の作用に関して次が成り立つ.

$$D_h({}_{\mathcal{R}}S_{r_3,s_3})z^{h_{r_1,s_1}-h-h_{r_3,s_3}} = \prod_{i=1}^{r_3}\prod_{j=1}^{s_3}(h - h_{r_1+r_3-2i+1,s_1+s_3-2j+1})z^{h_{r_1,s_1}-h-h_{r_3,s_3}-r_3s_3}$$

**注意 5.6.** $\mathcal{R}$ スカラー倍を除いて

$$\langle \beta_{-2r-1,-2s-1}|\, V_{\beta_{-r,-s}}(z)_{\mathcal{R}}S_{r,s}\,|\beta_{-r,-s}\rangle = D_{h_{r,s}}({}_{\mathcal{R}}S_{r,s})z^{h_{2r+1,2s+1}-2h_{r,s}}$$

である.

この定理は自由場の理論を用いて示される [7].

# References


[1] K.Aomoto, M.Kita. *Theory of Hypergeometric functions.* Springer, 2011

[2] K. W. J. Kadell. *The Selberg-Jack symmetric functions*, Adv. Math. 130 (1997) 33-102.

[3] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*, Clarendon Press, Oxford 1995.

[4] R. Sakamoto, J. Shiraishi, D. Arnaudon, L. Frappat, and E. Ragoucy, *Correspondence between conformal field theory and Calogero-Sutherland model*, Nucl. Phys. B704 (2005) 490-509.

[5] A. Tsuchiya and Y. Kanie. *Fock space representations of the Virasoro algebra - Intertwining operators*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 22(1986) 259-327.

[6] A. Tsuchiya, S. Wood. *On the extended W-algebra of type* $sl_2$ *at positive rational level*, International Mathematics Research Notices, Volume 2015, Issue 14, 1 January 2015, Pages 5357-5435.

[7] 山田泰彦, 共形場理論入門, 培風館 2006.