$A_{2l}^{(2)}$ 型 Demazure slice と非対称 Macdonald-Koornwinder 多項式

千原正寛
Masahiro Chihara
京都大学 大学院理学研究科
Department of Mathematics, Kyoto University

Abstract

本稿は 2020 年度 RIMS 共同研究「組合せ論的表現論の最近の進展」での発表をまとめたものである．筆者は [Ch] で, $A_{2l}^{(2)}$ 型 Demazure slice の指標が $t = \infty$ での非対称 Macdonald-Koornwinder 多項式をノルムで割ったものに一致することを証明した．この結果について説明する．

1 はじめに

ルート系に付随して定義される Macdonald 多項式と呼ばれる直交多項式の族が存在する．Macdonald-Koornwinder 多項式とは BC 型ルート系に対する Macdonald 多項式の類似であり [Ko, Sa1], 対称 Macdonald-Koornwinder 多項式の場合には, Askey-Wilson 多項式の一般化であり [Ko], 特殊化によって古典型に対応する Macdonald 多項式が出てくる [D] 等, 興味深い性質を持つ．

Demazure 加群とは Kac-Moody リー代数の最高ウェイト可積分表現の部分空間として定義されるボレル部分代数の加群である．Kac-Moody リー代数がアフィン型の時には, Demazure 加群は有限次元のものと無限次元のものの二種類がある．特に Kac-Moody リー代数が $X_n^{(r)}$ 型 $(X = A, D, E,\ r = 1, 2, 3)$ かつ可積分表現がレベル 1 である時には, 対応する有限次元の Demazure 加群の次数付き指標は, $t = 0$ での Macdonald 多項式の特殊化 ($A_{2l}^{(2)}$ 型の時は $t = 0$ での Macdonald-Koornwinder 多項式の特殊化) に一致することが知られている [Ion, San].

Demazure slice とは, 無限次元の Demazure 加群の商として定義されるボレル部分代数の加群である．Kac-Moody リー代数が $X_n^{(r)}$ 型 $(X = A, D, E,\ r = 1, 2, 3)$ かつ $X_n^{(r)} \neq A_{2l}^{(2)}$ で可積分表現がレベル 1 の時には, Demazure slice の次数付き指標は $t = \infty$ での非対称 Macdonald 多項式をノルムで割ったものになっている [CK]. Kac-Moody リー代数が $A_{2l}^{(2)}$ 型の時は, Demazure slice の次数付き指標は $t = \infty$ での非対称 Macdonald-Koornwinder 多項式をノルムになっている [Ch]. 本稿ではこの結果について概説する．

2 $A_{2l}^{(2)}$ 型アフィンリー代数

リー代数 $\mathfrak{g}$ を $A_{2l}^{(2)}$ 型のアフィンリー代数とする．リー代数 $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数とする．リー代数 $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関するルートの集合を Δ とし, 単純ルートの集合を $\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_l\}$ とする．ただし, α_0 が最短単純ルートになるように番号付けが決まっているとする．集合 Δ_+ と Δ_- はそれぞれ正ルートと負ルートの集合とする．この時, 単純虚ルートは $\delta := 2\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_l$ で与えられ, 虚ルートの集合は $\Delta_{im} := \mathbb{Z}\delta$ である．実ルートの集合を Δ_{re} で表す．また, $\mathring{Q} := \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{Z}\alpha_i$, $\mathring{Q}_+ := \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{Z}_+\alpha_i$ とする．この時, $\mathring{\Delta} = \Delta \cap \mathring{Q}$

は C_l 型単純リー代数のルート系である. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^l$ の標準的な基底 $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_l$ を用いると, $\mathring{\Delta}$ は次のように書ける.

$$\mathring{\Delta} = \{\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j),\ \pm 2\varepsilon_i |\ i, j = 1, ..., l\}.$$

ルート集合 $\mathring{\Delta}$ の短ルートの集合を $\mathring{\Delta}_s$, 長ルートの集合を $\mathring{\Delta}_l$ で表す. この時

$$\Delta_{re} = (\mathring{\Delta}_s + \mathbb{Z}\delta) \cup (\mathring{\Delta}_l + 2\mathbb{Z}\delta) \cup \frac{1}{2}(\mathring{\Delta}_l + (2\mathbb{Z}+1)\delta)$$

かつ

$$\alpha_0 = \frac{\delta}{2} + \varepsilon_1,\ \ \alpha_1 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2,\ \cdots,\ \alpha_{l-1} = -\varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l,\ \ \alpha_l = -2\varepsilon_l$$

である. 各 $\alpha \in \Delta_{re}$ に対して, $\check{\alpha} \in \mathfrak{h}$ を対応する余ルートとする. 各 $\alpha \in \Delta_{re}$ に対して, 対応するルート空間を $\mathfrak{g}_\alpha$ で表す. 部分リー代数 $\mathring{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{h}$ を $\mathring{\mathfrak{h}} = \bigoplus_{i=1,...,l} \mathbb{C}\check{\alpha}_i$ とする. リー代数 $\mathfrak{g}$ のボレル部分代数 $\mathfrak{b}_-$ とは

$$\mathfrak{b}_- = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_-} \mathfrak{g}_\alpha$$

のことである. 各 $i \in \{0, 1, ..., l\}$ に対して, $\Lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{g}$ の基本ウェイトとする. つまり

$$\Lambda_i(\check{\alpha}_j) = \delta_{i,j},\ \Lambda_i(d) = 0$$

である. リー代数 $\mathfrak{g}$ の整ウェイトと支配的整ウェイトの集合をそれぞれ

$$P := \mathbb{Z}\Lambda_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\Lambda_l \oplus \mathbb{Z}\frac{\delta}{2}, \quad P_+ := \mathbb{Z}_+\Lambda_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_+\Lambda_l \oplus \mathbb{Z}\frac{\delta}{2}$$

で定める. ウェイト ϖ_i を $\varpi_i := \Lambda_i - 2\Lambda_0$ $(i \in \{1, ..., l\})$ で定め,

$$\mathring{P} = \mathbb{Z}\varpi_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\varpi_l, \quad \mathring{P}_+ = \mathbb{Z}_+\varpi_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_+\varpi_l$$

とする. また $\mathring{Q}' := \mathring{Q} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}\mathring{\Delta}_l$, $\mathring{Q}'_+ := \mathring{Q}_+ + \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+\mathring{\Delta}_{l+}$ とする. リー代数 $\mathfrak{g}$ のワイル群を W で表す. アフィンワイル群 W に含まれる C_l 型のワイル群を $\mathring{W}$ で表す.

3 Macdonald-Koornwinder 多項式

この節では, [Sa2, §3] と [Ion] にそって Macdonald-Koornwinder 多項式を導入する.

定義 3.1 (Macdonald 順序) ウェイト $\mu, \lambda \in \mathring{P}$ に対して, 次の二つが成り立つ時, その時に限り $\mu \succeq \lambda$ と表す.

(1) $\mu - \lambda \in \mathring{Q}_+$ *if* $\mu \in \mathring{W}\lambda$;

(2) $\lambda_+ - \mu_+ \in \mathring{Q}'_+$ *if* $\mu_+ \neq \lambda_+$. ただし, λ_+ は $\mathring{W}\lambda \cap \mathring{P}_+$ の元である.

体 $\mathbb{F}$ を $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\!(t, q^{1/2})\!)$ で決め, $\mathbb{F}[\mathring{P}]$ を $\mathbb{F}$ 上の $\mathring{P}$ の群環, X^λ を $\lambda \in \mathring{P}$ に対応する $\mathbb{F}[\mathring{P}]$ の元とする. 各 $i \in \{1, ..., l\}$ に対して, $x_i = X^{\varepsilon_i}$ とみなすことで, $\mathbb{F}[x_1^{\pm 1}, ..., x_l^{\pm 1}]$ と $\mathbb{F}[\mathring{P}]$ を同一視する. $(u)_\infty = \prod_{n \in \mathbb{Z}_+}(1 - q^n u)$ とする. 無限積 $\Delta(x)_+$ と $\Delta(x)$ を

$$\Delta(x)_+ := \prod_{i=1,...,l} \frac{(x_i)_\infty(-x_i)_\infty(q^{1/2}x_i)_\infty}{(tx_i)_\infty(-tx_i)_\infty(q^{1/2}t^2x_i)_\infty} \prod_{1 \le i < j \le l} \frac{(x_ix_j)_\infty(x_ix_j^{-1})_\infty}{(tx_ix_j)_\infty(tx_ix_j^{-1})_\infty}$$

と

$$\Delta(x) := \Delta(x)_+\Delta(x^{-1})_+ \prod_{n\in\mathbb{N}}(1-q^n)^l \in \mathbb{F}[\![x_1^{\pm1},...,x_l^{\pm1}]\!]$$

のように定める．さらに $\varphi(x)$ と $\mathcal{C}(x)$ を

$$\varphi(x) := \prod_{i=1,\dots,l}\frac{(x_i-t)(x_i+t)}{x_i^2-1}\prod_{1\le i<j\le l}\frac{(x_ix_j-t)(x_ix_j^{-1}-t)}{(x_ix_j-1)(x_ix_j^{-1}-1)}$$

と $\mathcal{C}(x) := \Delta(x)\varphi(x)$ で定める．

定義 3.2 ローラン多項式環 $\mathbb{F}[x_1^{\pm1},...,x_l^{\pm1}]$ 上の内積 $\langle f,g\rangle' \in \mathbb{F}$ を

$$\langle f,g\rangle' := fg^\star\mathcal{C} \text{ の定数項}$$

で定める．ただし $\star$ は $q^\star = q^{-1}$, $x_i^\star = x_i^{-1}$ かつ $t^\star = t^{-1}$ で定まる $\mathbb{F}[x_1^{\pm1},...,x_l^{\pm1}]$ 上の対合である．

定義 3.3 非対称 Macdonald-Koornwinder 多項式とは次を満たす $\mathbb{F}[\mathring{P}]$ の元の族 $\{E_\lambda(x,q,t)\}_{\lambda\in\mathring{P}}$ である．

(1) $\langle E_\lambda, E_\mu\rangle' = 0$ if $\lambda\neq\mu$;

(2) $E_\lambda = X^\lambda + \sum\limits_{\mu\succ\lambda} c_\mu X^\mu$.

注意 3.4 ここでの Macdonald-Koornwinder 多項式の定義は，[Sa2] での定義を [Ion] にあるように，パラメーター t, t_0, u_0, t_l, u_l を $t_0 = t_l = u_0 = t$ かつ $u_l = 1$ のように特殊化したものである．

Macdonald-Koornwinder 多項式の特殊化を

$$\bar{E}_\lambda := \lim_{t\to0} E_\lambda,\ E^\dagger := \lim_{t\to0} E_\lambda^\star$$

で定める．[Ion, §3.2] より，この特殊化は well-defined である．ローラン多項式環 $\mathbb{C}(\!(q^{1/2})\!)[x_1^{\pm1},...,x_l^{\pm1}]$ 上の内積 $\langle -,-\rangle$ を $\langle -,-\rangle'$ の $t=0$ での特殊化とする．

4 圏 $\mathfrak{B}$ と Euler-Poincaré ペアリング

$U(\mathfrak{b}_-)$-加群 M と $\lambda\in P$ に対して，$M_\lambda := \{m\in M|\ hm = \lambda(h)m \text{ for } h\in\mathfrak{h}\}$ とする．圏 $\mathfrak{B}$ をウェイト分解

$$M = \bigoplus_{\lambda\in P} M_\lambda$$

を持ち，各 M_λ の次元は高々可算である加群からなるような $U(\mathfrak{b}_-)$-加群の圏の充満部分圏とする．加群 M のウェイトの集合を wt $M := \{\lambda\in P \mid M_\lambda\neq\{0\}\}$ で定める．圏 $\mathfrak{B}'$ をウェイト集合 wt M が，ある $\mu_1,...,\mu_k\in P$ に対して wt $M \subset \bigcup\limits_{i=1,\dots,k}(\mu_i - Q_+)$ を満たし，全てのウェイト空間が有限次元である加群からなる $\mathfrak{B}$ の充満部分圏とする．圏 $\mathfrak{B}_0$ を有限次元加群からのみなる $\mathfrak{B}'$ の充満部分圏とする．

定義 4.1 加群 $M\in\mathfrak{B}'$ に対して M の次数付き指標を次の形式和で定める．

$$\mathrm{gch}\, M := \sum_{\lambda-m\delta\in\mathring{P}\oplus\frac{1}{2}\mathbb{Z}\delta} q^m X^\lambda \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathring{\mathfrak{h}}\oplus\mathbb{C}d}(\mathbb{C}_{\lambda-m\delta}, M)$$

ここで $\mathbb{C}_{\lambda-m\delta}$ は $\mathring{\mathfrak{h}}\oplus\mathbb{C}d$ のウェイト $\lambda-m\delta$ の一次元表現である．ただし d は $\mathfrak{g}$ の次数作用素である．

定義 4.2 圏 $\mathfrak{B}$ の加群 M に対して, $M^\vee := \bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*} M^*$ とし, ベクトル空間 $M^\vee$ への $\mathfrak{b}_-$ の作用を $X \in \mathfrak{b}_-$, $f \in M^\vee$ と $v \in M$ に対して

$$Xf(v) := -f(Xv)$$

で定める.

圏 $\mathfrak{B}'$ は十分な射影的対象を持つ [FKM, Lemma5.2]. したがって Ext-関手を考えることができ, 次のようにして Euler-Poincaré ペアリングを定義することが出来る.

定義 4.3 加群の対 $M \in \mathfrak{B}'$ と $N \in \mathfrak{B}_0$ に対して, *Euler-Poincaré* ペアリング $\langle M, N\rangle_{\mathrm{Ext}}$ を次の形式和で定める.

$$\langle M, N\rangle_{\mathrm{Ext}} := \sum_{p\in\mathbb{Z}_+, m\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} (-1)^p q^m \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^p_{\mathfrak{B}}(M \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{m\delta}, N^\vee).$$

命題 4.4 加群 $M \in \mathfrak{B}'$ と $N \in \mathfrak{B}_0$ に対して次が成り立つ.

(1) ペアリング $\langle M, N\rangle_{\mathrm{Ext}}$ は $\mathbb{C}(\!(q^{1/2})\!)$ に属する;

(2) ペアリング $\langle M, N\rangle_{\mathrm{Ext}}$ は M と N の次数付き指標のみによって決まる.

上の命題から Euler-Poincaré ペアリングは $\mathbb{C}(\!(q^{1/2})\!)[\mathring{P}] \times \mathbb{C}(\!(q^{1/2})\!)[\mathring{P}]$ から $\mathbb{C}(\!(q^{1/2})\!)[\mathring{P}]$ への写像を定める. これも $\langle -, -\rangle_{\mathrm{Ext}}$ で表す. Euler-Poincaré ペアリングと Macdonald-Koornwinder 多項式を定義する内積の $t = 0$ での特殊化 $\langle -, -\rangle$ に関して次が成り立つ.

命題 4.5 加群の対 $M \in \mathfrak{B}'$ と $N \in \mathfrak{B}_0$ に対して, $\langle \mathrm{gch}\, M, \mathrm{gch}\, N\rangle_{\mathrm{Ext}} = \langle \mathrm{gch}\, M, \mathrm{gch}\, N\rangle$ が成り立つ.

5 Demazure 加群と Demazure slice

定義 5.1 各 $w \in W$ と $\Lambda \in P_+$ に対して *Demazure* 加群 $D_{w\Lambda}$, $D^{w\Lambda}$ とは次で決まる $U(\mathfrak{b}_-)$-加群である.

$$D_{w\Lambda} := U(\mathfrak{b}_-)v^*_{w\Lambda} \subset L(\Lambda)^\vee, \ \ D^{w\Lambda} := U(\mathfrak{b}_-)v_{w\Lambda} \subset L(\Lambda).$$

ただし $L(\Lambda)$ は最高ウェイト Λ の $\mathfrak{g}$ の既約表現であり, $v_{w\Lambda} \in L(\lambda)_{w\Lambda}$ と $v^*_{w\Lambda}$ は $(L(\Lambda)_{w\Lambda})^*$ の零でないベクトルである.

注意 5.2

(1) ウェイト空間 $L(\Lambda)_{w\Lambda}$ は一次元である [Kac]. したがって $D_{w\Lambda}$, $D^{w\Lambda}$ は零でない.

(2) 加群 $D_{w\Lambda}$ は有限次元であるが, $D^{w\Lambda}$ は一般には無限次元である. [Kum] などの文献では Demazure 加群といったら $D_{w\Lambda}$ のことを指している.

補題 5.3 ([CK] Corollary 4.2) 各 $w, v \in W$ で $w \le v$ を満たすものと $\Lambda \in P_+$ に対して, $D^{v\Lambda} \subseteq D^{w\Lambda}$ が成り立つ.

Lemma 5.3 から次のように $U(\mathfrak{b}_-)$-加群を定義することが出来る.

定義 5.4 各 $w \in W$ と $\Lambda \in P_+$ に対して, $U(\mathfrak{b}_-)$-加群 $\mathbb{D}^{w\Lambda}$ を

$$\mathbb{D}^{w\Lambda} := D^{w\Lambda}/\sum_{w<v} D^{v\Lambda}$$

のように定義する. この加群を *Demazure slice* と呼ぶ. ただし, ここでの順序はワイル群 W の *Bruhat* 順序である.

本稿では Demazure 加群はレベル 1 の場合を扱う．この場合には以下のようにして, Demazure 加群は $\mathring{P}$ でパラメトライズされる．リー代数 $\mathfrak{g}$ の 0 番目の基本ウェイトを Λ_0 とする．この時, 全単射

$$\mathring{P} \ni \lambda \mapsto \lambda + \Lambda_0 + \frac{(\lambda|\lambda)}{2}\delta \in W\Lambda_0$$

が存在する．各ウェイト $\lambda \in \mathring{P}$ に対して,

$$D_\lambda := D_{\pi_\lambda},\ D^\lambda := D^{\pi_\lambda},\ \mathbb{D}^\lambda := \mathbb{D}^{\pi_\lambda}$$

とする．ただし π_λ は同型 $W \simeq \mathring{W} \ltimes \mathring{P}$ で (e, λ) に対応する元である．次の指標公式が知られている．

定理 5.5 ([Ion] Theorem 1) 各 $\lambda \in \mathring{P}$ に対して,

$$\text{gch } D_\lambda = q^{\frac{(b|b)}{2}} \bar{E}_\lambda(X^{-1}, q^{-1})$$

が成り立つ．

6 主結果

この節では [Ch] の主結果を紹介する．

定理 6.1 各 $\lambda,\ \mu \in \mathring{P}$, $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ と $k \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ext}^n_{\mathfrak{B}}(\mathbb{D}^\lambda \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{m\delta + k\Lambda_0}, D_\mu^\vee) = \delta_{n,0}\delta_{m,0}\delta_{k,0}\delta_{\lambda,\mu} \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

が成り立つ．

定義 4.3 から次が従う．

系 6.2 各 λ と $\mu \in \mathring{P}$ に対して,

$$\langle \text{gch } \mathbb{D}^\lambda, q^{\frac{(b|b)}{2}} \bar{E}_\mu(X^{-1}, q^{-1}) \rangle_{\text{Ext}} = \delta_{\lambda,\mu}$$

が成り立つ．

定理 5.5 と上の系から, Demazure slice の次数付き指標は $t = 0$ での非対称 Macdonald-Koornwinder 多項式の双対であることが分かる．従って次が成り立つ．

系 6.3 各 $\lambda \in \mathring{P}$ に対して,

$$\text{gch } \mathbb{D}^\lambda = q^{\frac{(b|b)}{2}} E_\lambda^\dagger(X^{-1}, q^{-1}) / \langle \bar{E}_\lambda, E_\lambda^\dagger \rangle_{\text{Ext}}$$

が成り立つ．

注意 6.4 アフィンリー代数 $\mathfrak{g}$ が $A_{2l}^{(2)}$ 型で無い時にも, 定理 6.1 や系 6.3 と類似の結果が知られている [CK]．その場合, Demazure slice の次数付き指標は非対称 Macdonald-Koornwinder 多項式ではなく非対称 Macdonald 多項式で与えられる．

参 考 文 献

[Ch] M. Chihara, Demazure slices of type $A_{2l}^{(2)}$, arXiv:1908.06499.

[CK] I. Cherednik, S. Kato, Nonsymmetric Rogers-Ramanujan sums and thick Demazure modules, Adv. Math. 374 Article Number 107335 (2020).

[D] J. van Diejen, Self-dual Koornwinder-Macdonald polynomials, Invent. Math. 126 (1996), 319–339.

[FKM] E. Feigin, S. Kato, and I. Makedonskyi, Representation theoretic realization of non-symmetric Macdonald polynomials at infinity, J, Reine Angew Math. Volume 2020: Issue 764

[Ion] B. Ion, Nonsymmetric Macdonald polynomials and Demazure characters, Duke Mathematical Journal 116:2 (2003), 299-318

[Kac] Victor G. Kac. Infinite-dimensional Lie algebras. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, (1990).

[Ko] T. Koornwinder, Askey-Wilson polynomials for root systems of type BC, Contemp. Math. 138 (1992), 189–204.

[Kum] Shrawan Kumar, Kac-Moody Groups, their Flag Varieties and Representation Theory, volume 204 of Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.

[Sa1] S. Sahi, Nonsymmetric Macdonald polynomials and Duality. Ann. of Math. (2) 150 (1999), no. 1, 267-282

[Sa2] S. Sahi, Some properties of Koornwinder polynomials. q-series from a contemporary perspective (South Hadley, MA, 1998), 395-411, Contemp. Math. 254, AMS, Providence, RI, (2000).

[San] Y. Sanderson, On the connection between Macdonald polynomials and Demazure characters, J. Algebraic Combin. 11 (2000), no.3, 269-275.