Toward $A_2^{(2)}$ Andrews–Gordon identities

滝聞 太基 （岡山大学自然科学研究科）*
Motoki Takigiku
Okayama University

概要

1970-80 年代に Lepowsky–Wilson が $A_1^{(1)}$ 型アフィンリー環の表現論を用いた Rogers–Ramanujan 分割定理 (and 恒等式) の証明を与えて以降、他の型のアフィンリー環に関係する「Rogers–Ramanujan 型の」定理を発見しようとする試みが行われている。本稿では $A_2^{(2)}$ 型に関係する最近の結果 [TT19, TT20] を紹介する。本稿の内容は土岡俊介氏（東京工業大学情報理工学院）との共同研究による。

1 背景

1.1 Rogers–Ramanujan 恒等式

Rogers–Ramanujan 恒等式 (以下、Rogers–Ramanujan = RR と略する) とは以下のものである。

定理 1.1 (RR 恒等式)**.**

$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty},\qquad \sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty}. \tag{1}$$

ただし、$n\in\{0,1,2,\cdots,\}\sqcup\{\infty\}$ に対して

$$(x;q)_n:=\prod_{i=0}^{n-1}(1-xq^i),\qquad (x_1,\cdots,x_m;q)_n:=(x_1;q)_n\cdots(x_m;q)_n$$

と定める。また本稿では級数は全て形式的なものとして扱う。

1.2 Rogers–Ramanujan 分割定理

RR 分割定理とは (1) と同値な以下の定理 1.2 である: まず $\mathsf{Par}:=\bigsqcup_{\ell\geq 0}\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\ell)\in(\mathbb{Z}_{>0})^\ell\mid \lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_\ell\}$ の元を分割と呼び、分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\ell)$ に対し $\ell(\lambda):=\ell$（長さ）, $|\lambda|:=\sum_i\lambda_i$（サイズ）, $m_i(\lambda)=|\{j\mid\lambda_j=i\}|$（$i\geq 1$ の重複度）とする。また $n\geq 0$ に対し $\mathsf{Par}(n):=\{\lambda\in\mathsf{Par}\mid|\lambda|=n\}$ とする。$\mathcal{C},\mathcal{D}\subseteq\mathsf{Par}$ が**分割論的に同値** ($\mathcal{C}\overset{\mathrm{PT}}{\sim}\mathcal{D}$ と書く) とは、$\forall n\geq 0$ について $|\mathcal{C}\cap\mathsf{Par}(n)|=|\mathcal{D}\cap\mathsf{Par}(n)|$ であることを言う。このとき

定理 1.2 (RR 分割定理)**.**

$$\{\lambda\in\mathsf{Par}\mid 1\leq\forall i<\ell(\lambda),\ \lambda_i-\lambda_{i+1}\geq 2\}\overset{\mathrm{PT}}{\sim}\{\lambda\in\mathsf{Par}\mid\forall i,\ \lambda_i\equiv 1,4\pmod 5\},$$
$$\{\lambda\in\mathsf{Par}\mid(1\leq\forall i<\ell(\lambda),\ \lambda_i-\lambda_{i+1}\geq 2)\ \textit{and}\ m_1(\lambda)=0\}\overset{\mathrm{PT}}{\sim}\{\lambda\in\mathsf{Par}\mid\forall i,\ \lambda_i\equiv 2,3\pmod 5\}.$$

* email: takigiku@okayama-u.ac.jp

注意 1.3. 分割の集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathsf{Par}$ に対し母関数 $\sum_{\lambda \in \mathcal{C}} q^{|\lambda|}$ を対応させることで定理 1.1 と定理 1.2 の同値性はすぐにわかる。

RR 恒等式 (分割定理) の歴史については例えば [And76, §7], [And86, §1], [Sil18, §2] などを参照されたい。

1.3 Andrews–Gordon による一般化

Gordon(1961) と Andrews(1974) による以下の一般化は今では Andrews–Gordon 分割定理 (or 恒等式) と呼ばれる。

定理 1.4 (Gordon)**.** 任意の整数 $k \geq 2$ と $1 \leq i \leq k$ について、

$$\{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \forall j,\, \lambda_j - \lambda_{j+k-1} \geq 2,\ m_1(\lambda) \leq i-1\} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \forall j,\ \lambda_j \not\equiv 0, \pm i \pmod{2k+1}\}.$$

定理 1.5 (Andrews)**.** 任意の整数 $k \geq 2$ と $1 \leq i \leq k$ について、

$$\sum_{n_1, \cdots, n_{k-1} \geq 0} \frac{q^{N_1^2 + \cdots + N_{k-1}^2 + N_i + \cdots + N_{k-1}}}{(q;q)_{n_1} (q;q)_{n_2} \cdots (q;q)_{n_{k-1}}} = \frac{(q^i, q^{2k+1-i}, q^{2k+1}; q^{2k+1})_\infty}{(q;q)_\infty}. \tag{2}$$

ただし $N_i := n_i + \cdots + n_{k-1}$ とおいた.

また、「無限積サイド」が $(q^i, q^{2k-i}, q^{2k}; q^{2k})_\infty / (q;q)_\infty$ になるような一般化も Andrews (1967), Bressoud (1979, 1980) によって与えられている（Andrews–Bressoud 分割定理あるいは恒等式と呼ばれる。例えば [Sil18, §3] に解説がある)。

1.4 表現論を用いた証明

アフィンディンキン図形 X を選ぶとアフィンリー環 $\mathfrak{g}(X)$ が定まる。X の各頂点 i に非負整数 n_i を対応させせると、可積分既約最高ウェイト加群 $V = V(\sum_i n_i \Lambda_i)$ が定まる（Λ_i は基本ウェイト。以降このような V を**標準加群**とも呼ぶ)。また主ハイゼンベルグ部分リー環の作用に関する真空加群 $\Omega(V)$ が定まり、その指標 $\chi(\Omega(V)) = \chi(\sum_i n_i \Lambda_i)$ が定まる（**主指標**と呼ぶ。詳しくは説明しない)。

[LM78] は (1) の両辺の値が $A_1^{(1)}$ 型アフィンリー環のレベル 3 標準加群 $V(2\Lambda_0 + \Lambda_1)$, $V(3\Lambda_0)$ の指標のある特殊化（をある factor で割ったもの）に一致するという観察をした。そのアイデアを発展させ、Lepowsky–Wilson [LW81, LW82, LW84] は $\chi(2\Lambda_0 + \Lambda_1)$, $\chi(3\Lambda_0)$ を 2 通りに計算することで定理 1.1,1.2 の別証明を与えた（一方は Weyl–Kac 指標公式により、もう一方は Z-作用素と呼ばれる頂点作用素を用いて真空加群の基底を構成することによる)。さらに $k \geq 2$ についてレベル $2k-1$ (resp. $2k-2$) の標準加群からは同様に Andrews–Gordon (resp. Andrews–Bressoud) による一般化が得られる。

よって以下のような予想が自然にできる:

Big Picture: アフィンリー環と最高ウェイトを選ぶ（= アフィン・ディンキン図形を選び、各頂点に非負整数を書く）と、対応する定理 1.1,1.2 の一般化が存在するか？

例えば、$A_1^{(1)}$ 型ディンキン図形 $\circ\!\Longleftrightarrow\!\circ$ の頂点に (a, b) と書くことに対応するウェイト $a\Lambda_0 + b\Lambda_1$ のレベルは $a+b$ で、これらはちょうど Rogers–Ramanujan と Andrews–Gordon–Bressoud に対応する。

注意 1.6. “Big Picture” において、期待される恒等式の「無限積」(≒ 分割定理の「パートの mod の条件」) は決まっている（Weyl–Kac 指標公式から計算できるもの)。一方で、期待される無限和や「パート同士の差の条件」がどのようなものかはよくわからない。

1.5 $A_2^{(2)}$ 型の場合

$A_1^{(1)}$ 型の次のステップとして $A_2^{(2)}$ 型の場合が（部分的に）調べられている。$A_2^{(2)}$ 型ディンキン図形 $\circ \Lleftarrow \circ$ で頂点に (a,b) と書くことに対応するウェイト $a\Lambda_0 + b\Lambda_1$ のレベルは $a+2b$ である。

1.5.1 頂点作用素を用いた構成

頂点作用素を用いた標準加群の構成から、レベル 3 (resp. 4) の場合に Capparelli [Cap93] (resp. Nandi [Nan14]) が分割定理の予想を得た（レベル 2 の場合は単に RR 恒等式（with $q \mapsto q^2$）になる)。Capparelli の予想は [And94, TX95, Cap96] などによって証明されており、Nandi の予想は我々が [TT19] で証明を与えた。[TT19] については [Tak19] でも解説したが、その後証明の一部分をより一般的な状況で適用できる形にしたのでその差分について §2 で解説する。

1.5.2 Higher level について

$A_2^{(2)}$ 型のレベル 5 以上の場合では頂点作用素を用いた構成で “Big Picture” に解答を与えることはできていない。一方、期待される無限積 $\chi_{A_2^{(2)}}(a\Lambda_0 + b\Lambda_1)$ は決まっていて具体的に計算できるので、定理 1.1 や 1.2 の一般化にあたるものの「当たりをつける」ことはできる。例えばここでは

$$\sum_{n_1,\cdots,n_k \geq 0} \frac{(-1)^{(n_1,\ldots,n_k \text{ の 1 次式})} q^{(n_1,\ldots,n_k \text{ の 2 次式})}}{(q^{d_1};q^{d_1})_{n_1} \cdots (q^{d_k};q^{d_k})_{n_k}} \tag{3}$$

$(d_1,\ldots,d_k \in \mathbb{Z}_{>0})$ の形の和を仮に *Andrews–Gordon* 型と呼ぶことにする。[TT20] では、$A_2^{(2)}$ 型のレベル $5,7$ について

$$(\text{Andrews–Gordon 型の和}) = (\text{期待される無限積}) \tag{4}$$

の形の恒等式を発見し証明することができた。これについて §3 で解説する。

注意 1.7. “Big Picture” から期待される無限積サイドを持つ恒等式で (4) の形でないものも知られている: [MS08] ($A_2^{(2)}$ 型レベル 6), [KR] ($A_2^{(2)}$ 型で任意のレベル) など。また、分割定理では [Hir79, Cap04] ($A_2^{(2)}$ 型レベル $5,7$) がある。

いずれの恒等式 (or 分割定理) も頂点作用素との関係は不明である。

2 $A_2^{(2)}$, レベル 4 の分割定理

Nandi が予想した定理については [Tak19] でも述べたが主張を以下に再掲する。以下の (N1)-(N6) をみたす分割の集合を $\mathcal{N}$ とおく。

(N1) $\lambda_i - \lambda_{i+1} \neq 1$,
(N2) $\lambda_i - \lambda_{i+2} \geq 3$,
(N3) $\lambda_i - \lambda_{i+2} = 3 \implies \lambda_i \neq \lambda_{i+1}$,
(N4) $\lambda_i - \lambda_{i+2} = 3$ and $2 \nmid \lambda_i \implies \lambda_{i+1} \neq \lambda_{i+2}$,
(N5) $\lambda_i - \lambda_{i+2} = 4$ and $2 \nmid \lambda_i \implies \lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ and $\lambda_{i+1} \neq \lambda_{i+2}$,
(N6) $(\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \cdots, \lambda_{\ell(\lambda)-1} - \lambda_{\ell(\lambda)})$ は連続した部分列としてパターン $(3, 2^*, 3, 0)$ を含まない。ここで 2^* は 2 の 0 個以上の繰り返しを表す。

さらに、$\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$ を以下のように定める。

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1 &= \{\lambda \in \mathcal{N} \mid m_1(\lambda) = 0\}, \\
\mathcal{N}_2 &= \{\lambda \in \mathcal{N} \mid m_i(\lambda) \le 1 \text{ for } i = 1, 2, 3\}, \\
\mathcal{N}_3 &= \{\lambda \in \mathcal{N} \mid m_1(\lambda) = m_3(\lambda) = 0,\ m_2(\lambda) \le 1 \text{ and } P(\lambda)\}.
\end{aligned} \tag{5}$$

ただし条件 $P(\lambda)$ は「任意の $k \ge 1$ に対し、$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{\ell(\lambda)})$ は $(2k+3, 2k, 2k-2, \cdots, 4, 2)$ を連続した部分列として含まない」とする。

予想 2.1 (Nandi [Nan14])**.**

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1 &\overset{\text{PT}}{\sim} \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \forall i,\ \lambda_i \equiv \pm 2, \pm 3, \pm 4 \pmod{14}\}, \\
\mathcal{N}_2 &\overset{\text{PT}}{\sim} \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \forall i,\ \lambda_i \equiv \pm 1, \pm 4, \pm 6 \pmod{14}\}, \\
\mathcal{N}_3 &\overset{\text{PT}}{\sim} \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \forall i,\ \lambda_i \equiv \pm 2, \pm 5, \pm 6 \pmod{14}\}.
\end{aligned}$$

定理 2.2 ([TT19])**.** 定理 *2.1* は正しい。

証明の概要は以下の通りだった。

Step 1: 分割サイドの (x, q)-母関数

$$f_{\mathcal{N}_a}(x, q) := \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_a} x^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|}$$

がみたす q-差分方程式を求める。

Step 2: Step 1 で求めた q-差分方程式を解き、$f_{\mathcal{N}_a}(1, q)$ の無限和表示を得る。

Step 3: 適当な q-級数の定理を使い、得られた無限和が欲しい無限積に等しいことを示す。

今の場合、ステップ 1 ができてしまえばステップ 2 と 3 は比較的標準的な方法でできるのだった（[Tak19] を参照)。ステップ 1 については、知られている Rogers–Ramanujan 型の分割定理のほとんどでは**リンク分割イデアル** [And76, §8] の理論を用いて達成することができるが今の場合ではできなかった。[Tak19] で解説した際にはアドホックな構成を行ってこれを解決したが、ここでは**有限オートマトン**を用いてリンク分割イデアルを拡張する（より一般的に使える）方法を紹介する。

2.1 オートマトンと正規言語についての復習

この節の内容の詳細については例えば [Sip13, Koz97] などの教科書を参照されたい。

Σ を空でない有限集合（**アルファベット**）とする。Σ の元を**文字**と呼び、Σ の元の有限列 $a_1 \ldots a_n$ $(a_i \in \Sigma)$ を**文字列**と呼ぶ。Σ の文字列全体の集合を $\Sigma^* = \bigsqcup_{n \ge 0} \Sigma^n$ と書く。Σ^0 の唯一の元を ε と書く（**空文字列**)。Σ^* は文字列の連結と単位元 ε によってモノイドになる。Σ^* の部分集合を（Σ 上の）**言語** (*language*) と呼ぶ。言語 $X, Y \subseteq \Sigma^*$ に対して

$$XY := \{ab \mid a \in X, b \in Y\}, \quad X^* := \bigcup_{n \ge 0} X^n.$$

定義 2.3. Σ 上の**決定性有限オートマトン** (deterministic finite automaton, *DFA*) とは、5 つ組 $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ で

- Q: 有限集合（**状態集合**）
- $\delta \colon Q \times \Sigma \longrightarrow Q$: 写像（**遷移関数**）
- $s \in Q$（**初期状態**）
- $F \subseteq Q$（**受理状態**）

なるものである。またこのとき $\widehat{\delta}\colon Q\times\Sigma^* \longrightarrow Q$ を $\widehat{\delta}(q,\varepsilon) := q$ と $\widehat{\delta}(q,wa) := \delta(\widehat{\delta}(q,w),a)$ ($q\in Q$, $a\in\Sigma$, $w\in\Sigma^*$) で定め、$L(M) := \{w\in\Sigma^* \mid \widehat{\delta}(s,w)\in F\}$ を M の**受理する言語**という。

定義 2.4. Σ 上の言語が**正規** (*regular*) とは、ある DFA の受理する言語であることを言う。

例 2.5. $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$, $\{a\}\,(a\in\Sigma)$, Σ は正規言語。

定理 2.6. *$X,Y\subseteq\Sigma^*$ が正規言語のとき、$X\cup Y$, XY, X^* X^c, も正規言語(よって $X\cap Y$, $X\setminus Y$ もそう)。*

注意 2.7. (1) X,Y を受理する DFA が与えられているとき $X\cup Y,\ldots,X\setminus Y$ を受理する DFA を構成するアルゴリズムが存在する。
(2) 任意の正規言語 $X\subseteq\Sigma^*$ に対し、X を受理する DFA のうち状態数最小のものが(同型を除いて)唯一存在する(X を受理する**最小** *DFA* (*minimal DFA*) という)。DFA が与えられたとき、同じ言語を受理する最小 DFA を求めるアルゴリズムが存在する。

2.2 分割定理への応用

まず $\widehat{\mathsf{Par}} := \{(f_1,f_2,\cdots)\mid f_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\sum_i f_i<\infty\}$ とおく。すると分割と各パートの重複度の列を対応させる全単射

$$\mathsf{Par}\simeq\widehat{\mathsf{Par}}\,;\ \lambda\mapsto(m_1(\lambda),m_2(\lambda),m_3(\lambda),\cdots)$$

ができる。また $\lambda\in\mathsf{Par}$ や $\mathcal{C}\subseteq\mathsf{Par}$ の $\widehat{\mathsf{Par}}$ における像を単に $\widehat{\lambda}$ や $\widehat{\mathcal{C}}$ と書くことにする。

以下、Nandi の予想の場合で説明する。

$\lambda\in\mathcal{N}$ に対応する列を $\widehat{\lambda}=(f_1,f_2,f_3,\ldots)\in\widehat{\mathcal{N}}$ とするとき、各 $k\geq 1$ について (f_{2k-1},f_{2k}) は

$$\pi_0=(0,0),\qquad \pi_1=(0,1),\qquad \pi_2=(0,2),\qquad \pi_3=(1,0),\qquad \pi_4=(2,0)$$

のいずれかであることがわかる(詳細は略)。そこで、

$$\widehat{\lambda}=(\underbrace{f_1,f_2}_{\pi_{i_1}},\underbrace{f_3,f_4}_{\pi_{i_2}},\underbrace{f_5,f_6}_{\pi_{i_3}},\ldots) \tag{6}$$

のようにして $\lambda\in\mathcal{N}$ を $\Sigma:=\{0,1,2,3,4\}$ 上の無限文字列 $\vec{i}=(i_1,i_2,i_3,\ldots)$ にエンコードできる。このとき

$$\lambda=\pi^{\bullet}(\vec{i})=\pi^{\bullet}(i_1,i_2,i_3,\ldots),\qquad \mathsf{code}\,\lambda=\vec{i}=(i_1,i_2,i_3,\ldots) \tag{7}$$

とここでは書くことにする。

(N1)-(N6) と (5) の条件をさらに翻訳すると、

$$\begin{aligned}\lambda\in\mathcal{N} &\iff (i_1,i_2,\ldots)\text{ は }X_{\mathcal{N}}\text{ の元を連続部分列に持たない}\\ \lambda\in\mathcal{N}_a\,(a=1,2,3) &\iff (i_1,i_2,\ldots)\text{ は }X_{\mathcal{N}}\text{ の元を連続部分列に持たず、}X_{\mathcal{N}_a}\text{ の元を prefix に持たない}\end{aligned} \tag{8}$$

が言える(ここは単純作業。詳細は [TT19, Tak19] を参照)。ただし $X_{\mathcal{N}},X_{\mathcal{N}_a}\subseteq\Sigma^*$ は

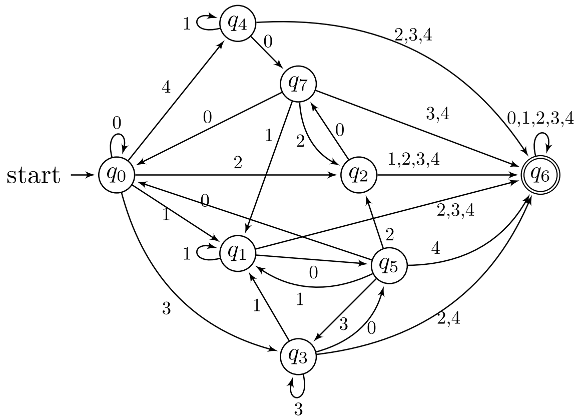
$$X_{\mathcal{N}}=\left\{\begin{matrix}12,13,14,21,22,23,24,32,34,42,43,44,\\104,203,204,304,404\end{matrix}\right\}\cup\{4\}\{1\}^*\{03\},$$
$$X_{\mathcal{N}_1}=\{3,4\},\ X_{\mathcal{N}_2}=\{2,4,04\},\ X_{\mathcal{N}_3}=\{2,3,4,04\}\cup\{1\}^*\{03\}.$$

さらに (8) の右辺の条件の自明な言い換えをするとそれぞれ

$$\forall n\geq 1,\ i_1i_2\cdots i_n\notin\Sigma^*X_{\mathcal{N}}\Sigma^*, \tag{9}$$
$$\forall n\geq 1,\ i_1i_2\cdots i_n\notin\Sigma^*X_{\mathcal{N}}\Sigma^*\cup X_{\mathcal{N}_a}\Sigma^* \tag{10}$$

となる。注意 2.5 と定理 2.6 から、$X_{\mathcal{N}}$ や $X_{\mathcal{N}_a}$ $(a = 1, 2, 3)$ は正規言語であり、よって (9),(10) で "$\notin$" の右側に現れるのも正規言語である。

そこで、正規言語 $\Sigma^* X_{\mathcal{N}} \Sigma^*$ を受理する（最小）DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ を求めてみると下図のようになる。



- $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_7\}$,
- $s = q_0$,
- $F = \{q_6\}$

図において、グラフの頂点 $Q = \{q_0, \ldots, q_7\}$ が状態で、"start" が初期状態 s、二重丸が受理状態 F をそれぞれ表し、また状態間の矢印が状態遷移関数 $\delta \colon Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ を表している。

注意 2.8. 実際には $\mathcal{N}_a$ $(a = 1, 2, 3)$ に関する statement を示したいので、本来は $\Sigma^* X_{\mathcal{N}} \Sigma^* \cup X_{\mathcal{N}_a} \Sigma^*$ を受理する DFA が必要なものである。ところが、実際に求めてみると奇跡的に上図の DFA の「初期状態を変えた」DFA になっている（具体的には $a = 1, 2, 3$ のときそれぞれ初期状態を q_0 から q_7, q_3, q_4 に変えた DFA が $\Sigma^* X_{\mathcal{N}} \Sigma^* \cup X_{\mathcal{N}_a} \Sigma^*$ を受理する)。

論理的にはこのような「奇跡」が起こらなくてもそれぞれの母関数の q 差分方程式を求めることはできるが（それぞれ DFA を求めて以下でする議論をそれぞれに行えばいい)、実際の例（既知の Rogers–Ramanujan 型分割定理）ではこのような「奇跡」(1 つの DFA の初期状態を変えたものが分割定理に現れる "companions" に対応し、したがって以下 (13) で見るようにそれらの母関数が一つの連立差分方程式の中に現れる）が起こるのが普通である。

さて、オートマトンが受理する言語の定義を思い出すと条件 (9) は

$$q_0 \text{ からスタートして入力 } (i_1, i_2, \ldots) \text{ に従って状態を遷移していくとき、受理状態 } F \text{ に入ることはない} \tag{11}$$

と同値である（また注意 2.8 より条件 (10) は (11) で q_0 を q_7, q_3, q_4 で置き換えたものと同値)。そこで $r \in Q \setminus F$ に対して

$$S_r := \left\{ (i_1, i_2, \ldots) \in \Sigma^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \begin{array}{l} r \text{ からスタートして入力 } (i_1, i_2, \ldots) \text{ に従って状態を遷} \\ \text{移していくとき、受理状態 } F \text{ に入ることはない} \end{array} \right\}$$

と書くと、明らかに "漸化式"

$$\begin{aligned} S_r &= \bigsqcup_{\substack{i \in \Sigma \\ \delta(r,i) \notin F}} \left\{ (i, i_2, i_3, \ldots) \;\middle|\; \begin{array}{l} \delta(r, i) \text{ からスタートして入力 } (i_2, i_3, \ldots) \text{ に従って状態} \\ \text{を遷移していくとき、受理状態 } F \text{ に入ることはない} \end{array} \right\} \\ &= \bigsqcup_{\substack{i \in \Sigma \\ \delta(r,i) \notin F}} i \cdot S_{\delta(r,i)} \end{aligned} \tag{12}$$

$(r \in Q \setminus F)$ が成り立つ。ただし $i \cdot S := \{(i, a, b, \ldots) \mid (a, b, \ldots) \in S\}$ のように書いた。

(7) の対応を思い出して

$$\mathcal{N}^{(r)} := \pi^{\bullet}(S_r) = \{\lambda \mid \mathsf{code}\,\lambda \in S_r\} \quad (\subseteq \mathsf{Par})$$

と書くと $\mathcal{N}^{(q_0)} = \mathcal{N}$ で（また $\mathcal{N}^{(q_7)} = \mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}^{(q_3)} = \mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}^{(q_4)} = \mathcal{N}_3$ ）、"漸化式"(12) に対応して $f_{\mathcal{N}^{(r)}}(x,q)\,(=\sum_{\lambda\in\mathcal{N}^{(r)}} x^{\ell(\lambda)}q^{|\lambda|})$ の（連立）q-差分方程式

$$f_{\mathcal{N}^{(r)}}(x,q) = \sum_{\substack{i\in\Sigma \\ \delta(r,i)\notin F}} x^{\ell(\pi_i)}q^{|\pi_i|}f_{\mathcal{N}^{(\delta(r,i))}}(xq^2,q) \qquad (r\in Q\setminus F)$$

が得られる。今の場合に書き下すと（単に $F_i(x) = f_{\mathcal{N}^{(q_i)}}(x,q)$ と書いて）

$$\begin{pmatrix} F_0(x) \\ F_1(x) \\ F_2(x) \\ F_3(x) \\ F_4(x) \\ F_5(x) \\ F_7(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & xq^2 & x^2q^4 & xq & x^2q^2 & 0 & 0 \\ 0 & xq^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & xq^2 & 0 & xq & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & xq^2 & 0 & 1 \\ 1 & xq^2 & x^2q^4 & xq & 0 & 0 & 0 \\ 1 & xq^2 & x^2q^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0(xq^2) \\ F_1(xq^2) \\ F_2(xq^2) \\ F_3(xq^2) \\ F_4(xq^2) \\ F_5(xq^2) \\ F_7(xq^2) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

となる。今 $F_0(x) = f_{\mathcal{N}}(x,q)$ であり、$F_7(x) = f_{\mathcal{N}_1}(x,q)$, $F_3(x) = f_{\mathcal{N}_2}(x,q)$, $F_4(x) = f_{\mathcal{N}_3}(x,q)$ でもある。(13) の形の方程式が得られたら各 i について $F_i(x)$ 単独の q-差分方程式が得られることと、$F_7(x), F_3(x), F_4(x)$ の場合に実際にその方程式を解けることは [Tak19, TT19] などで説明した通りである（$F_i(x)$ 単独の方程式を得る部分のアルゴリズムは [And74] による)。

注意 2.9. 以上の方法により、一般に分割の集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathsf{Par}$ があったとき

- $m \in \mathbb{Z}_{>0}$,
- Σ: 有限集合 ($\neq \emptyset$)、
- $\{\pi_i \mid i \in \Sigma\} \subseteq \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \lambda_1 \leq m\}$,
- $X, X' \subseteq \Sigma^*$: 正規言語

であって、$\pi^\bullet$ や code を (7) と同様に定めるとき（(6) では 2 つずつ一まとまりと思ったのをここでは m 個ずつまとめて）

$$\lambda \in \mathcal{C} \iff \mathsf{code}\,\lambda \text{ は } X \text{ の元を連続部分列に持たず、} X' \text{ の元を prefix に持たない}$$

となるものがあるならば、$f_{\mathcal{C}}(x,q)$ のみたす q-差分方程式を一つ（アルゴリズムによって）求めることができる。

注意 2.10. 注意 2.9 の条件はリンク分割イデアル [And76, §8] の一般化になっている。実際、禁止パターン X や X' が有限集合である場合がリンク分割イデアルに対応する。

3 $A_2^{(2)}$, レベル $5, 7$ の恒等式

数列 $a_1, a_2, \cdots \in \mathbb{Z}$ が与えられたとき、

$$1 + \sum_{n\geq 1} a_n q^n = \prod_{m\geq 1}(1-q^m)^{b_m} \tag{14}$$

をみたす $b_1, b_2, \cdots \in \mathbb{Z}$ は一意に存在し簡単に求まる（b_1 から順番に決まる)。そこで Andrews–Gordon 型 (3) の和を適当に与えて (14) の右辺の形に展開し、冪に現れる $b_1, b_2, \ldots$ が周期的かを見ることで (4) の形の恒等式の予想を得ることができる。

以下

$$[x;q]_m = (x, q/x; q)_m, \quad [a_1,\cdots,a_k;q]_m = [a_1;q]_m \cdots [a_k;q]_m$$

とおく。以下が [TT20] で与えた恒等式である。

定理 3.1 ([TT20]). $A_2^{(2)}$ のレベル 5 標準加群の主指標 $\chi_{A_2^{(2)}}(5\Lambda_0)$, $\chi_{A_2^{(2)}}(\Lambda_0+2\Lambda_1)$ に関する恒等式

$$\sum_{i,j,k\geq 0}(-1)^k\frac{q^{\binom{i}{2}+8\binom{j}{2}+2\binom{k}{2}+2ij+2ik+4jk+i+5j+k}}{(q;q)_i(q^2;q^2)_j(q^2;q^2)_k}=\frac{1}{[q^2,q^3,q^4,q^5;q^{16}]_\infty},$$
$$\sum_{i,j,k\geq 0}(-1)^k\frac{q^{\binom{i}{2}+8\binom{j}{2}+2\binom{k}{2}+2ij+2ik+4jk+i+7j+3k}}{(q;q)_i(q^2;q^2)_j(q^2;q^2)_k}=\frac{1}{[q,q^4,q^6,q^7;q^{16}]_\infty}.$$

が成り立つ。

定理 3.2 ([TT20]). $A_2^{(2)}$ のレベル 7 標準加群の主指標 $\chi_{A_2^{(2)}}(5\Lambda_0+\Lambda_1)$, $\chi_{A_2^{(2)}}(\Lambda_0+3\Lambda_1)$ に関する恒等式

$$\sum_{i,j,k\geq 0}\frac{q^{\binom{i}{2}+8\binom{j}{2}+10\binom{k}{2}+2ij+2ik+8jk+i+4j+5k}}{(q;q)_i(q^2;q^2)_j(q^2;q^2)_k}=\frac{1}{[q,q^3,q^4,q^5,q^7,q^9;q^{20}]_\infty},$$
$$\sum_{i,j,k\geq 0}\frac{q^{\binom{i}{2}+8\binom{j}{2}+10\binom{k}{2}+2ij+2ik+8jk+i+8j+9k}}{(q;q)_i(q^2;q^2)_j(q^2;q^2)_k}=\frac{1}{[q,q^3,q^5,q^7,q^8,q^9;q^{20}]_\infty}.$$

が成り立つ。

定理 3.3 ([TT20]). $A_2^{(2)}$ のレベル 7 標準加群の主指標 $\chi_{A_2^{(2)}}(7\Lambda_0)$, $\chi_{A_2^{(2)}}(3\Lambda_0+2\Lambda_1)$ に関する恒等式

$$\sum_{i,j,k,\ell\geq 0}(-1)^k\frac{q^{\binom{i}{2}+2\binom{j}{2}+2\binom{k}{2}+8\binom{\ell}{2}+ij+ik+2i\ell+4jk+4j\ell+4k\ell+i+3j+k+6\ell}}{(q;q)_i(q^2;q^2)_j(q^2;q^2)_k(q^4;q^4)_l}=\frac{1}{[q^2,q^3,q^4,q^5,q^6,q^7;q^{20}]_\infty},$$
$$\sum_{i,j,k,\ell\geq 0}(-1)^k\frac{q^{\binom{i}{2}+2\binom{j}{2}+2\binom{k}{2}+8\binom{\ell}{2}+ij+ik+2i\ell+4jk+4j\ell+4k\ell+i+2j+4k+8\ell}}{(q;q)_i(q^2;q^2)_j(q^2;q^2)_k(q^4;q^4)_l}=\frac{1}{[q,q^2,q^5,q^6,q^8,q^9;q^{20}]_\infty}.$$

が成り立つ。

定理 3.1,3.3 の証明では左辺を変形して Slater [Sla52] の恒等式に帰着させる：

$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^{2n^2}}{(q;q)_{2n}}=\frac{1}{[q^2,q^3,q^4,q^5;q^{16}]_\infty},\qquad \text{[Sla52, (39)=(83)]}$$
$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^{2n^2+2n}}{(q;q)_{2n+1}}=\frac{1}{[q,q^4,q^6,q^7;q^{16}]_\infty},\qquad \text{[Sla52, (38)=(86)]}$$
$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_{2n}}=\frac{1}{[q^2,q^3,q^4,q^5,q^6,q^7;q^{20}]_\infty},\qquad \text{[Sla52, (99)]}$$
$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_{2n+1}}=\frac{1}{[q,q^2,q^5,q^6,q^8,q^9;q^{20}]_\infty}.\qquad \text{[Sla52, (94)]}$$

同様に定理 3.2 は左辺を変形して Rogers–Ramanujan 恒等式 (1) に帰着させて証明する。

4 $A_{13}^{(2)}$, レベル 2 の予想

$A_{奇数}^{(2)}$ のレベル 2 は Big Picture の文脈でよく研究されている。実際 $A_9^{(2)}$ まででは対応する分割定理が知られており、また $A_{11}^{(2)}$ のレベル 2 標準加群の主指標（の一部）は $A_2^{(2)}$ のレベル 4 (= 定理 2.2) のものと一致する。([Tak19] や [KR19, §1.1] を参照）

$A_{13}^{(2)}$ 以降については何も知られていなかったが、$A_{13}^{(2)}$（の一部）に関して §3 と同様の方法で以下の予想が見つかった。

まず、$A_{13}^{(2)}$ のレベル 2 主指標は

$$\chi_{A_{13}^{(2)}}((\delta_{i0}+\delta_{i1})\Lambda_0+\Lambda_i)=\frac{(q^{16};q^{16})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\frac{[q^{2i};q^{16}]_\infty}{[q^i;q^{16}]_\infty}\qquad(0\le i\le 7)$$

で与えられる。ただし δ は Kronecker delta.

予想 4.1 ([TT20])**.** $F_1(2,2,2)=\chi_{A_{13}^{(2)}}(\Lambda_3)$, $F_1(4,2,6)=\chi_{A_{13}^{(2)}}(\Lambda_5)$, $F_1(6,4,6)=\chi_{A_{13}^{(2)}}(\Lambda_7)$. ただし

$$F_1(a,b,c):=\sum_{i,j,k\ge 0}(-1)^k\frac{q^{4\binom{i}{2}+2\binom{j}{2}+4\binom{k}{2}+2ij+4ik+4jk+ai+bj+ck}}{(q;q)_i(q^2;q^2)_j(q^4;q^4)_k}.$$

予想 4.2 ([TT20])**.** $F_2(1,3,12)=\chi_{A_{13}^{(2)}}(\Lambda_0+\Lambda_1)$, $F_2(1,1,8)=\chi_{A_{13}^{(2)}}(\Lambda_3)$, $F_2(3,3,16)=\chi_{A_{13}^{(2)}}(\Lambda_7)$. ただし

$$F_2(a,b,c):=\sum_{i,j,k\ge 0}(-1)^j\frac{q^{\binom{i}{2}+2\binom{j}{2}+16\binom{k}{2}+2ij+4ik+4jk+ai+bj+ck}}{(q;q)_i(q^2;q^2)_j(q^4;q^4)_k}.$$

予想 4.3 ([TT20])**.** $F_3(1,5,1,12)=\chi_{A_{13}^{(2)}}(\Lambda_5)$. ただし

$$F_3(a,b,c,d):=\sum_{i,j,k,\ell\ge 0}(-1)^k\frac{q^{2\binom{i}{2}+4\binom{j}{2}+2\binom{k}{2}+16\binom{\ell}{2}+2ij+2ik+4i\ell+4jk+8j\ell+4k\ell+ai+bj+ck+d\ell}}{(q;q)_i(q^2;q^2)_j(q^2;q^2)_k(q^4;q^4)_\ell}.$$

注意 4.4. オリジナルの Andrews–Gordon 和にはきれいな再帰的な構造がある（(2) の左辺の和で $n_1=0$ または $n_{k-1}=0$ の部分だけを取り出すと k が一つ小さいところでの式になっている）。

上で述べた予想 4.1-4.3 を含めた $A_{\text{奇数}}^{(2)}$ のレベル 2 や、$A_2^{(2)}$ のレベル $\ell\ge 2$ の Andrews–Gordon 型の和たちの間にも一部には似たような現象が見られる（が一般にはよくわからない）。“Big Picture” で期待される一般の恒等式でもそうだろうか？

参考文献

[And74] George E. Andrews, *A general theory of identities of the Rogers-Ramanujan type*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 1033–1052. MR387178

[And76] ———, *The theory of partitions*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2. MR0557013

[And86] ———, *q-series: their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 66, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986. MR858826

[And94] ———, *Schur's theorem, Capparelli's conjecture and q-trinomial coefficients*, The Rademacher legacy to mathematics (University Park, PA, 1992), 1994, pp. 141–154. MR1284057

[Cap04] S. Capparelli, *On some theorems of Hirschhorn*, Comm. Algebra **32** (2004), no. 2, 629–635. MR2101829

[Cap93] Stefano Capparelli, *On some representations of twisted affine Lie algebras and combinatorial identities*, J. Algebra **154** (1993), no. 2, 335–355. MR1206124

[Cap96] ———, *A construction of the level 3 modules for the affine Lie algebra $A_2^{(2)}$ and a new combinatorial identity of the Rogers-Ramanujan type*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 2, 481–501. MR1333389

[Hir79] M. D. Hirschhorn, *Some partition theorems of the Rogers-Ramanujan type*, J. Combin. Theory Ser. A **27** (1979), no. 1, 33–37. MR541341

[Koz97] Dexter C. Kozen, *Automata and computability*, Undergraduate Texts in Computer Science, Springer-Verlag, New York, 1997. MR1633052

[KR19] Shashank Kanade and Matthew C. Russell, *Staircases to analytic sum-sides for many new integer partition identities of Rogers-Ramanujan type*, Electron. J. Combin. **26** (2019), no. 1, Paper 1.6, 33. MR3904822

[KR] Shashank Kanade and Matthew Russell, *On q-series for principal characters of standard $a_2^{(2)}$-modules.* arXiv:2010.01008.

[LM78] J. Lepowsky and S. Milne, *Lie algebraic approaches to classical partition identities*, Adv. in Math. **29** (1978), no. 1, 15–59. MR501091

[LW81] James Lepowsky and Robert Lee Wilson, *A new family of algebras underlying the Rogers-Ramanujan identities and generalizations*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **78** (1981), no. 12, part 1, 7254–7258. MR638674

[LW82] ———, *A Lie theoretic interpretation and proof of the Rogers-Ramanujan identities*, Adv. in Math. **45** (1982), no. 1, 21–72. MR663415

[LW84] ———, *The structure of standard modules. I. Universal algebras and the Rogers-Ramanujan identities*, Invent. Math. **77** (1984), no. 2, 199–290. MR752821

[MS08] James McLaughlin and Andrew V. Sills, *Ramanujan-Slater type identities related to the moduli 18 and 24*, J. Math. Anal. Appl. **344** (2008), no. 2, 765–777. MR2426307

[Nan14] Debajyoti Nandi, *Partition identities arising from the standard $A_2^{(2)}$-modules of level 4*, Ph.D. Thesis, 2014.

[Sil18] Andrew V. Sills, *An invitation to the Rogers-Ramanujan identities*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2018. With a foreword by George E. Andrews. MR3752624

[Sip13] Michael Sipser, *Introduction to the theory of computation*, 3rd ed., Course Technology, Boston, MA, 2013.

[Sla52] L. J. Slater, *Further identities of the Rogers-Ramanujan type*, Proc. London Math. Soc. (2) **54** (1952), 147–167. MR0049225

[Tak19] Motoki Takigiku, *Nandi の予想の証明*, RIMS 講究録 (2161), 2019, pp. 107–117.

[TT19] Motoki Takigiku and Shunsuke Tsuchioka, *A proof of conjectured partition identities of Nandi*, 2019. arXiv:1910.12461.

[TT20] ———, *Andrews-Gordon type series for the level 5 and 7 standard modules of the affine Lie algebra $A_2^{(2)}$*, 2020. arXiv:2006.02630.

[TX95] Manvendra Tamba and Chuan Fu Xie, *Level three standard modules for $A_2^{(2)}$ and combinatorial identities*, J. Pure Appl. Algebra **105** (1995), no. 1, 53–92. MR1364151