Intermediate Symplectic Characters and Applications

名古屋大学多元数理科学研究科
岡田 聡一
Soichi Okada
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

1 はじめに

中間斜交指標 (intermediate symplectic character) は，Proctor [16] によってある種の半標準盤の母関数として導入された Laurent 多項式であり，Schur 関数（一般線型群の既約指標），斜交指標（斜交群の既約指標）を特別な場合として含んでいる．さらに，一般線型群と斜交群の中間に位置する中間斜交群 (intermediate symplectic group) のある種の直既約表現の指標ともなっている．本稿では，中間斜交指標の Jacobi–Trudi 型行列式としての表示，行列式の比としての表示を与え，その応用を紹介する．詳細は，[13], [14] を参照されたい．

複素数体上の斜交群 (symplectic group) $\mathbf{Sp}_{2n} = \mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ は，偶数次元の線型空間 $\mathbb{C}^{2n}$ 上の非退化な交代双線型形式を不変にする線型変換全体のなす一般線型群 $\mathbf{GL}_{2n} = \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ の部分群であった．Proctor [16] は，非退化とは限らない交代双線型形式を不変にする群として中間斜交群を導入した．非負整数 k, n（ただし $0 \le k \le n$）が与えられたとき，$e_1, e_{\overline{1}}, e_2, e_{\overline{2}}, \dots, e_k, e_{\overline{k}}, e_{k+1}, \dots, e_n$ を基底とする $(n+k)$ 次元線型空間を $V = \mathbb{C}^{n+k}$ とし，$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ を

$$\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \begin{cases} 1 & （\alpha = i,\ \beta = \overline{i} \text{ のとき}）, \\ -1 & （\alpha = \overline{i},\ \beta = i \text{ のとき}）, \\ 0 & （\text{その他}） \end{cases}$$

で定まる交代双線型形式とする．このとき，**$(k, n-k)$ 中間斜交群** $\mathbf{Sp}_{2k,n-k}$ は

$$\mathbf{Sp}_{2k,n-k} = \{ g \in \mathbf{GL}_{n+k} : \text{任意の } v,\ w \in V \text{ に対して } \langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle \}$$

によって定義される．$k = 0$ のとき，$\langle\ ,\ \rangle$ は恒等的に 0 であり，$\mathbf{Sp}_{0,n} = \mathbf{GL}_n$ である．一方，$k = n$ のとき，$\langle\ ,\ \rangle$ は非退化であり，$\mathbf{Sp}_{2n,0} = \mathbf{Sp}_{2n}$ である．また，$k = n-1$ のときの $\mathbf{Sp}_{2n-2,1}$ は**奇数次斜交群** (odd symplectic group) と呼ばれる．$k = 0, n$ のときを除いて $\mathbf{Sp}_{2k,n-k}$ は簡約群でないことに注意する．Proctor [16] は，$\mathbf{Sp}_{2k,n-k}$ のある種の直既約表現の指標を記述するために，次の定義 1.1 のように中間斜交盤と中間斜交指標を導入した．

非負整数の広義単調減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ で $\sum_{i\ge1}\lambda_i < \infty$ となるものを分割という．分割 λ に対して，$|\lambda| = \sum_{i\ge1}\lambda_i$, $l(\lambda) = \#\{i : \lambda_i > 0\}$ とおき，それぞれ λ の大きさ，長さと呼ぶ．また，分割 λ の Young 図形 $D(\lambda)$ を

$$D(\lambda) = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \le i \le l(\lambda),\ 1 \le j \le \lambda_i\}$$

によって定義し，格子点の代わりに単位正方形を置いて図示する．

定義 1.1. k, n を $0 \le k \le n$ となる非負整数とし，λ を長さ n 以下の分割とする．

(a) λ を枠とする $\boldsymbol{(k, n-k)}$ **中間斜交盤** ($(k, n-k)$-intermediate symplectic tableau) とは，λ の Young 図形 $D(\lambda)$ の各正方形に全順序集合

$$\Gamma_{k,n-k} = \{1 < \overline{1} < 2 < \overline{2} < \cdots < k < \overline{k} < k+1 < k+2 < \cdots < n\}$$

の元を 1 つずつ書き込んで次の 3 つの条件をみたすようにしたもののことである：

(i) 各行の成分は（左から右に）広義単調増加である．

(ii) 各列の成分は（上から下に）狭義単調増加である．

(iii) 第 i 行の成分は i 以上である．

(b) λ を枠とする $(k, n-k)$ 中間斜交盤全体のなす集合を $\mathrm{Tab}^{(k,n-k)}(\lambda)$ と表す．

(c) $(k, n-k)$ 中間斜交盤 $T \in \mathrm{Tab}^{(k,n-k)}(\lambda)$ が与えられたとき，文字 $\gamma \in \Gamma_{k,n-k}$ が T に現れる回数を $m_T(\gamma)$ と表し，変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ に関する単項式 $\boldsymbol{x}^T$ を

$$\boldsymbol{x}^T = \prod_{i=1}^{k} x_i^{m_T(i) - m_T(\overline{i})} \prod_{i=k+1}^{n} x_i^{m_T(i)}$$

とおいて定義する．そして，λ を枠とする $(k, n-k)$ 中間斜交盤の母関数を

$$\mathrm{sp}_\lambda^{(k,n-k)}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{sp}_\lambda^{(k,n-k)}(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) = \sum_{T \in \mathrm{Tab}^{(k,n-k)}(\lambda)} \boldsymbol{x}^T$$

と表し，λ に対応する $\boldsymbol{(k, n-k)}$ **中間斜交指標** ($(k, n-k)$-intermediate symplectic character) と呼ぶ．また，$k = n-1$ のときの $\mathrm{sp}_\lambda^{(n-1,1)}(\boldsymbol{x})$ を**奇数次斜交指標** (odd symplectic character) と呼ぶ．

例えば，

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \overline{1} & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & \overline{2} & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 3 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} 4 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

は $(4,3,1,1)$ を枠とする $(2,2)$ 中間斜交盤であり，$\boldsymbol{x}^T = x_1^{-1}x_2x_3^3x_4^2$ である．$k=0$ のとき，$(0,n)$ 中間斜交盤は通常の半標準盤であり，$\mathrm{sp}_\lambda^{(0,n)}(\boldsymbol{x})$ は Schur 関数 $s_\lambda(\boldsymbol{x})$（一般線型群 $\mathbf{GL}_n$ の λ に対応する既約指標）に一致する．一方，$k = n$ のとき，$(n,0)$ 中間斜交盤は King [7] の斜交半標準盤であり，$\mathrm{sp}_\lambda^{(n,0)}(\boldsymbol{x})$ は斜交群 $\mathbf{Sp}_{2n}$ の λ に対応する既約指標 $\mathrm{sp}_\lambda(\boldsymbol{x})$ に一致する．一般の場合は，次のように中間斜交群の直既約表現の指標となっている．

定理 1.2. (Proctor [16, Theorem 2.1]) λ を長さ $n+k$ 以下の分割とし，$d=|\lambda|$ とおく．V^λ を $V=\mathbb{C}^{n+k}$ の d 階テンソル積 $V^{\otimes d}$ に含まれる既約な $\mathbf{GL}_{n+k}$ 部分加群で λ に対応するものし，$\mathbf{Sp}_{2k,n-k}$ を定義する V 上の交代双線型形式 $\langle\ ,\ \rangle$ から引き起こされる縮約 $C_{i,j}: V^{\otimes d}\to V^{\otimes(d-2)}$ $(1\le i,j\le d,\ i\ne j)$ を用いて，

$$V_0^\lambda = V^\lambda \cap \bigcap_{i\ne j} \operatorname{Ker} C_{i,j}$$

と定義する．このとき，

(a) $l(\lambda)>n$ のとき，$V_0^\lambda=\{0\}$.

(b) $l(\lambda)\le n$ のとき，V_0^λ は直既約 $\mathbf{Sp}_{2k,n-k}$ 加群である．

(c) $l(\lambda)\le n$ のとき，V_0^λ は $\mathrm{Tab}^{(k,n-k)}(\lambda)$ でパラメトライズされるウェイト基底をもち，その指標は $\mathrm{sp}^{(k,n-k)}(x_1,\dots,x_k|x_{k+1},\dots,x_n)$ で与えられる．

中間斜交指標の特別な場合である Schur 関数，斜交指標は次のように行列式を用いて表される：

$$s_\lambda(x_1,\dots,x_n) = \det\Big(h_{\lambda_i-i+j}(x_1,\dots,x_n)\Big)_{1\le i,j\le n} \tag{1}$$

$$= \frac{\det\Big(x_i^{\lambda_j+n-j}\Big)_{1\le i,j\le n}}{\det\Big(x_i^{n-j}\Big)_{1\le i,j\le n}}, \tag{2}$$

$$\mathrm{sp}_\lambda(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{2}\det\Big(h_{\lambda_i-i+j}(x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1}) + h_{\lambda_i-i-j+2}(x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1})\Big)_{1\le i,j\le n} \tag{3}$$

$$= \frac{\det\Big(x_i^{\lambda_j+n-j+1}-x_i^{-(\lambda_j+n-j+1)}\Big)_{1\le i,j\le n}}{\det\Big(x_i^{n-j+1}-x_i^{-(n-j+1)}\Big)_{1\le i,j\le n}}. \tag{4}$$

ここで，$h_r(x_1,\dots,x_n)$ は変数 $x_1,\dots,x_n$ に関する r 次完全対称式，$h_r(x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1})$ は変数 $x_1,x_1^{-1},\dots,x_n,x_n^{-1}$ に関する r 次完全対称式である．さらに，(2), (4) の分母の行列式は，それぞれ

$$\det\Big(x_i^{n-j}\Big)_{1\le i,j\le n} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j),$$

$$\det\Big(x_i^{n-j+1}-x_i^{-(n-j+1)}\Big)_{1\le i,j\le n} = \prod_{i=1}^n\left(x_i-x_i^{-1}\right)\prod_{1\le i<j\le n}\left(x_i^{1/2}x_j^{1/2}-x_i^{-1/2}x_j^{-1/2}\right)\left(x_i^{1/2}x_j^{-1/2}-x_i^{-1/2}x_j^{1/2}\right)$$

と因数分解される．本稿の目的の 1 つはこれらの行列式表示を中間斜交指標に拡張することである．

本稿の構成は以下の通りである．第 2 節では，中間斜交指標に対する Jacobi–Trudi 型行列式表示（(1), (3) の拡張），Weyl 型行列式表示（(2), (4) の拡張）を与える．第 3 節では，Weyl 型行列式表示と Cauchy–Binet の公式を利用して，奇数次斜交指標の積の和に対する Brent–Krattenthaler–Warnaar の公式を証明する．さらに，第 4 節では，Weyl 型行列式表示と石川–若山の小行列式の和公式を利用して中間斜交指標の和に関する公式を証明し，変形平面分割の数え上げ問題に応用する．

2 Jacobi–Trudi 型行列式表示と Weyl 型行列式表示

この節では，Schur 関数，斜交指標に対する Jacobi–Trudi 型公式 (1), (3)，Weyl 型公式 (2), (4) の，中間斜交指標への拡張を与える．

まず，中間斜交指標は完全対称式を用いた行列式として次のように表される．

命題 2.1. 長さ n 以下の分割 λ に対して，

$$\begin{cases} h_{\lambda_i-i+1}(x_1^{\pm1},\dots,x_k^{\pm1},x_{k+1},\dots,x_n) & (j=1\text{ のとき}), \\ h_{\lambda_i-i+j}(x_1^{\pm1},\dots,x_k^{\pm1},x_{k+1},\dots,x_n) & \\ \quad +h_{\lambda_i-i-j+2}(x_1^{\pm1},\dots,x_k^{\pm1},x_{k+1},\dots,x_n) & (2\le j\le k\text{ のとき}), \\ h_{\lambda_i-i+j}(x_{k+1},\dots,x_n) & (k+1\le j\le n\text{ のとき}) \end{cases}$$

を (i,j) 成分とする n 次正方行列を $H_\lambda^{(k,n-k)}$ とする．ここで，変数 $x_1,x_1^{-1},\dots,x_k,x_k^{-1},x_{k+1},\dots,x_n$ に関する r 次完全対称式を $h_r(x_1^{\pm1},\dots,x_k^{\pm1},x_{k+1},\dots,x_n)$ と表している．このとき，

$$\mathrm{sp}^{(k,n-k)}(x_1,\dots,x_k|x_{k+1},\dots,x_n)=\det H_\lambda^{(k,n-k)}. \tag{5}$$

この命題で $k=0$, $k=n$ の場合を考えると，Schur 関数，斜交指標に対する Jacobi–Trudi 型公式 (1), (3) が得られる．

証明. まず，中間斜交盤を非交差格子経路に書き換え，Lindström–Gessel–Viennot の補題を用いると，

$$\begin{aligned}&\mathrm{sp}_\lambda^{(k,n-k)}(x_1,\dots,x_k|x_{k+1},\dots,x_n)\\ &\quad=\det\left(\begin{cases} h_{\lambda_i-i+j}(x_j^{\pm1},\dots,x_k^{\pm1},x_{k+1},\dots,x_n) & (1\le j\le k\text{ のとき}) \\ h_{\lambda_i-i+j}(x_j,\dots,x_n) & (k+1\le j\le n\text{ のとき}) \end{cases}\right)_{1\le i,j\le n}\end{aligned}$$

となることが示される．次に，この行列式において，関係式

$$h_r(x_{j+1},\dots,x_n)+x_jh_{r-1}(x_j,\dots,x_n)=h_r(x_j,\dots,x_n),$$
$$\begin{aligned}&h_r(x_{j+1}^{\pm1},\dots,x_k^{\pm1},x_{k+1},\dots,x_n)+(x_j+x_j^{-1})h_{r-1}(x_j^{\pm1},\dots,x_k^{\pm1},x_{k+1},\dots,x_n)\\ &\quad=h_r(x_j^{\pm1},\dots,x_k^{\pm1},x_{k+1},\dots,x_n)+h_{r-2}(x_j^{\pm1},\dots,x_k^{\pm1},x_{k+1},\dots,x_n)\end{aligned}$$

を用いて列の基本変形を行うと，(5) の形の行列式表示が得られる． □

長さ $k+1$ 以下の分割 λ に限定すれば，中間斜交指標 $\mathrm{sp}_\lambda^{(k,n-k)}$ は斜交指標と全く同じ形の行列式で表され，Cauchy 型公式も成り立つ．

命題 2.2. 長さ $k+1$ 以下の分割 λ に対して，

$$\begin{aligned}&\mathrm{sp}_\lambda^{(k,n-k)}(x_1,\dots,x_k|x_{k+1},\dots,x_n)\\ &\quad=\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} h_{\lambda_i-i+j}(x_1^{\pm1},\dots,x_k^{\pm1},x_{k+1},\dots,x_n) \\ \quad+h_{\lambda_i-i-j+2}(x_1^{\pm1},\dots,x_k^{\pm1},x_{k+1},\dots,x_n)\end{pmatrix}_{1\le i,j\le l(\lambda)}\end{aligned} \tag{6}$$

$$= \det \begin{pmatrix} e_{{}^t\lambda_i - i + j}(x_1^{\pm 1}, \dots, x_k^{\pm 1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ \quad - e_{{}^t\lambda_i - i - j}(x_1^{\pm 1}, \dots, x_k^{\pm 1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \end{pmatrix}_{1 \le i,j \le l({}^t\lambda)}. \tag{7}$$

ここで，${}^t\lambda$ は分割 λ の共役分割であり，$e_r(x_1^{\pm 1}, \dots, x_k^{\pm 1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ は変数 $x_1, x^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ に関する r 次基本対称式である．さらに，

$$\sum_\lambda \mathrm{sp}^{(k,n-k)}(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) s_\lambda(u_1, \dots, u_{k+1})$$
$$= \frac{\prod_{1 \le i < j \le k+1}(1 - u_i u_j)}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{k+1}(1 - x_i u_j)(1 - x_i^{-1} u_j) \prod_{i=k+1}^n \prod_{j=1}^{k+1}(1 - x_i u_j)}.$$

ここで，λ は長さ $k+1$ 以下の分割全体を動く．

証明． まず，(6) は命題 2.1 と同様にして証明できる．よって，普遍斜交指標と呼ばれる対称関数

$$s_{\langle\lambda\rangle}(X) = \frac{1}{2} \det \left(h_{\lambda_i - i + j}(X) + h_{\lambda_i - i - j + 2}(X) \right)_{1 \le i,j \le l(\lambda)}$$

（ここで，$h_r(X)$ は r 次完全対称関数である）を考えると，

$$\mathrm{sp}_\lambda^{(k,n-k)}(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) = s_{\langle\lambda\rangle}(x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, 0, \dots)$$

と表されるから，残りの主張は普遍斜交指標の対応する公式（例えば [12, 命題 12.3，系 12.6] を見よ）から従う． □

次に，命題 2.1 の Jacobi–Trudi 型行列式表示 (5) を用いると，中間斜交指標を行列式の比として表す Weyl 型の公式が得られる．

命題 2.3. 長さ n 以下の分割 λ に対して，

$$\begin{cases} h_{\lambda_i+k-i+1}(x_j, x_{k+1}, \dots, x_n) - h_{\lambda_i+k-i+1}(x_j^{-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) & (1 \le j \le k \text{ のとき})\text{，} \\ x_j^{\lambda_i+n-i} & (k+1 \le j \le n \text{ のとき}) \end{cases}$$

を (i,j) 成分とする n 次正方行列を $A_\lambda^{(k,n-k)} = A_\lambda^{(k,n-k)}(\boldsymbol{x})$ とする．このとき，

$$\mathrm{sp}_\lambda^{(k,n-k)}(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) = \frac{\det A_\lambda^{(k,n-k)}}{\det A_\emptyset^{(k,n-k)}} \tag{8}$$

（ただし $\emptyset = (0, 0, \dots, 0)$）であり，

$$\det A_\emptyset^{(k,n-k)} = \prod_{i=1}^k \left(x_i - x_i^{-1}\right) \prod_{1 \le i < j \le k} \left(x_i^{1/2} x_j^{1/2} - x_i^{-1/2} x_j^{-1/2}\right)\left(x_i^{1/2} x_j^{-1/2} - x_i^{-1/2} x_j^{1/2}\right)$$
$$\times \prod_{k+1 \le i < j \le n} \left(x_i - x_j\right). \tag{9}$$

この命題で $k = 0$, $k = n$ の場合を考えると，Schur 関数，斜交指標に対する Weyl 型公式 (2), (4) が得られる．

証明. 証明のアイデアは，[10, p.41] で与えられている Schur 関数の場合と同じである．

$$\begin{cases} (-1)^{k-i} e_{k-i}(x_1^{\pm 1}, \dots, x_{j-1}^{\pm 1}, x_{j+1}^{\pm 1}, \dots, x_k^{\pm 1}) \cdot (x_j - x_j^{-1}) & (1 \le i, j \le k \text{ のとき}), \\ (-1)^{n-k-i} e_{n-k-i}(x_{k+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) & (k+1 \le i, j \le n \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を (i,j) 成分とする n 次正方行列を $M^{(k,n-k)}$ とすると，

$$H_\lambda^{(k,n-k)} M^{(k,n-k)} = A_\lambda^{(k,n-k)}$$

となることが示される．ここで，$\lambda = \emptyset$ の場合を考えると，$H_\emptyset^{(k,n-k)}$ は対角成分が 1 の上三角行列だから，

$$\det M^{(k,n-k)} = \det A_\emptyset^{(k,n-k)}$$

であり，特に

$$\det M^{(0,n)} = \det \left(x_j^{n-i} \right)_{1 \le i,j \le n}, \quad \det M^{(n,0)} = \det \left(x_j^{n-i+1} - x_j^{-(n-i+1)} \right)_{1 \le i,j \le n}.$$

よって，$\det A_\emptyset^{(k,n-k)} = \det \begin{pmatrix} M^{(k,0)} & O \\ O & M^{(0,n-k)} \end{pmatrix}$ が (9) で与えられることがわかる．また，Jacobi–Trudi 型行列式 (5) を用いると，

$$\mathrm{sp}_\lambda^{(k,n-k)}(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) = \det H_\lambda^{(k,n-k)} = \frac{\det A_\lambda^{(k,n-k)}}{\det M^{(k,n-k)}} = \frac{\det A_\lambda^{(k,n-k)}}{\det A_\emptyset^{(k,n-k)}}$$

となる． □

以下の応用では，次の形に変形しておくと都合が良い．

定理 2.4. 長さ n 以下の分割 λ に対して，

$$\begin{cases} \dfrac{x_j^{\lambda_i+k-i+1}}{\prod_{l=k+1}^n (1 - x_j^{-1} x_l)} - \dfrac{x_j^{-(\lambda_i+k-i+1)}}{\prod_{l=k+1}^n (1 - x_j x_l)} & (1 \le j \le k \text{ のとき}), \\ x_j^{\lambda_i+n-i} & (k+1 \le j \le n \text{ のとき}) \end{cases}$$

を (i,j) 成分とする n 次正方行列を $B_\lambda^{(k,n-k)} = B_\lambda^{(k,n-k)}(\boldsymbol{x})$ とする．このとき，

$$\mathrm{sp}_\lambda^{(k,n-k)}(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) = \frac{\det B_\lambda^{(k,n-k)}}{\det B_\emptyset^{(k,n-k)}} \tag{10}$$

であり，

$$\begin{aligned} \det B_\emptyset^{(k,n-k)} = \prod_{i=1}^k \left(x_i - x_i^{-1} \right) \prod_{1 \le i < j \le k} \left(x_i^{1/2} x_j^{1/2} - x_i^{-1/2} x_j^{-1/2} \right) \left(x_i^{1/2} x_j^{-1/2} - x_i^{-1/2} x_j^{1/2} \right) \\ \times \prod_{k+1 \le i < j \le n} \left(x_i - x_j \right). \end{aligned} \tag{11}$$

証明. 母関数の部分分数展開を考えることにより，

$$\begin{aligned}
&h_{r-n+k+1}(x_j, x_{k+1}, \dots, x_n) - h_{r-n+k+1}(x_j^{-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \\
&\quad = -\sum_{p=k+1}^{n} \left\{ \frac{x_j^{-1}}{1 - x_j^{-1} x_p} - \frac{x_j}{1 - x_j x_p} \right\} \frac{1}{\prod_{k+1 \le q \le n,\, q \ne p} (x_p - x_q)} x_p^{r+1} \\
&\qquad + \frac{x_j^{r-n+k+1}}{\prod_{p=k+1}^{n} (1 - x_j^{-1} x_p)} - \frac{x_j^{-(r-n+k+1)}}{\prod_{p=k+1}^{n} (1 - x_j x_p)}.
\end{aligned}$$

この関係式を用いて列の基本変形を命題 2.3 の行列 $A_\lambda^{(k,n-k)}$ に施すと，$\det A_\lambda^{(k,n-k)} = \det B_\lambda^{(k,n-k)}$ となることがわかる． □

次の補題は命題 2.3 を用いて証明できるが，第 3 節，第 4 節での証明を特別な場合に帰着するのに用いられる．

補題 2.5. $0 < k \le n$ とし，r を非負整数とする．$\lambda_1 \le r$, $l(\lambda) \le n$ となる分割 λ に対して，$x_1^r \operatorname{sp}_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}^{(k,n-k)}(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n)$ は x_1 に関する多項式であり，

$$\begin{aligned}
&\left[x_1^r \operatorname{sp}_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}^{(k,n-k)}(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) \right] \Big|_{x_1 = 0} \\
&\quad = \begin{cases} \operatorname{sp}_{(\lambda_2,\dots,\lambda_n)}^{(k-1,n-k)}(x_2, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) & (\lambda_1 = r \text{ のとき}), \\ 0 & (\lambda_1 < r \text{ のとき}). \end{cases}
\end{aligned}$$

ここで，$f|_{x_1=0}$ は f において $x_1 = 0$ を代入したものを表す．

3 Brent–Krattenthaler–Warnaar の等式

この節では，Weyl 型行列式表示（定理 2.4）を利用して，奇数次斜交指標に対する Brent–Krattenthaler–Warnaar の等式（定理 3.1）に代数的な別証明を与える．

非負整数 r, n に対して，$\lambda_1 \le r$, $l(\lambda) \le n$ をみたす分割 λ（つまり，Young 図形 $D(\lambda)$ が $r \times n$ の長方形 $D((r^n))$ に含まれる分割 λ）全体のなす集合を $\mathcal{P}((r^n))$ と表す．

定理 3.1. (Brent–Krattenthaler–Warnaar [9]) m, n を正整数とし，$m \le n$ であるとする．非負整数 r に対して，

$$\begin{aligned}
&\sum_{\lambda \in \mathcal{P}((r^{n+1}))} z^{-r} \operatorname{sp}_\lambda^{(m,1)}(x_1, \dots, x_m | z) \operatorname{sp}_{(r^{n-m}) \cup \lambda}^{(n,1)}(y_1, \dots, y_n | z) \\
&\qquad = \operatorname{sp}_{(r^{m+n+1})}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, z). \qquad (12)
\end{aligned}$$

ここで，$(r^{n-m}) \cup \lambda = (\underbrace{r, \dots, r}_{n-m}, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $(r^{n+m+1}) = (\underbrace{r, \dots, r}_{m+n+1})$ である．

この定理は，Brent–Krattenthaler–Warnaar [2] による Macdonald–Mehta 積分

$$\int_{\mathbb{R}^r} \prod_{1\le i<j\le r} \left|(x_j^\alpha - x_i^\alpha)\right|^{2\gamma} \prod_{i=1}^{r} |x_i|^\delta e^{-x_i^2/2}\, dx_1 \cdots dx_r$$

の離散版

$$\sum_{(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{Z}^r} \prod_{1\le i<j\le r} \left|(k_j^\alpha - k_i^\alpha)\right|^{2\gamma} \prod_{i=1}^{r} |k_i|^\delta \binom{2N}{N+k_i}$$

（$|k_i| > N$ のとき $\binom{2N}{N+k_i} = 0$ だからこの和は有限和である）の研究の中で見出され，非交差格子経路を用いて証明された（[9] を見よ）.

定理 3.1 のここでの証明の方針は，斜交指標，直交指標に対する同様の公式 [11, Theorem 2.2] の証明と同じであり，次の Cauchy–Binet の公式（補題 3.2）と行列式の関係式 (補題 3.3) を利用する.

補題 3.2. （Cauchy–Binet の公式）行列 $X = (x_{i,j})_{1\le i\le n,\, 0\le j\le M}$, $Y = (y_{i,j})_{1\le i\le n,\, 0\le j\le M}$ を考える．列添字の部分集合 $I \subset [0, M] = \{0, 1, \dots, M\}$ に対して，X, Y から I に対応する列を取り出して得られる行列をそれぞれ $X([n]; I)$, $Y([n]; I)$ と表す．このとき，

$$\sum_{I\in\binom{[0,M]}{n}} \det X([n]; I)\, \det Y([n]; I) = \det\left({}^t XY\right).$$

ここで，$\binom{[0,M]}{n}$ は $[0, M]$ の n 元部分集合全体のなす集合を表す.

補題 3.3. 変数 ξ, η, ζ, α, β に対して，

$$\begin{aligned} p(\xi,\eta,\zeta,\alpha,\beta) = {} & \frac{(1-\xi\zeta)(1-\eta\zeta)}{1-\xi\eta} - \alpha\cdot\frac{(\xi-\zeta)(1-\eta\zeta)}{\xi-\eta} \\ & + \beta\cdot\frac{(1-\xi\zeta)(\eta-\zeta)}{\xi-\eta} - \alpha\beta\cdot\frac{(\xi-\zeta)(\eta-\zeta)}{1-\xi\eta} \end{aligned}$$

とおく．変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$, z, $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n)$, c が与えられたとき，$(n+1)$ 次正方行列 $C = C(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, c) = \left(C_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n+1}$ と $(2n+1)$ 次正方行列 $V = V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, c) = \left(V_{i,j}\right)_{1\le i,j\le 2n+1}$ を，

$$C_{ij} = \begin{cases} p(x_i, y_j, z, a_i, b_j) & (1 \le i,\ j \le n \text{ のとき}), \\ 1 - a_j & (i = n+1,\ 1 \le j \le n), \\ 1 - b_i & (1 \le i \le n,\ j = n+1), \\ \dfrac{1-c}{1-z^2} & (i = j = n+1 \text{ のとき}), \end{cases}$$

$$V_{i,j} = \begin{cases} x_i^{j-1} - a_i x_i^{2n+1-j} & (1 \le i \le n \text{ のとき}), \\ y_{i-n}^{j-1} - b_{i-n} y_{i-n}^{2n+1-j} & (n+1 \le i \le 2n \text{ のとき}), \\ z^{j-1} - c z^{2n+1-j} & (i = 2n+1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおいて定める．このとき，

$$\det C = \frac{(-1)^n}{(1-z^2)\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (x_i - y_j)(1 - x_i y_j)} \det V.$$

定理 3.1 の証明． 補題 2.5 と m に関する下向きの帰納法を用いると，$m=n$ の場合から一般の場合を導くことができる．

そこで，以下では $m=n$ の場合を示す．また，$M=n+r$ とおく．行列 $X=(x_{i,j})_{1\le i\le n+1,\,0\le j\le M}$, $Y=(y_{i,j})_{1\le i\le n+1,\,0\le j\le M}$ を，

$$x_{i,j}=\begin{cases}\dfrac{x_i^j}{1-x_i^{-1}z}-\dfrac{x_i^{-j}}{1-x_iz} & (1\le i\le n \text{ のとき})\,,\\ z^j & (i=n+1 \text{ のとき})\,,\end{cases}$$

$$y_{i,j}=\begin{cases}\dfrac{y_i^j}{1-y_i^{-1}z}-\dfrac{y_i^{-j}}{1-y_iz} & (1\le i\le n \text{ のとき})\,,\\ z^j & (i=n+1 \text{ のとき})\end{cases}$$

とおいて定める．このとき，対応 $\lambda\mapsto I_{n+1}(\lambda)=\{\lambda_{n+1},\lambda_n+1,\dots,\lambda_1+n\}$ は，$\mathcal{P}((r^{n+1}))$ と $\binom{[0,M]}{n+1}$ の間の全単射を与えるから，Weyl 型行列式表示 (命題 2.4）と Cauchy–Binet の公式（補題 3.2）を用いると，

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda\in\mathcal{P}((r^{n+1}))} z^{-r}\,\mathrm{sp}_\lambda^{(n,1)}(\boldsymbol{x}|z)\,\mathrm{sp}_\lambda^{(n,1)}(\boldsymbol{y}|z)\\ &\quad=\frac{z^{-r}}{\det B_\emptyset^{(n,1)}(\boldsymbol{x}|z)\,\det B_\emptyset^{(n,1)}(\boldsymbol{y}|z)}\sum_{I\in\binom{[0,M]}{n+1}}\det X([n+1];I)\,\det Y([n+1];I)\\ &\quad=\frac{z^{-r}}{\det B_\emptyset^{(n,1)}(\boldsymbol{x}|z)\,\det B_\emptyset^{(n,1)}(\boldsymbol{y}|z)}\det\left({}^tXY\right).\end{aligned}$$

ここで，${}^tXY$ の成分を直接計算し，補題 3.3 の行列 C と比較すると，

$$\begin{aligned}\det\left({}^tXY\right)=&\frac{\prod_{i=1}^n x_i^{-M}\prod_{i=1}^n y_i^{-M}\cdot z^{2M+2n}}{\prod_{i=1}^n(x_i-z)(1-x_iz)\prod_{i=1}^n(y_i-z)(1-y_iz)}\\ &\times\det C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},z^{-1};\boldsymbol{x}^{2M+2},\boldsymbol{y}^{2M+2},z^{-2M-2})\end{aligned}$$

（ここで，$\boldsymbol{x}^p=(x_1^p,\dots,x_n^p)$, $\boldsymbol{y}^p=(y_1^p,\dots,y_n^p)$ と略記した）となることがわかる．よって，補題 3.3 を用いると，示すべき式 (12) の左辺は $\det V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},z^{-1};\boldsymbol{x}^{2M+2},\boldsymbol{y}^{2M+2},z^{-2M-2})$ を用いて表すことができる．一方，

$$\begin{aligned}&\det V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},z^{-1};\boldsymbol{x}^{2M+2},\boldsymbol{y}^{2M+2},z^{-2M-2})\\ &\quad=\prod_{i=1}^n x_i^{r+2n+1}\prod_{j=1}^n y_j^{r+2n+1}\cdot z^{-r-2n-1}\det\left(t_i^{r+2n+2-j}-t_i^{-(r+2n+2-j)}\right)_{1\le i,j\le 2n+1}\end{aligned}$$

（ここで，$(t_1,\dots,t_{2n+1})=(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,z)$ とおいた）だから，斜交指標の Weyl 型行列式表示 (4) を用いることにより，定理 3.1 の証明が完成する． □

定理 3.1 において $x_1=\cdots=x_m=y_1=\cdots=y_n=z=1$ と特殊化したものを用いると，次の Macdonald–Mehta 型積分の離散版の値が計算できる．

系 **3.4.** (Brent–Krattenthaler–Warnaar [2, Subsection 6.3]) M, N を正の半整数，r を正整数とし，$r \le \min(M, N)$ であるとする．このとき，

$$\sum_{(k_1,\dots,k_r)\in(\mathbb{Z}+1/2)^r} \prod_{1\le i<j\le r} (k_j^2 - k_i^2)^2 \prod_{i=1}^{r} k_i^2 \binom{2M}{M+k_i}\binom{2N}{N+k_i}$$
$$= r! \prod_{i=1}^{r} \frac{(2i-1)!\,(2M)!\,(2N)!\,(2M+2N-2r-2i+1)!}{(2M-2i+1)!\,(2N-2i+1)!\,(M+N-r-i)!\,(M+N-r+i)!} \qquad (13)$$

であり，

$$\sum_{(k_1,\dots,k_r)\in(\mathbb{Z}+1/2)^r} \prod_{1\le i<j\le r} (k_j^2 - k_i^2)^2 \prod_{i=1}^{r} k_i^2 \binom{2N}{N+k_i} = 2^{2r(N-r)} r! \prod_{i=1}^{r} \frac{(2i-1)!\,(2N)!}{(2N-2i+1)!}. \qquad (14)$$

証明． 分割 $\lambda \in \mathcal{P}((r^{m+1}))$ に対して，中間斜交指標 $\mathrm{sp}^{(m,1)}(x_1,\dots,x_m|z)$ において $x_1 = \cdots = x_m = z = 1$ と特殊化したものを $\mathrm{sp}^{(m,1)}_\lambda(1^m|1)$ と表すと，Jacobi–Trudi 型行列式表示 (7) と [8, (3.19)] を用いることにより，

$$\mathrm{sp}^{(m,1)}_\lambda(1^m|1) = \det\left(\binom{2m+1}{{}^t\lambda_i - i + j} - \binom{2n+1}{{}^t\lambda_i - i - j} \right)_{1\le i,j\le r}$$
$$= 2^r \prod_{1\le i<j\le r} (k_j^2 - k_i^2) \prod_{i=1}^{r} k_i \binom{2m+2r+1}{m+r+k_i+1/2} \cdot \prod_{i=1}^{r} \frac{(2m+2i)!}{(2m+2r+1)!}$$

（ここで，$k_i = m + i + 1/2 - {}^t\lambda_i$ $(1 \le i \le r)$ とおいた）となることがわかる．以下では，$M \le N$ であるとし，$M = m + r + 1/2$, $N = n + r + 1/2$ と表す．分割 $\lambda \in \mathcal{P}((r^{m+1}))$ と，$k_r \le M$ をみたす正の半整数の狭義単調増加列 $(k_1,\dots,k_r)$ は 1 対 1 に対応し，(13) の左辺の和の中身は C_r 型 Weyl 群の作用で不変だから，(13) の左辺は

$$\sum_{(k_1,\dots,k_r)\in(\mathbb{Z}+1/2)^r} \prod_{1\le i<j\le r} (k_j^2 - k_i^2)^2 \prod_{i=1}^{r} k_i^2 \binom{2M}{M+k_i}\binom{2N}{N+k_i}$$
$$= 2^r r! \cdot 2^{-2r} \frac{(2M)!}{(2M-2r+2i-1)!} \frac{(2N)!}{(2N-2r+2i-1)!}$$
$$\times \sum_{\lambda\in\mathcal{P}((r^{m+1}))} \mathrm{sp}^{(m,1)}_\lambda(1^m|1)\, \mathrm{sp}^{(n,1)}_{(r^{n-m})\cup\lambda}(1^n|1)$$

と奇数次斜交指標の特殊値を用いて表すことができる．よって，(12) に $x_1 = \cdots = x_m = y_1 = \cdots = y_n = z = 1$ を代入したものを用いて計算すると，(13) が導かれる．また，(14) は，(13) の両辺を $\binom{2M}{M}^r$ で割り，$M \to \infty$ の極限を取ることによって得られる． □

4 変形平面分割の数え上げへの応用

この節では，中間斜交指標の平面分割の数え上げ問題への応用を与える．鍵は中間斜交指標の和に関する公式であり，Weyl 型行列式表示と石川–若山の小行列式の和公式を利用することによって証明できる．

分割 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ は，$\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_{l(\mu)} > 0$ をみたすとき，ストリクトであるという．ストリクトな分割 μ に対して，その変形 Young 図形 $S(\mu)$ を

$$S(\mu) = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \le i \le l(\mu),\ i \le j \le \mu_i + i - 1\}$$

とおいて定め，格子点の代わりに単位正方形を置いて図示する．ストリクトな分割 μ を枠とする**変形平面分割** (shifted plane partition) とは，μ の変形 Young 図形 $S(\mu)$ の各正方形に非負整数を書き込んで，各行各列が広義単調減少となるようにしたもののことである．例えば，

$$\sigma = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 3 & 2 & 2 & 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-5} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 1 & 1 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{3-4} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 1 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{4-4} \end{array}$$

は $(6, 4, 2, 1)$ を枠とする変形平面分割である．非負整数 m に対して，μ を枠とし成分がすべて m 以下である変形平面分割全体のなす集合を $\mathcal{A}^m(S(\mu))$ と表す．以下では，長さ r の階段状分割を $\delta_r = (r, r-1, \ldots, 2, 1)$ と表し，

$$\delta_n + \delta_k = (n+k, n+k-2, \ldots, n-k+2, n-k, n-k-1, \ldots, 2, 1)$$

を枠とする変形平面分割を考える．この節の目的は，中間斜交指標を利用して，次の定理の証明とその q 類似を与えることである．（Hopkins–Lai [4] では，ひし形によるタイル張りを数え上げることによって，この定理を証明している．）

定理 4.1. (Hopkins–Lai [4, Theorem 1.1]) n, k, m を非負整数とし，$0 \le k \le n$ であるとする．このとき，$\delta_n + \delta_k$ を枠とし成分がすべて m 以下であるような変形平面分割の個数は，

$$\#\mathcal{A}^m(S(\delta_n + \delta_k)) = \prod_{1 \le i \le j \le n} \frac{m+i+j-1}{i+j-1} \prod_{1 \le i \le j \le k} \frac{m+i+j}{i+j} \tag{15}$$

で与えられる．

この定理 4.1 の主張は 2019 年に Hopkins によって予想されたが，特別な場合（$k = 0$, $n-1$, n）は 40 年近く前にまでさかのぼる．$k = 0$ の場合の主張は対称な平面分割の q 数え上げに関する MacMahon 予想の $q = 1$ の場合と同値であり，MacMahon 予想自体は 1970 年代後半に Andrews [1]（超幾何級数を用いる），Macdonald [10, I.5 Examples 16, 17]（Schur 関数を用いる）によって独立に証明されている．また，$k = n-1$, n の場合は，1980 年代前半に Proctor [15] によって斜交群の表現論を利用して示されている．

本稿では，定理 4.1 を中間斜交指標を用いて証明する．その第 1 段階として，変形平面分割の数え上げを中間斜交盤の数え上げに帰着させる．変形平面分割 $\sigma = (\sigma_{i,j})_{(i,j) \in S(\mu)} \in \mathcal{A}(S(\mu))$ に対して，主対角線の成分を並べてできる分割 $(\sigma_{1,1}, \sigma_{2,2}, \cdots)$ を σ の**輪郭** (profile) と呼ぶ．そして，輪郭 λ をもつ変形平面分割 $\sigma \in \mathcal{A}^m(S(\mu))$ 全体のなす集合を $\mathcal{A}^m(S(\mu); \lambda)$ と表す．このとき，

補題 4.2. n, k を非負整数（ただし $0 \le k \le n$）とし，λ を長さ n 以下の分割とする．このとき，$\mathcal{A}(S(\delta_n + \delta_k); \lambda)$ から $\mathrm{Tab}^{(k,n-k)}(\lambda)$ への全単射が存在する．

証明. 変形平面分割 $\sigma \in \mathcal{A}(S(\delta_n + \delta_k); \lambda)$ が与えられたとき，次のようにして中間斜交盤 $T \in \mathrm{Tab}^{(k,n-k)}(\lambda)$ を構成する．まず，σ の第 i 行の成分からなる分割を $\sigma^{(i)}$ とし，λ の Young 図形 $D(\lambda)$ の第 i 行に $\sigma^{(i)}$ の共役分割 ${}^t\big(\sigma^{(i)}\big)$ を書き込んで得られる盤を π とする．（$l\left({}^t\big(\sigma^{(i)}\big)\right) = \sigma_1^{(i)} = \lambda_i$ に注意する．）このとき，π の各行の成分は広義単調減少，各列の成分は狭義単調減少であり，第 i 行の成分は高々 $n+k-2i+2$（$1 \le i \le k$ のとき），$n-i+1$（$k+1 \le i \le n$ のとき）である．そこで，π の成分 $1, 2, \dots, n-k, n-k+1, n-k+2, \dots, n+k-1, n+k$ をそれぞれ $n, n-1, \dots, k+1, \overline{k}, k, \dots, \overline{1}, 1$ で置き換えると，中間斜交盤 $T \in \mathrm{Tab}^{(k,n-k)}(\lambda)$ が得られる．このとき，対応 $\sigma \mapsto \pi$, $\pi \mapsto T$ はいずれも可逆だから，対応 $\sigma \mapsto T$ は全単射である．例えば，$n = 4$, $k = 2$, $\lambda = (4, 3, 1, 1)$ のとき，

$$\sigma = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 4 & 4 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 3 & 2 & 2 & 1 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{2-5} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 1 & 1 & \multicolumn{1}{|c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{3-4} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 1 & \multicolumn{1}{|c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{4-4} \end{array} \longmapsto \pi = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 5 & 4 & 2 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 1 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-3} 2 & \multicolumn{1}{|c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 1 & \multicolumn{1}{|c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \longmapsto T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \overline{1} & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & \overline{2} & 4 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-3} 3 & \multicolumn{1}{|c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 4 & \multicolumn{1}{|c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

のように対応している． $\square$

この補題により

$$\begin{aligned} \#\mathcal{A}^m(S(\delta_n + \delta_k)) &= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}((m^n))} \#\mathcal{A}^m(S(\delta_n + \delta_k); \lambda) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}((m^n))} \#\,\mathrm{Tab}^{(k,n-k)}(\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}((m^n))} \mathrm{sp}_\lambda^{(k,n-k)}(1, \dots, 1 | 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

となる．ここで，$\mathcal{P}((m^n))$ は $\lambda_1 \le m$, $l(\lambda) \le n$ をみたす分割全体のなす集合であり，$\mathrm{sp}_\lambda^{(k,n-k)}(1, \dots, 1 | 1, \dots, 1)$ は中間斜交指標 $\mathrm{sp}_\lambda^{(k,n-k)}(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n)$ において $x_1 = \cdots = x_n = 1$ を代入したものを表す．そこで，定理 4.1 の証明の第 2 段階として，次の定理 4.3 を利用する．（この定理の $k = 0$ の場合は [10, I.5 Example 16], [11, Theorem 2.3 (1)]，$k = n$ の場合は [11, Proof of Theorem 2.5] でそれぞれ示されている．）

定理 4.3. n, k, m, a を非負整数とし，$0 \le k \le n$ であるとする．このとき，

$$\begin{aligned} &\sum_{\lambda \in \mathcal{P}((m^n))} \mathrm{sp}_{\lambda + (a^n)}^{(k,n-k)}(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) \\ &\qquad = \mathrm{o}_{((m/2)^n)}^B(x_1, \dots, x_n) \cdot \mathrm{sp}_{((m/2+a)^k)}(x_1, \dots, x_k) \cdot (x_{k+1} \cdots x_n)^{m/2+a}. \end{aligned} \tag{16}$$

ここで，$\lambda + (a^n) = (\lambda_1 + a, \dots, \lambda_n + a)$ であり，

$$\mathrm{o}_{(r^n)}^B(x_1, \dots, x_n) = \frac{\det\left(x_i^{r+n-j+1/2} - x_i^{-(r+n-j+1/2)}\right)_{1 \le i,j \le n}}{\det\left(x_i^{n-j+1/2} - x_i^{-(n-j+1/2)}\right)_{1 \le i,j \le n}},$$

$$\mathrm{sp}_{(r^k)}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\det\left(x_i^{r+k-j+1} - x_i^{-(r+k-j+1)}\right)_{1 \le i,j \le k}}{\det\left(x_i^{k-j+1} - x_i^{-(k-j+1)}\right)_{1 \le i,j \le k}}$$

である．（$\mathrm{o}_{(r^n)}^B$ は直交 Lie 代数 $\mathfrak{o}_{2n+1}$ の既約指標であり，r が非負整数であれば $\mathrm{sp}_{(r^k)}$ は斜交 Lie 代数 $\mathfrak{sp}_{2n}$ の既約指標である．）

定理 4.3 の証明はこの節の後半で与えることにして，まず定理 4.1 の証明を完成させる．定理 4.3 で $a=0$ とし，$x_1=\cdots=x_n=1$ を代入したものを用いると，

$$\#\mathcal{A}^m(S(\delta_n+\delta_k)) = \mathrm{o}^B_{((m/2)^n)}(1,\ldots,1)\cdot \mathrm{sp}_{((m/2)^k)}(1,\ldots,1).$$

よって，次の補題 4.4 で $q=1$ としたものを用いると，定理 4.1 が得られる．

補題 4.4. 整数あるいは半整数 r に対して，

$$\mathrm{o}^B_{(r^n)}(q^{1/2},q^{3/2},\ldots,q^{n-1/2}) = \frac{1}{q^{rn^2/2}}\prod_{i=1}^{n}\frac{[r+i-1/2]}{[i-1/2]}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{[2r+i+j-1]}{[i+j-1]},$$

$$\mathrm{o}^B_{(r^n)}(q,q^2,\ldots,q^n) = \frac{1}{q^{rn(n+1)/2}}\prod_{1\le i\le j\le n}\frac{[2r+i+j-1]}{[i+j-1]},$$

$$\mathrm{sp}_{(r^k)}(q^{1/2},q^{3/2},\ldots,q^{k-1/2}) = \frac{1}{q^{rk^2/2}}\prod_{i=1}^{k}\frac{[r+i]}{[i]}\prod_{1\le i<j\le k}\frac{[2r+i+j]}{[i+j]},$$

$$\mathrm{sp}_{(r^k)}(q,q^2,\ldots,q^k) = \frac{1}{q^{rk(k+1)/2}}\prod_{1\le i\le j\le k}\frac{[2r+i+j]}{[i+j]}.$$

ここで，$[t]=(1-q^t)/(1-q)$ である．

上では定理 4.3 において $x_1=\cdots=x_n=1$ を代入することによって定理 4.1 を導いたが，定理 4.3 において $x_i=q^{i-1/2}$ $(1\le i\le n)$ あるいは $x_i=q^i$ $(1\le i\le n)$ と特殊化し，補題 4.4 を用いると，定理 4.1 の q 類似が得られる．

系 4.5. 変形平面分割 $\sigma=(\sigma_{i,j})_{(i,j)\in S(\delta_n+\delta_k)}\in\mathcal{A}^m(S(\delta_n+\delta_k))$ に対して，$t_l(\sigma)=\sum_i\sigma_{i,i+l}$ $(0\le l\le n+k-1)$ とおき，

$$v(\sigma)=\left(k-\frac{1}{2}\right)t_0(\sigma)+\sum_{l=0}^{n-k-1}t_l(\sigma)-nt_{n-k}(\sigma)+\sum_{l=n-k}^{n+k-1}(-1)^{l-n+k+1}(l-n+k)t_l(\sigma),$$

$$w(\sigma)=kt_0(\sigma)+\sum_{l=0}^{n-k-1}t_l(\sigma)-nt_{n-k}(\sigma)+\sum_{l=n-k}^{n+k-1}(-1)^{l-n+k+1}(l-n+k+1)t_l(\sigma)$$

と定義する．このとき，

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{A}^m(S(\delta_n+\delta_k))}q^{v(\sigma)} = \frac{1}{q^{mk^2/2}}\prod_{i=1}^{n}\frac{[m/2+i-1/2]}{[i-1/2]}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{[m+i+j-1]}{[i+j-1]}$$
$$\times\prod_{i=1}^{k}\frac{[m/2+i]}{[i]}\prod_{1\le i<j\le k}\frac{[m+i+j]}{[i+j]},$$

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{A}^m(S(\delta_n+\delta_k))}q^{w(\sigma)} = \frac{1}{q^{mk(k+1)/2}}\prod_{1\le i\le j\le n}\frac{[m+i+j-1]}{[i+j-1]}\prod_{1\le i\le j\le k}\frac{[m+i+j]}{[i+j]}.$$

特に，この系において $k=0$ のときを考えると，

$$v(\sigma)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{i,i}+\sum_{1\le i<j\le n}\sigma_{i,j},\quad w(\sigma)=\sum_{1\le i\le j\le n}\sigma_{i,j}$$

であり，

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{A}^m(S(\delta_n))} q^{v(\sigma)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{[m/2+i-1/2]}{[i-1/2]} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{[m+i+j-1]}{[i+j-1]},$$
$$\sum_{\sigma\in\mathcal{A}^m(S(\delta_n))} q^{w(\sigma)} = \prod_{1\le i\le j\le n} \frac{[m+i+j-1]}{[i+j-1]}.$$

これらはそれぞれ対称な平面分割に関する MacMahon 予想（Andrews [1]，Macdonald [10] により証明），Bender–Knuth 予想（Gordon [3] により証明）と同値である．

さて，以下では，定理 4.1 の証明の鍵である定理 4.3 の証明を解説する．証明の方針は [11, Theorem 2.5] と同じであり，次の石川–若山の小行列式の和公式（補題 4.6）とある種のパフィアンの行列式の積への分解公式（補題 4.7) を利用する．

補題 4.6. （石川–若山の小行列式の和公式 [6, Theorem 1]）n を偶数，M を非負整数とする．行列 $X=(x_{ij})_{1\le i\le n,\,0\le j\le M}$，交代行列 $Z=(z_{ij})_{0\le i,j\le M}$ に対して，

$$\sum_{J\in\binom{[0,M]}{n}} \operatorname{Pf} Z(J)\,\det X\left([n];J\right) = \operatorname{Pf}\left({}^tXZX\right).$$

ここで，J は $[0,M]$ の n 元部分集合全体をわたり，$Z(J)$ は Z から J に対応する行，列を取り出して得られる交代行列である．

補題 4.7. （$k=0$ の場合は [11, Corollary 4.6]，$k=n$ の場合は [11, Theorem 4.4]）変数 $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$, $\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_n)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,\dots,b_k)$ に対して，行列 $Q^{n,k}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, $W^n(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a})$, $U^{k,n}(\boldsymbol{x}_{[k]};\boldsymbol{b})$ （ただし，$\boldsymbol{x}_{[k]}=(x_1,\dots,x_k)$）を以下のように定める．まず，

$$q(\xi,\eta;\alpha,\beta)=(\eta-\xi)(1-\alpha\beta)+(1-\xi\eta)(\beta-\alpha),\quad f(u)=\frac{u^{n-k}}{\prod_{l=k+1}^{n}(1-ux_l)}$$

とおき，$Q^{n,k}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ を，

$$\begin{cases} q(x_i,x_j;a_i,a_j)\left(\dfrac{f(x_i^{-1})f(x_j^{-1})b_ib_j}{1-x_ix_j}+\dfrac{f(x_i^{-1})f(x_j)b_i}{x_j-x_i}-\dfrac{f(x_i)f(x_j^{-1})b_j}{x_j-x_i}-\dfrac{f(x_i)f(x_j)}{1-x_ix_j}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1\le i<j\le k\ \text{のとき}) \\ -q(x_i,x_j;a_i,a_j)\left(\dfrac{f(x_i^{-1})b_i}{1-x_ix_j}-\dfrac{f(x_i)}{x_j-x_i}\right) \qquad (1\le i\le k,\ k+1\le j\le n\ \text{のとき}) \\ \dfrac{q(x_i,x_j;a_i,a_j)}{1-x_ix_j} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k+1\le i<j\le n\ \text{のとき}) \end{cases}$$

を (i,j) 成分とする n 次交代行列とする．また，

$$\begin{pmatrix} 1+a_ix_i^{n-1} & x_i+a_ix_i^{n-2} & \dots & x_i^{n-1}+a_i \end{pmatrix}$$

を第 i 行とする n 次正方行列を $W^n(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a})$ とし，

$$\begin{pmatrix} x_i^{n-k}+b_ix_i^{k-1} & x_i^{n-k+1}+b_ix_i^{k-2} & \dots & x_i^{n-1}+b_i \end{pmatrix}$$

を第 i 行とする k 次正方行列を $U^{k,n}(\boldsymbol{x}_{[k]};\boldsymbol{b})$ とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Pf} Q^{n,k}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \\
&= \frac{(-1)^{k(k-1)/2}\det W^n(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a})\ \det U^{k,n}(\boldsymbol{x}_{[k]};\boldsymbol{b})}{\prod_{1\le i<j\le k}(x_j-x_i)(1-x_jx_j)\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=k+1}^{n}(x_j-x_i)(1-x_ix_j)\prod_{k+1\le i<j\le n}(1-x_ix_j)}.
\end{aligned}
$$

定理 4.3 の証明． n が奇数である場合は，補題 2.5 と [11, Lemma 5.3 (2)] を用いることにより，n が偶数である場合から導かれる．

そこで，以下では n が偶数である場合を示す．また，$M=m+n-1$ とおく．交代行列 $Z=(z_{i,j})_{0\le i,j\le M}$ と行列 $X=(x_{i,j})_{1\le i\le n,\,0\le j\le M}$ を

$$
z_{i,j}=1 \quad (0\le i<j\le M),
$$
$$
x_{i,j}=\begin{cases}\dfrac{x_i^{a+j-n+k+1}}{\prod_{l=k+1}^{n}(1-x_i^{-1}x_l)}-\dfrac{x_i^{-(a+j-n+k+1)}}{\prod_{l=k+1}^{n}(1-x_ix_l)} & (1\le i\le k\text{ のとき}),\\ x_i^{a+j} & (k+1\le i\le n\text{ のとき})\end{cases}
$$

とおいて定める．このとき，任意の n 元部分集合 $I\subset[0,M]$ に対して $\operatorname{Pf} Z(I)=1$ となる（例えば [5, 例 2.3] を見よ）から，Weyl 型行列式表示 (10) と石川–若山の小行列式の和公式（補題 4.6）を用いると，示すべき式 (16) の左辺の和は

$$
\begin{aligned}
\sum_{\lambda\in\mathcal{P}((m^n))}\operatorname{sp}^{(k,n-k)}_{\lambda+(a^n)}(\boldsymbol{x}) &= \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{\det B^{(k,n-k)}_{\emptyset}}\sum_{I\in\binom{[0,M]}{n}}\operatorname{Pf} Z(I)\det X([n];I)\\
&= \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{\det B^{(k,n-k)}_{\emptyset}}\operatorname{Pf}\left({}^tXZX\right)
\end{aligned}
$$

と 1 つのパフィアンで表される．ここで，交代行列 ${}^tXZX$ の成分を直接計算し，補題 4.7 の交代行列 $Q^{n,k}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ と比較すると，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\lambda\in\mathcal{P}((m^n))}\operatorname{sp}^{(k,n-k)}_{\lambda+(a^n)}(x_1,\dots,x_k|x_{k+1},\dots,x_n)\\
&= \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{\det B^{(k,n-k)}_{\emptyset}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{k}x_i^{-a}\prod_{i=k+1}^{n}x_i^{a}}{\prod_{i=1}^{k}x_i^{m+n}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)}\operatorname{Pf} Q^{n,k}(\boldsymbol{x};-\boldsymbol{x}^{m+n},-\boldsymbol{x}_{[k]}^{2a+m+n+1})
\end{aligned}
$$

（ここで，$\boldsymbol{x}^p=(x_1^p,\dots,x_n^p)$，$\boldsymbol{x}_{[k]}^p=(x_1^p,\dots,x_k^p)$ と略記した）と書き直すことができる．よって，補題 4.7 により，(16) の左辺は $\det W^n(\boldsymbol{x};-\boldsymbol{x}^{m+n})$, $\det U^{k,n}(\boldsymbol{x}_{[k]};-\boldsymbol{x}_{[k]}^{2a+m+n+1})$ を用いて表される．あとは，これらの行列式と $\mathrm{o}^{B}_{(m/2)^n}(\boldsymbol{x})$, $\operatorname{sp}_{(m/2+a)^k}(\boldsymbol{x}_{[k]})$ の行列式の比としての表示と比較すればよい． □

参考文献

[1] G. E. Andrews, Plane partitions I: The MacMahon conjecture, Adv. in Math. Suppl. Stud. **1** (1978), 131–150.

[2] R. P. Brent, C. Krattenthaler and S. O. Warnaar, Discrete analogue of Macdonald–Mehta integrals, J. Combin. Theory Ser. A **144** (2016), 80–138.

[3] B. Gordon, A proof of the Bender–Knuth conjecture, Pacific J. Math. **108** (1983), 99–113.

[4] S. Hopkins and T. Lai, Plane partitions of shifted double staircase shape, `arXiv:2007.05381`.

[5] 石川 雅雄，岡田 聡一, 行列式・パフィアンに関する等式とその表現論，組合せ論への応用，数学 **62** (2010), 85–114.

[6] M. Ishikawa and M. Wakayama, Minor summation formula of Pfaffians, Linear and Multilinear Algebra, **39** (1995), 285–305.

[7] R. C. King, Weight multiplicities for the classical groups, in "Group Theoretical Methods in Physics (Fourth Internat. Colloq., Nijmegen, 1975)", Lecture Notes in Phys. **50**, Springer, Berlin, 1976, pp. 490–499.

[8] C. Krattenthaler, Advanced determinant Calculus, Sém. Lothar. Combin. **42** (1999), Art. B42q, 67pp.

[9] C. Krattenthaler, Non-intersecting lattice paths, classical group characters, and multivariate hypergeometric series, talk slides at 8th International Conference on Lattice Path Combinatorics & Applications, California State Polytechnic University, Pomona, CA, U.S.A., 2015. Available at `https://www.mat.univie.ac.at/~kratt/vortrag/brent.pdf`.

[10] I. G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd edition", Oxford Univ. Press, 1995.

[11] S. Okada, Applications of minor summation formulas to rectangular-shaped representations of classical groups, J. Algebra **205** (1998), 337–367.

[12] 岡田 聡一, "古典群の表現論と組合せ論（下）", 培風館, 2006.

[13] S. Okada, A bialternant formula for odd symplectic characters and its application, Josai Math. Monographs **12** (2020), 99–116.

[14] S. Okada, Intermediate symplectic characters and shifted plane partitions of shifted double staircase shape, `arXiv:2009.14037`.

[15] R. A. Proctor, Shifted plane partitions of trapezoidal shape, Proc. Amer. Math. Soc. **89** (1983), 553–559.

[16] R. A. Proctor, Odd symplectic groups, Invent. Math. **92** (1988), 307–332.