解析的で一様な $\mathbb{Z}$ 上量子ウォーク

西郷甲矢人・酒匂宏樹

Abstract. $\mathbb{Z}$ 上の量子ウォークの一般概念およびその解析性を定義し、そこから導かれる構造定理、そしてその帰結としての一般的な極限定理（弱収束定理）を紹介する。さらにその過程で、「離散時間量子ウォークをいつ連続時間量子ウォークで実現できるか？」という問いに対して答える。本稿の内容はすべて [6] に基づき、その記述は概ね [7] のそれに基づく。

1. はじめに

本稿の目的はは、$\mathbb{Z}$ 上の量子ウォークの一般概念およびその解析性を定義し、「量子ウォークの複素解析」への道を開くことである。その主定理は、解析的で一様な $\mathbb{Z}$ 上の離散時間量子ウォーク（簡単のため本章では、概念が定義されて以降は「解析的」などの語を適宜省略することがある）の構造定理（定理 4.7）であり、ここからはたとえば「離散時間量子ウォークをいつ連続時間量子ウォークで実現できるか？」という自然な問いへの簡潔な答え（定理 4.14)、そして量子ウォークの一般的な極限定理（定理 5.4) が導かれる。

2. 定義

n を自然数とし、$\ell_2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^n$ 上の有界線型作用素 X を考えよう。このとき X の行列要素

$$[X((s,k),(t,l))]_{(s,k),(t,l)\in\mathbb{Z}\times\{1,2,\cdots,n\}}$$

は

$$X((s,k),(t,l)) = \langle X(\delta_t \otimes \delta_l), \delta_s \otimes \delta_k\rangle$$

によって定義される。

Definition 2.1. *(1)* 作用素 X が解析的であるとは、定数 $0 < c$ および $1 < r$ が存在して、任意の k, l, s, t について

$$|X((s,k),(t,l))| \leq cr^{-|s-t|}$$

となることをいう。

(2) 作用素 X が空間的に一様あるいは単に一様であるとは、行列要素 $X((s,k),(t,l))$ が k, l および $s-t$ にのみに依存することをいう。

各 $s \in \mathbb{Z}$ に対し、S_s を以下のようにシフトで定義される $\ell_2(\mathbb{Z})$ 上のユニタリ作用素とする：

$$\delta_t \mapsto \delta_{s+t}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

一様な作用素 $X = [X((s,k),(t,l))]$ は無限和

$$\left[\sum_s X_{k,l}(s) S_s\right]_{1\le k,l\le n}$$

によって定義される。ここで係数 $X_{k,l}(s-t)$ は $X((s,k),(t,l))$ によって与えられる。X が C^∞ 級の場合、上の無限和は作用素ノルムに関して収束する。

Definition 2.2. 実数体の閉部分群 $G \in \mathbb{R}$ から $\ell_2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^n$ のユニタリ作用素からなる群への群準同型を、$\mathbb{Z}$ 上の n-状態量子ウォークとよび、$t \mapsto U^{(t)}$ のように表す。G は $\mathbb{R}$ 自身もしくは $c\mathbb{Z}$ の形の群であることに注意。以下では簡単のため、「$\mathbb{Z}$ 上の」および「n-状態」という語句は基本的に省略する。

- 量子ウォークが連続時間量子ウォークであるとは、G が $\mathbb{R}$ に一致し、かつ弱作用素位相に関して連続であることをいう。
- 量子ウォークが離散時間量子ウォークであるとは、G が $c\mathbb{Z}$ の形の群であることをいう。
- 量子ウォークが解析的であるとは、任意の $t \in G$ について $U^{(t)}$ が解析的なユニタリ作用素であることをいう。
- 量子ウォークが空間的に一様、あるいは単に一様であるとは、任意の $t \in G$ について $U^{(t)}$ が一様なユニタリ作用素であることをいう。

Example 2.3. これまでよく研究されている一様な離散時間量子ウォークはほぼすべて解析的である。

3. 準備

3.1. 量子ウォークのフーリエ逆変換. 関数に対するフーリエ逆変換 $\mathcal{F}^{-1}$ はユニタリ作用素

$$\mathcal{F}^{-1} \colon \ell_2(\mathbb{Z}) \ni \delta_s \mapsto z^s \in L^2(\mathbb{T})$$

によって与えられる。$\ell_2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^n$ 上の有界線型作用素 X に対しては、$L^2(\mathbb{T}) \otimes \mathbb{C}^n$ の有界線型作用素 $\widehat{X} = (\mathcal{F}^{-1} \otimes \mathrm{id}) X (\mathcal{F} \otimes \mathrm{id})$ のことを X のフーリエ逆変換とよぶ。ここで id は恒等写像を表す。

X が一様な作用素のとき、X は複素数 $X_{k,l}(s)$ を用いて

$$X = \left[\sum_{s\in\mathbb{Z}} X_{k,l}(s) S_s\right]_{1\le k,l\le n}$$

と表すことができ、ここでフーリエ逆変換 $\widehat{X}$ の (k,l)-成分は $\mathbb{T}$ 上の関数

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}} X_{k,l}(s)z^s \in L^\infty(\mathbb{T})$$

による掛け算作用素となる。

Lemma 3.1. $\ell_2(Z)\otimes\mathbb{C}^n$ 上の一様な作用素 X について、以下が成り立つ.

(1) X が C^∞-級であるための必要十分条件は、$\widehat{X}$ の各成分が C^∞-級であることである。
(2) X が解析的であるための必要十分条件は、$\widehat{X}$ の各成分が $\mathbb{T}$ の近傍における解析関数であることである。
(3) X が有限伝搬であるための必要十分条件は、$\widehat{X}$ の各成分が $\{z^s \mid s\in\mathbb{Z}\}\subset C(\mathbb{T})$ の線型結合で書けることである。

以後、本章においては解析的な離散時間量子ウォークに焦点を当てる。これを単に量子ウォークと呼ぶ。「時間の群」G を $\mathbb{Z}$ として一般性を失わない。そして、量子ウォークの生成子 $U^{(1)}$ を U と書く。

量子ウォークの生成子 U のフーリエ逆変換 $\widehat{U}=(\mathcal{F}^{-1}\otimes\mathrm{id})U(\mathcal{F}\otimes\mathrm{id})$ は $M_n(C(\mathbb{T}))=C(\mathbb{T})\otimes M_n(\mathbb{C})$ の要素である。$\widehat{U}$ の (k,l)-成分を $\widehat{U}(z;k,l)$ と表す。補題3.1により、$\widehat{U}(z;k,l)$ は $\mathbb{T}$ の近傍に解析接続をもつ。この解析接続をも $\widehat{U}(z;k,l)$ と表す。このとき、任意の z に対して $\left(\widehat{U}(z;k,l)\right)_{k,l}$ は $(n\times n)$ ユニタリ行列であることに注意しよう。

3.2. $\mathbb{T}$ 周りでの有理型関数の体 $\mathcal{Q}_\mathbb{T}$.

量子ウォークのフーリエ逆変換 $\widehat{U}(z), z\in\mathbb{T}$ の特性多項式とは

$$f(\lambda;z)=\det\left(\left(\lambda\delta_{k,l}-\widehat{U}(z;k,l)\right)_{k,l}\right)$$

である。ここで $\delta_{k,l}$ はクロネッカーのデルタを表す。この多項式の λ に関する次数は n である。係数は $\mathbb{T}$ を含むある領域上で解析的な関数である。

Definition 3.2.

- $Q_\mathbb{T}$ を、$\mathbb{T}$ を含む領域 Ω とその領域からリーマン球面への解析写像（であって定数関数 ∞ でないもの）
$$q\colon\Omega\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$$
とのペア (Ω,q) の集合とする。
- $Q_\mathbb{T}$ の二つの要素 (Ω_1,q_1), (Ω_2,q_2) が同値であるとは、ある領域 $\mathbb{T}\subset\Omega_0\subset\Omega_1\cap\Omega_2$ 上で q_1 と q_2 が一致することをいう。
- $Q_\mathbb{T}$ を上に述べた同値関係によって類別して得られる商集合を $\mathcal{Q}_\mathbb{T}$ と書く。

Lemma 3.3. $Q_{\mathbb{T}}$ における各点ごとの加法・乗法から、$\mathcal{Q}_{\mathbb{T}}$ には自然に体の構造が備わる。

この体 $\mathcal{Q}_{\mathbb{T}}$ を、「$\mathbb{T}$ 周りでの有理型関数の体」と呼ぶことにしよう。簡単のため、$(\Omega, q) \in Q_{\mathbb{T}}$ を含む同値類を単に $q \in \mathcal{Q}_{\mathbb{T}}$ のように書く。

Lemma 3.4. $g(\lambda) \in \mathcal{Q}_{\mathbb{T}}[\lambda]$ を既約多項式とする。このとき、$\mathbb{T}$ の有限部分集合 $\mathbb{T}_0$ が存在して、任意の $z \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_0$ において多項式 $g(\lambda; z) \in \mathbb{C}[\lambda]$ は重根をもたない。

Theorem 3.5. $g(\lambda)$ を $\mathcal{Q}_{\mathbb{T}}[\lambda]$ のモニックな（最高次の係数が 1 の）d 次既約多項式とする。もし任意の $z \in \mathbb{T}$ について $g(\lambda; z) \in \mathbb{C}[\lambda]$ の根 λ がすべて $\mathbb{T}$ の要素ならば、以下が成り立つ：

(1) 解析関数 $\lambda(\cdot) \in \mathcal{Q}_{\mathbb{T}}$ が存在して、任意の $z \in \mathbb{T}$ に関し

$$g(\lambda; z) = \prod_{\zeta:\ \zeta^d = z} (\lambda - \lambda(\zeta))$$

.

(2) $\mathbb{T}$ 周りで定義された別な解析関数 $\widetilde{\lambda}(\cdot)$ が

$$g(\lambda; z) = \prod_{\zeta:\ \zeta^d = z} \left(\lambda - \widetilde{\lambda}(\zeta)\right)$$

を満たすならば、ある自然数 $c \in \{0, 1, 2, \cdots, d-1\}$ が存在して

$$\widetilde{\lambda}(\zeta) \quad = \quad \lambda\left(\exp\left(\frac{2\pi i c}{d}\right)\zeta\right), \quad \zeta \in \mathbb{T}.$$

Lemma 3.6. $\lambda(\cdot)$ を $\mathbb{T}$ 上の解析関数とし、$g(\lambda) \in \mathcal{Q}_{\mathbb{T}}[\lambda]$ を

$$g(\lambda; z) = \prod_{\zeta:\ \zeta^d = z} (\lambda - \lambda(\zeta)).$$

と定める。以下の二条件は同値である。

(1) 多項式 $g(\lambda) \in \mathcal{Q}_{\mathbb{T}}[\lambda]$ は可約である。

(2) ある自然数 $c \in \{1, 2, \cdots, d-1\}$ が存在して、任意の $\zeta \in \mathbb{T}$ に関し

$$\lambda\left(\exp\left(\frac{2\pi i c}{d}\right)\zeta\right) \quad = \quad \lambda(\zeta).$$

上の同値な条件が成り立つならば、ある自然数 b, c と解析写像 $\widetilde{\lambda}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ が存在して、$bc = d$ および

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda}(\zeta^b) \quad &= \quad \lambda(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{T}, \\ g(\lambda; z) \quad &= \quad \left(\prod_{\eta:\ \eta^c = z} \left(\lambda - \widetilde{\lambda}(\eta)\right)\right)^b \end{aligned}$$

を満たす。

3.3. 量子ウォークの固有値関数. 前述の通り、量子ウォークのフーリエ逆変換 $\widehat{U}(z)$ の特性多項式

$$f(\lambda;z)=\det\left(\left(\lambda\delta_{k,l}-\widehat{U}(z;k,l)\right)_{k,l}\right)$$

は多項式 $f(\lambda)\in\mathcal{Q}_{\mathbb{T}}[\lambda]$ と考えることができ、既約多項式まで分解できる。さらに、それぞれの既約多項式は、定理 3.5 で述べた表示をもつ。これに基づいて、次が示される：

Theorem 3.7. 総和が n となる自然数の列 $d(1),d(2),\cdots,d(m)$ および解析関数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m\colon\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ が存在して、$\widehat{U}(z)$ の特性多項式 $f(\lambda;z)$ は

$$f(\lambda;z)=\prod_{j=1}^{m}\prod_{\zeta\colon\zeta^{d(j)}=z}(\lambda-\lambda_j(\zeta))$$

と表される。

Definition 3.8. 量子ウォーク U に対し、上の定理 *3.7* における等式をみたす m 個のペアからなる組

$$((d(1),\lambda_1),(d(2),\lambda_2),\cdots,(d(m),\lambda_m))$$

を、$\widehat{U}$ の固有値関数系という。各 λ_j を固有値関数という。

各量子ウォーク U について、自然数 m および固有値関数系は一意とは限らない。実際、以下の三種の置き換えが許される：

(1) 添字 $\{1,2,\cdots,m\}$ の並べ替え。

(2) 固有値関数 λ_j における「回転」: c を自然数とするとき、$\lambda_j(\zeta)$ を

$$\lambda_j\left(\exp\left(\frac{2\pi ic}{d(j)}\right)\zeta\right),$$

で置き換えること（定理 3.5 (2）を参照)。

(3) 補題 3.6 の表示に基づく「分解」:

$$\lambda_j(\zeta)=\lambda_j\left(\exp\left(\frac{2\pi ic}{d(j)}\right)\zeta\right),\quad b:=\frac{d(j)}{c}\in\mathbb{N},$$

となるとき、ペア $(d(j),\lambda_j)$ は b 個のペア

$$\left(c,\widetilde{\lambda}\right),\left(c,\widetilde{\lambda}\right),\cdots,\left(c,\widetilde{\lambda}\right).$$

によって置き換えられる。ここで新しい固有値関数は

$$\widetilde{\lambda}(\eta)=\lambda_j(\eta\text{の } b \text{ 乗根})$$

で与えられる。

第三の置き換えである「分解」(上記の「3」)が適用できないとき、その固有値関数系は分解不能であるという。二つの固有値関数系が与えられたとき、上記の三つの手続きを通じ、同じ分解不能な固有値関数系に到達することができる。また、二つの分解不能な固有関数系は、「分解」以外の二種の手続きによって互いに変換できる。というのも、$f(\lambda)$ の既約分解が一意的であるからである。

固有値関数系を用いると、量子ウォークの「回転数」を定めることができる。

Definition 3.9.

$$((d(1),\lambda_1),(d(2),\lambda_2),\cdots,(d(m),\lambda_m))$$

を $\widehat{U}$ の固有値関数系とする。$w(\lambda_j)$ を解析写像 $\lambda_j\colon \mathbb{T}\to\mathbb{T}$ の回転数とするとき、量子ウォーク U の回転数を

$$\sum_{j=1}^{m}|w(\lambda_j)|.$$

として定義し、$|w|(U)$ と表す。

量子ウォーク U の回転数は固有値関数系 $|w|(U)$ の取り方によらず定まる。というのも、これは上記の三種の手続きによって不変だからである。

3.4. **固有ベクトルの解析的切断.** 固有値関数系に対する次の定理は、量子ウォークの構造解析の根幹をなす。

Theorem 3.10. 任意の分解不能な固有値関数系

$$((d(1),\lambda_1),(d(2),\lambda_2),\cdots,(d(m),\lambda_m))$$

に対し、解析写像 $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m\colon \mathbb{T}\to\mathbb{C}^n$ が存在し、以下をみたす:

- 任意の $z\in\mathbb{T}$ に対して
$$\left\{\mathbf{v}_j(\zeta)\ \middle|\ 1\le j\le m, \zeta\in\mathbb{T}, \zeta^{d(j)}=z\right\}$$
は $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底をなす。
- 任意の $1\le j\le m$ と任意の $\zeta\in\mathbb{T}$ について、
$$\widehat{U}\left(\zeta^{d(j)}\right)\mathbf{v}_j(\zeta)=\lambda_j(\zeta)\mathbf{v}_j(\zeta).$$

4. 構造定理

4.1. **モデル量子ウォーク.** 自然数 d と解析関数 $\lambda\colon\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ が与えられたとき、「モデル量子ウォーク」$U_{d,\lambda}$ を、以下のように定義する。

$\lambda(\zeta)$ のローラン級数が

$$\lambda(\zeta)=\sum_{s\in\mathbb{Z}}c(s)\zeta^s$$

と与えられるとしよう。このとき、$k, l \in \{1, 2, \cdots, d\}$ に対して解析的な作用素 $U_{k,l}$ を

$$U_{k,l} = \sum_{s \in \mathbb{Z}} c(k - l + ds) S_s$$

と定める（ここで S_s たちはシフト作用素である）。そして $\ell_2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^d$ 上の解析的な作用素 $U_{d,\lambda}$ を

$$U_{d,\lambda} = (U_{k,l})_{k,l}\,.$$

と定める。

いま、$\lambda_{k,l} \colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ を

$$\lambda_{k,l}(z) \;=\; \sum_{s \in \mathbb{Z}} c(k - l + ds) z^s.$$

と定めると、$U_{k,l}$ のフーリエ逆変換 $\widehat{U_{k,l}} = \mathcal{F}^{-1} U_{k,l} \mathcal{F}$ はこの $\lambda_{k,l}$ による掛け算作用素 $M[\lambda_{k,l}]$ に他ならない。とくに $d = 1$ のとき、$\widehat{U_{1,\lambda}}$ は λ による掛け算作用素 $M[\lambda]$ となる。$U_{1,\lambda}$ は λ のフーリエ変換で与えられるユニタリ作用素であり、

$$U_{1,\lambda} = \sum_{s \in \mathbb{Z}} c(s) S_s.$$

と表される。

さて、ユニタリ作用素 $W_d \colon \ell_2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^d \to \ell_2(\mathbb{Z})$ を

$$W_d(\delta_s \otimes \delta_k) = \delta_{k+ds}, \quad s \in \mathbb{Z}, k \in \{1, 2, \cdots, d\}.$$

として定義し、これを「再配列」と呼ぼう。これは $U_{d,\lambda}$ と $U_{1,\lambda}$ とを連絡する作用素である：

Lemma 4.1. 任意の解析写像 $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ と任意の自然数 d について、$U_{d,\lambda} = W_d^* U_{1,\lambda} W_d$.

これにより、以下がわかる：

Lemma 4.2. 任意の解析写像 $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ と任意の自然数 d について、

$$U_{d,\lambda}^* = U_{d,\overline{\lambda}}, \quad U_{d,\lambda_1} U_{d,\lambda_2} = U_{d,\lambda_1 \lambda_2}.$$

さらに、

Lemma 4.3. 任意の解析写像 $\lambda \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ と任意の自然数 d について、$U_{d,\lambda}$ はユニタリ作用素である。

このようにしてユニタリであることがわかった $\ell_2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^d$ 上の作用素 $U_{d,\lambda}$ を、「モデル量子ウォーク」と呼ぶ。モデル量子ウォークについては、以下が基本的である：

Lemma 4.4. 任意の $\zeta \in \mathbb{T}$ に対し、列ベクトル

$$\left(1, \zeta^{-1}, \zeta^{-2}, \cdots, \zeta^{1-d}\right)^{\mathrm{T}}$$

は $\widehat{U_{d,\lambda}}(\zeta^d)$ の固有ベクトルであり、その固有値は $\lambda(\zeta)$ である。また、任意の $z \in \mathbb{T}$ に対して、集合

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{d}} \left(1, \zeta^{-1}, \zeta^{-2}, \cdots, \zeta^{1-d}\right)^{\mathrm{T}} \;\middle|\; \zeta^d = z \right\}$$

は $\mathbb{C}^d$ の正規直交基底をなす。ただし T は転置を表す。

Lemma 4.5. モデル量子ウォークのフーリエ逆変換 $\widehat{U_{d,\lambda}}(z)$ の特性多項式は

$$\prod_{\zeta\colon \zeta^d = z} (\lambda - \lambda(\zeta)) \in \mathcal{Q}_{\mathbb{T}}[\lambda].$$

となる。

4.2. **構造定理.** 以上の準備のもとに、次が示せる：

Theorem 4.6. $\widehat{U}$ を量子ウォーク U のフーリエ逆変換とする。任意の分解不能な固有値関数系

$$((d(1), \lambda_1), (d(2), \lambda_2), \cdots, (d(m), \lambda_m)),$$

に対し、ユニタリ行列値の解析写像 $\widehat{V}\colon \mathbb{T} \to M_n(\mathbb{C})$ が存在して

$$\widehat{U}(z) = \widehat{V}(z) \left(\widehat{U_{d(1),\lambda_1}}(z) \oplus \widehat{U_{d(2),\lambda_2}}(z) \oplus \cdots \oplus \widehat{U_{d(m),\lambda_m}}(z) \right) \widehat{V}(z)^*, z \in \mathbb{T}.$$

をみたす。

定理 4.6 にフーリエ変換を施せば、量子ウォークの構造定理が導かれる：

Theorem 4.7 (構造定理)**.** 任意の一様な量子ウォーク U は、モデル量子ウォークの直和と共役である。具体的には、$\widehat{U}$ の任意の分解不能な固有値関数系

$$((d(1), \lambda_1), (d(2), \lambda_2), \cdots, (d(m), \lambda_m))$$

に対し、$\ell_2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^n$ の解析的なユニタリ作用素 V が存在して、

$$U = V \left(U_{d(1),\lambda_1} \oplus U_{d(2),\lambda_2} \oplus \cdots \oplus U_{d(m),\lambda_m} \right) V^*.$$

をみたす。

この構造定理には、後述の極限定理をはじめ数多くの帰結がある。次節では、これらの帰結を導くために重要な「量子ウォークの分解可能性」を定義する。

4.3. **量子ウォークの分解可能性.**

Definition 4.8. （n-状態）量子ウォーク U が分解可能であるとは、

- 和が n となる自然数 $d(1)$ と $d(2)$
- （一様とは限らない）$d(1)$-状態量子ウォーク U_1,
- （一様とは限らない）$d(2)$-状態量子ウォーク U_2,
- $\ell_2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^n$ 上の解析的なユニタリ作用素 V

が存在して

$$U = V\,(U_1 \oplus U_2)\,V^*$$

をみたすことをいう。量子ウォークが分解可能でないとき、分解不能という。

分解不能な量子ウォークは、モデル量子ウォークと共役である：

Lemma 4.9. 一様な量子ウォーク U が分解不能なら、$\ell_2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^d$ 上の解析的なユニタリ作用素 V およびモデル量子ウォーク $U_{d,\lambda}$ が存在して、

$$U = VU_{d,\lambda}V^*.$$

をみたす。

Theorem 4.10. 一様な量子ウォーク U が分解不能である必要十分条件は、そのフーリエ逆変換 $\widehat{U}(z)$ の特性多項式 $f(\lambda; z)$ が $\mathcal{Q}_{\mathbb{T}}[\lambda]$ の既約多項式となることである。

Corollary 4.11. モデル量子ウォーク $U_{d,\lambda}$ が分解可能であるための必要十分条件は、そのフーリエ逆変換の特性多項式が「回転不変」、つまりある $c \in \{1, \cdots, d-1\}$ が存在して

$$\lambda\left(\exp\left(\frac{2\pi i c}{d}\right)\zeta\right) = \lambda(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{T}.$$

をみたすことである。

4.4. **連続時間量子ウォークによる実現.** 構造定理の帰結として、本節では、「（離散時間）量子ウォークを連続時間量子ウォークによって実現できるか？」という自然な問いに対する答えが与えられる。ここで実現というのは、（離散時間）量子ウォークを連続時間量子ウォークの「時刻」を自然数に制限することによって得られるということであり、煎じ詰めれば（離散時間）量子ウォークの生成子が連続時間量子ウォークの「時刻 1 」における作用素として書けるかという問題となる。まず、モデル量子ウォークについては次が成り立つ：

Theorem 4.12. $\lambda\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ を解析写像とする。もし λ の回転数が 0 ならば、*(*1-状態の解析的で一様な*)* 連続時間量子ウォーク

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto U^{(t)}$$

が存在して $U^{(1)} = U_{1,\lambda}$ をみたす。

補題 4.2 により、一般の場合のモデル量子ウォーク $U_{1,\lambda}$ は以下のように書き直せる（$w(\lambda)$ は $\lambda\colon \mathbb{T}\to\mathbb{T}$ の回転数を表す）。

$$U_{1,\lambda}=U_{1,z^{w(\lambda)}}U_{1,\zeta^{-w(\lambda)}\lambda(\zeta)}=S_{w(\lambda)}U_{1,\zeta^{-w(\lambda)}\lambda(\zeta)}.$$

$\zeta\mapsto\zeta^{-w(\lambda)}\lambda(\zeta)$ の回転数は 0 であるから、定理 4.12 により、モデル量子ウォーク $U_{1,\zeta^{-w(\lambda)}\lambda(\zeta)}$ は (1-状態の解析的で一様な) 連続時間量子ウォークにより実現できる。さらに一般の d については再配列を考えて、次が示せる：

Theorem 4.13. 任意の一様な量子ウォーク U は

$$U=V\left(\oplus_{j=1}^{m}W_{d(j)}^{*}S_{w(j)}U_{j}^{(1)}W_{d(j)}\right)V^{*}$$

と書ける。

したがって、任意の一様な量子ウォークは「（1-状態の解析的で一様な）連続時間量子ウォークをほんの少し変形したもの」の直和で書ける、ということである。このことが、量子ウォークと連続時間量子ウォークとが（通常の定義の見かけは随分違ったものであるにも関わらず)、極限分布の概形をはじめ「定性的」には似た性質をもつことの核心と考えられる。

さて、この表示を用いると、「量子ウォークが連続時間量子ウォークで実現できるのはいつか？」という問題に「量子ウォークの回転数」を用いた簡潔な答えが与えられる。

Theorem 4.14. 量子ウォーク U が *(*1-状態の解析的で一様な*)* 連続時間量子ウォークで実現できる（すなわち「時刻」を制限することで得られる）必要十分条件は、その回転数が 0 であることである。

5. 極限定理

5.1. 初期単位ベクトルの局所性.

構造定理 4.7 の式

$$U=V\left(U_{d(1),\lambda_1}\oplus U_{d(2),\lambda_2}\oplus\cdots\oplus U_{d(m),\lambda_m}\right)V^{*}$$

に登場する V^{*} は、一般に、初期単位ベクトルの「台の有限性」を保たない。しかし、より弱い意味での局所性を保つ。

量子系の「状態」にあたる単位ベクトル $\xi\in\ell_2(\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}^n$ に対し、$\mathbb{Z}$ 上の確率測度 $P[\xi]$ を（ボルンの確率規則に対応して）

$$P[\xi](\{s\})=\sum_{k=1}^{n}|\langle\delta_s\otimes\delta_k,\xi\rangle|^2,\quad s\in\mathbb{Z}.$$

と定義する。ある 1 より大きな実数 r が存在して、二つの数列

$$\left(r^{s}P[\xi](\{s\})\right)_{s\in\mathbb{Z}},\quad \left(r^{-s}P[\xi](\{s\})\right)_{s\in\mathbb{Z}}$$

が $\ell_1(\mathbb{Z})$ の要素であるとき、$P[\xi](\{s\})$ および ξ 自身を指数型であるという。

量子ウォークの研究においては、この型の確率測度が関心を集めてきた（例えば、[1] など。）この条件は、フーリエ逆変換 $(\mathcal{F}^{-1}\otimes \mathrm{id})\xi \in L^2(\mathbb{T},\mathbb{C}^n)$ が $\mathbb{T}$ 上で解析的であることと同値である。

いっぽう、極限定理の証明において重要な役割を果たす微分作用素についての議論のために、われわれはより広いクラスに注目する。任意の自然数 d について数列

$$\left\{(1+s^2)^d P[\xi](\{s\})\right\}_{s=-\infty}^{\infty}$$

が有界であるとき、$P[\xi](\{s\})$ および ξ 自身を急減少であるという。この条件は $(\mathcal{F}^{-1}\otimes \mathrm{id})\xi$ が、$\mathbb{T}$ 上で滑らかであることと同値である。

$\xi \in \ell_2(\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}^n$ が指数型で $\ell_2(\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}^n$ の作用素 V が解析的であるとき、$V^*\xi$ も指数型である。また、ξ が急減少で V が解析的であるとき、$V^*\xi$ も急減少である。

5.2. **極限分布.** U を量子ウォークとし、単位ベクトル（「初期単位ベクトル」）を ξ とすると、そこから $\mathbb{Z}$ 上の確率分布の列

$$P[\xi], P[U\xi], P[U^2\xi], P[U^3\xi], \cdots .$$

が定まる。任意の「時刻」$t\in\mathbb{Z}$ に対して、そこから $\phi\colon \mathbb{Z}\ni s\mapsto s/t\in\mathbb{R}$ によって押し出された $\mathbb{R}$ 上の確率測度

$$\phi_*^{(t)}(P[U^t\xi])$$

を考えよう。われわれの目標は、確率測度の列 $\{\phi_*^{(t)}(P[U^t\xi])\}_{t=1}^{\infty}$ がある（コンパクト台をもつ）確率測度に弱収束することを示すことにある。

極限分布を調べるため、$\ell_2(\mathbb{Z})$ 上の対角的な自己共役作用素

$$\frac{D}{t}\colon \delta_s \mapsto \frac{s}{t}\delta_s, \quad s\in\mathbb{Z}.$$

に着目する。そのフーリエ逆変換は $L^2(\mathbb{T})$ 上の自己共役作用素

$$\mathcal{F}^{-1}\frac{D}{t}\mathcal{F}\colon z^s\mapsto sz^s, \quad s\in\mathbb{Z}.$$

λ を $\lambda(z)$ と書けば、この作用素は微分作用素 $\dfrac{1}{t}z\dfrac{d}{dz}$ に他ならない。また、λ を $\lambda(e^{i\theta})$ と書けば、$\dfrac{1}{it}\dfrac{d}{d\theta}$ となる。$P[\xi]$ が急減少であるとき、ξ は $\left(\dfrac{D}{t}\right)^m$ の定義域に属する。

Lemma 5.1. ξ を $\ell_2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^n$ の急減少な単位ベクトルとするとき、任意の自然数 m に対し m 次モーメント $\phi_*^{(t)}(P[\xi])$ は有限であり、具体的には以下のように書ける：

$$\left\langle \left(\frac{D}{t} \otimes \mathrm{id} \right)^m \xi, \xi \right\rangle .$$

Lemma 5.2. $\lambda\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ を解析関数とし、U をモデル量子ウォーク $U_{1,\lambda}$ とする。$\xi \in \ell_2(\mathbb{Z})$ が急減少な単位ベクトルならば、$\left\{ \phi_*^{(t)}(P[U^t\xi]) \right\}_{t=1}^{\infty}$ ははコンパクト台をもつある確率測度に弱収束する。

さらに

Lemma 5.3. d を自然数、$\lambda\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ を解析関数、U をモデル量子ウォーク $U_{d,\lambda}$ とする。$\xi \in \ell_2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^d$ が急減少な単位ベクトルならば、$\left\{ \phi_*^{(t)}(P[U^t\xi]) \right\}_{t=1}^{\infty}$ はコンパクト台をもつある確率測度に弱収束する。

ここで構造定理を用いると、一般の量子ウォークの極限定理が示される：

Theorem 5.4. *[極限定理]* 任意の一様な量子ウォーク U と急減少な単位ベクトル ξ について、確率測度の列 $\left\{ \phi_*^{(t)}(P[U^t\xi]) \right\}_{t=1}^{\infty}$ はコンパクト台をもつある確率測度に弱収束する。

References

[1] T. Endo and N. Konno, The stationary measure of space-inhomogeneous quantum walk on the line, Yokohama Math. J. **60** (2014), 33-47.

[2] G. Grimmett, S. Janson and P. F. Scudo, Weak limits for quantum random walks, Phys. Rev. E, **69** (2004), 026119.

[3] N. Inui, N. Konno and E. Segawa, One-dimensional three-state quantum walk, Phys. Rev. E, **72** (2005), 056112.

[4] N. Konno, A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk, J. Math. Soc. Japan **57** (2005), no. 4, 1179-1195.

[5] P. W. Nowak and G. Yu, Large Scale Geometry, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, (2012).

[6] H. Saigo and H. Sako, Space-homogeneous quantum walks on $\mathbb{Z}$ from the viewpoint of complex analysis, available on arXiv (arXiv:1802.01837).

[7] 西郷甲矢人・酒匂宏樹, 解析的で一様な $\mathbb{Z}$ 上量子ウォーク：定義・構造定理・極限定理,『量子ウォークの新展開』（今野紀雄・井手勇介共編、培風館 2019）所収.