ドレスト光子の対称性

落合啓之 (Hiroyuki Ochiai) *

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所

Abstract

ドレスト光子の対称性とグラスマン多様体や旗多様体との関係を考察する。また、双対 Clebsch 変数の条件 $L_\nu C^\nu = 0$ の意味は何か、について旗多様体からの一つの解釈を与える。

1 Introduction

ドレスト光子と呼ばれるナノ領域における光子と電子の相互作用による現象を記述する量子場の方程式の対称性について考察する。特に、小嶋 [4] によって示唆された、グラスマン多様体や旗多様体との関係に対する一つの答えを与える。本文中の記号を用いて結果を短く述べると、テンソル S はグラスマン多様体と、テンソル T は旗多様体と関係づけられることを報告する。合わせて、双対 Clebsch 変数の条件 $L_\nu C^\nu = 0$ の意味は何か、という問題について、後者の枠組み（旗多様体）の中で議論する。

2 Clebsch parametrization

まず、ドレスト光子を記述した [1], [2], [3] の論文の記号を復習する。

(λ, ϕ) を Clebsch 変数とし、場が

$$U_\mu = \lambda \nabla_\mu \phi$$

と表示されているとする。これを Clebsch parametrization という。ただし、$\mu = 0, 1, 2, 3$ であり、添字の上げ下げは $g_{\mu\nu}$ で行う。また、Einstein の縮約記法をしばしば用いる。この U と後で出てくる場 S は、流体力学で velocity, vorticity を表す場

*e-mail: `ochiai@imi.kyushu-u.ac.jp`

を動機としている。ここでは、電磁気学の electromagnetic field, field of strength を表す。次に、スカラー場 ϕ, λ の gradient で得られるベクトル場を

$$C_\mu := \nabla_\mu \phi, \qquad L_\mu := \nabla_\mu \lambda$$

と定義する。これらの外積として、テンソルを

$$S_{\mu\nu} := C_\mu L_\nu - L_\mu C_\nu \tag{1}$$

と定める。そして、ここでは

$$C_\nu C^\nu = 0, \quad L_\nu C^\mu = 0, \quad L_\nu L^\mu = -\rho \tag{2}$$

と仮定する。

3 $\det(S) = 0$

以上の関係を対称性が見やすくなるように再定式化する。

3.1 2 次写像

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を標準的な 2 次の交代行列とする。${}^tJ = -J$ であり、$\det J = 1$ である。

2 つの列ベクトル $C, L \in \mathbb{R}^4$ を横に並べて、$\tilde{C} := (C, L) = \begin{pmatrix} C_0 & L_0 \\ C_1 & L_1 \\ C_2 & L_2 \\ C_3 & L_3 \end{pmatrix} \in M(4, 2, \mathbb{R})$ と略記する。ここで、$M(m, n, \mathbb{R})$ は、実数を成分とする m 行 n 列の行列全体である。$\tilde{C} = (C, L)$ に対して S を対応させる写像は

$$\mathbb{S} : M(4, 2, \mathbb{R}) \ni \tilde{C} \mapsto \tilde{C} J {}^t\tilde{C} \in \mathrm{Alt}(4, \mathbb{R})_{\mathrm{rk} \leq 2}$$

を定める。成分で書けば

$$\mathbb{S}_{\mu\nu}(\tilde{C}) = (\tilde{C} J {}^t\tilde{C})_{\mu\nu} = (C_\mu L_\mu) J \begin{pmatrix} C_\nu \\ L_\nu \end{pmatrix} = S_{\mu\nu}$$

である。これは (1) を再現している。ここで $\mathrm{Alt}(4, \mathbb{R})$ は実数を成分とする 4 次の交代行列全体を、$\mathrm{Alt}(4, \mathbb{R})_{\mathrm{rk} \leq 2}$ はそのうち、正則行列でないもの全体となる。交代行列の階数は必ず偶数なので、4 次の交代行列で正則でないものの階数は 2 または 0 である。J のサイズが 2 なので $\mathbb{S}$ の像は $\mathrm{Alt}(4, \mathbb{R})_{\mathrm{rk} \leq 2}$ に含まれる。実際には、像は $\mathrm{Alt}(4, \mathbb{R})_{\mathrm{rk} \leq 2}$ に一致する。$\mathbb{S}$ は 2 次写像を並べたものである。

3.2 $\mathbb{S}$ の不変性と共変性

写像 $\mathbb{S}$ の対称性を記述する。accidental isomorphism

$$\begin{aligned} SL(2,\mathbb{R}) &= \{h \in M(2,\mathbb{R}) \mid \det h = 1\} \\ &= Sp(2,\mathbb{R}) = \{h \in M(2,\mathbb{R}) \mid hJ^t h = J\} \end{aligned}$$

に注意する。この時、不変性

$$\mathbb{S}(\tilde{C}h) = \mathbb{S}(\tilde{C}), \quad \forall h \in SL(2,\mathbb{R})$$

が成り立つ。また、

$$GL(4,\mathbb{R}) = \{l \in M(4,\mathbb{R}) \mid \det l \neq 0\}$$

に対して、

$$\mathbb{S}(l\tilde{C}) = l\mathbb{S}(\tilde{C})^t l, \quad \forall l \in GL(4,\mathbb{R})$$

が成り立つ。すなわち、写像 $\mathbb{S}$ は $GL(4,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$-共変である。

$\mathrm{Alt}(4,\mathbb{R})$ は $GL(4,\mathbb{R})$ の作用に関して概均質ベクトル空間である。すなわち、正則行列のなす部分集合 $\mathrm{Alt}(4,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}=4} = \mathrm{Alt}(4,\mathbb{R}) \setminus \mathrm{Alt}(4,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}\leq 2}$ は $\mathrm{Alt}(4,\mathbb{R})$ の開集合であり、$GL(4,\mathbb{R})$ の軌道である。基本相対不変式は、Pfaffian

$$\mathrm{Pf}(S) = S_{01}S_{23} + S_{02}S_{31} + S_{03}S_{12}$$

である。$\mathrm{Alt}(4,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}\leq 2} = \{S \in \mathrm{Alt}(4,\mathbb{R}) \mid \mathrm{Pf}(S) = 0\}$ であり、$\{S \in \mathrm{Alt}(4,\mathbb{R}) \mid \pm\mathrm{Pf}(S) > 0\}$ が $\mathrm{Alt}(4,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}=4}$ の連結成分である。一般の相対不変式は基本相対不変式の冪であり、例えば、行列式は Pfaffian の 2 乗である。$\mathrm{Pf}(S)$ の符号数は $(3,3)$ であり、概均質ベクトル空間 $\mathrm{Alt}(4,\mathbb{R})$ は、不定値直交群 $SO_0(3,3)$ の作用する $\mathbb{R}^6$ と局所同型である。すなわち、$SL(4,\mathbb{R}) \to SO_0(3,3)$ という 2 重被覆写像が存在して、線形同型 $\mathrm{Alt}(4,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^6$ は群作用に関して共変である。さらにこれら 2 つの群を含む $GL(4,\mathbb{R}) \to GO(3,3)$ という群準同型が存在する。$\mathbb{R}^6$ の符号数 $(3,3)$ の 2 次形式 q をスカラー倍を除いて保つ変換の全体、相似変換群を

$$GO(3,3) = \left\{l \in GL(6,\mathbb{R}) \mid q(lx) = c_l\, q(x), \exists c_l \in \mathbb{R}^\times, \forall x \in \mathbb{R}^6\right\}$$

と定義する。

一般の自然数 m に対しても、$\mathrm{Alt}(m,\mathbb{R})$ は $GL(m,\mathbb{R})$ の作用に関する概均質ベクトル空間である。ただし、定数でない不変式が存在するのは m が偶数の場合であり、その時の基本相対不変式の次数は $m/2$ である。つまり、2 次形式を相対不変式とする概均質ベクトル空間となるのは、$m = 4$ の時に限られる。この偶然の同型 (accidental isomorphism) が豊かな構造を与える。

4 Grassmann 多様体

$M(4,2,\mathbb{R})$ も $GL(4,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})$ の作用に関して概均質ベクトル空間である。すなわち、$M(4,2,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}=2}$ は full rank の行列全体のなす $M(4,2,\mathbb{R})$ の開部分集合であり、しかも $GL(4,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})$ 軌道である。この概均質ベクトル空間の相対不変式は定数関数に限られる。写像 $\mathbb{S}$ を詳しくみると、

Lemma 4.1.

$$\mathbb{S}(M(4,2,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}\le 1}) = \{0\},$$
$$\mathbb{S}(M(4,2,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}=2}) = \mathrm{Alt}(4,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}=2}$$

となっている。

さらに、$\mathbb{S}$ の $SL(2,\mathbb{R})$ 不変性から、 $\mathbb{S}$ は商空間からの写像を誘導することがわかる：

$$M(4,2,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}=2}/SL(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{Alt}(4,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}=2}$$

この写像は 5 次元の連結な代数多様体の間の同型を与えている。さらに 0 でないスカラー倍の全体 $\mathbb{R}^\times$ で両方を割ると

$$M(4,2,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}=2}/GL(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{Alt}(4,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}=2}/\mathbb{R}^\times \tag{3}$$

という、射影多様体の間の同型写像が得られる。この左側の空間は自然にグラスマン多様体 $\mathrm{Grass}(4,2,\mathbb{R})$ と同一視される。ここで $\mathbb{R}^N$ の k 次元部分線形空間の全体を $\mathrm{Grass}(N,k,\mathbb{R})$ と書く。なお、グラスマン多様体は様々な記号 GM, Gr などを用いて書かれることがあり、[4] では $\mathrm{Grass}(4,2,\mathbb{R})$ を $GM(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ と書いている。データ $\tilde{C}$ は $\mathbb{R}^4$ の 2 本のベクトルを与えていて、$\mathrm{rk}=2$ の条件からその 2 本のベクトルは１次独立なので、その 2 本の張るベクトル空間が $\mathbb{R}^4$ の 2 次元ベクトル空間を１つ与える。$GL(2,\mathbb{R})$ はその 2 次元部分空間の基底の取り換えの全体を表している。

$\mathbb{R}^4$ の 2 本の 1 次独立なベクトルは、あと 2 本のベクトルを付け加えることで自然に $\mathbb{R}^4$ の基底に延長できる。これはグラスマン多様体の $GL(4,R)/P$ という等質空間としての表示を与える。ここで P は $(2,2)$ 型の極大放物型部分群である：$P = \left\{\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \in GL(4,\mathbb{R})\right\}$. 上の写像 (3) は Plücker 埋め込みを与える写像であり、像の定義式が Pfaffian で与えられる。

5　対称性の破れ

一般線形群 $GL(4,\mathbb{R})$ を部分群 $O(1,3)$ に制限する。

5.1　不変性と共変性

$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とし、対応するローレンツ群を

$$O(1,3) = \{l \in M(4,\mathbb{R}) \mid lg^t l = g\}$$

と定める。この計量に対応する Gram 行列（すなわち内積を表に並べ書きした行列）を与える写像を

$$\mathbb{G} : M(4,2,\mathbb{R}) \ni \tilde{C} \mapsto {}^t\tilde{C}g\tilde{C} \in \mathrm{Sym}(2,\mathbb{R})$$

と定める。ここで $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ は n 次実対称行列の全体である。この写像 $\mathbb{G}$ は $GL(4,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})$ 共変である：

$$\mathbb{G}(l\tilde{C}) = \mathbb{G}(\tilde{C}), \quad \forall l \in GL(4,\mathbb{R}),$$
$$\mathbb{G}(\tilde{C}h) = {}^t h\mathbb{G}(\tilde{C})h, \quad \forall h \in SL(2,\mathbb{R}).$$

一般の自然数 n に対して、$\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ は $GL(n,\mathbb{R})$ の作用に関する概均質ベクトル空間である。基本相対不変式は行列式である。

5.2　off-shell 条件の解釈

以上の準備のもとで、

$$R := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix}$$

と定義する。特に $R \in \mathrm{Sym}(2,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}\le 1}$ であることに注意しよう。式 (2) で与えた仮定 (off-shell を表す条件) は、写像 $\mathbb{G}$ を用いると、

$$\mathbb{G}(\tilde{C}) = R$$

と述べることができる。これを動機として、

$$Y := \mathbb{G}^{-1}(\mathrm{Sym}(2,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}\le 1}) \subset M(4,2,\mathbb{R})$$

と定める。これは $GL(4,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})$ 不変な部分集合である。さらに、

$$S^1 := \{\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v_1^2 + v_2^2 = 1\}$$

と定め、Veronese 埋め込み[1]を

$$\mathbb{V}_2 : S^1 \times \mathbb{R}^\times \ni (\mathbf{v}, -\rho) \mapsto -\rho \mathbf{v}^t \mathbf{v} \in \mathrm{Sym}(2,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}\le 1}$$

によって定める。２つの写像

$$\begin{aligned} &\mathbb{G} : Y \longrightarrow \mathrm{Sym}(2,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}\le 1}, && \tilde{C} \mapsto \mathbb{G}(\tilde{C}), \\ &\mathbb{V}_2 : S^1 \times \mathbb{R}^\times \to \mathrm{Sym}(2,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}\le 1}, && (\mathbf{v}, -\rho) \mapsto -\rho \mathbf{v}^t \mathbf{v} \end{aligned}$$

のファイバー積として、空間を

$$\begin{aligned} Z &:= Y \times_{\mathrm{Sym}(2,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}\le 1}} (S^1 \times \mathbb{R}^\times) \\ &= \{(\tilde{C}, \mathbf{v}, -\rho) \in M(4,2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times \mid \mathbb{G}(\tilde{C}) = -\rho \mathbf{v}^t \mathbf{v}\} \end{aligned}$$

と定め、写像を

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\tilde{\mathbb{V}}_2"] \arrow[d, "\tilde{\mathbb{G}}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "\mathbb{G}"] \\ S^1 \times \mathbb{R}^\times \arrow[r, "\mathbb{V}_2"'] & \mathrm{Sym}(2,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}\le 1} \end{tikzcd}$$

と定める。

5.3　テンソル $\hat{T}$

さて、

$$\hat{T}_\mu^\nu := -S_{\mu\sigma} S^{\nu\sigma}$$

と定めると、(2) より

$$\hat{T}_\mu^\nu = \rho C_\mu C^\nu$$

となることが [1] で証明されている。この事実の解釈を与えよう。

　まず、２乗に当たる写像を $O(1,3)$ 共変性を考慮に入れて

$$\mathbb{T} : \mathrm{Alt}(4,\mathbb{R}) \ni S \mapsto -SgS \in \mathrm{Sym}(4,\mathbb{R})$$

[1] 複素数体では $z \mapsto z^2$ が全射になるが、実数体では半分しか覆わないので、その分をケアする必要があるためスカラー倍を別扱いしている。

と定める。共変性

$$\mathbb{T}(lS^tl) = l\mathbb{T}(S)^tl, \quad \forall l \in O(1,3)$$

が成り立つ。

前節の準備によって、定義した空間 Z からの写像

$$\Phi : Z \ni (\tilde{C}, \mathbf{v}, -\rho) \mapsto (\tilde{C}J\mathbf{v}, -\rho) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^\times$$

を定め[2]、

$$\mathbb{V}_4 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^\times \ni (\mathbf{w}, -\rho) \mapsto \rho\mathbf{w}^t\mathbf{w} \in \mathrm{Sym}(4,\mathbb{R})_{\mathrm{rk}\le 1}$$

と定める。この２つの写像の合成写像が $\mathbb{T}$ である。実際、

$$\begin{aligned}\mathbb{T}\circ\mathbb{S}(\tilde{C}) &= -(\tilde{C}J^t\tilde{C})g^t(\tilde{C}J^t\tilde{C}) = -\tilde{C}J\mathbb{G}(\tilde{C})^tJ^t\tilde{C}\\ &= -\tilde{C}J\rho\mathbf{v}^t\mathbf{v}^tJ^t\tilde{C} = \mathbb{V}_4((\tilde{C}J\mathbf{v}, -\rho)) = (\mathbb{V}_4\circ\Phi)((\tilde{C}, \mathbf{v}, -\rho))\end{aligned}$$

によって確かめられる。これらは Grassmann 多様体や旗多様体と次のような図式で繋がる：

$$\begin{array}{ccccccc}
Y & \xleftarrow{\tilde{\mathbb{V}}_2} & Z & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^\times & \xrightarrow{\mathbb{V}_4} & \mathrm{Sym}(4)_{\mathrm{rk}\le 1}\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\mathrm{Grass}(4,2,\mathbb{R}) & \longleftarrow & \mathrm{Flag}(4;1,1,2,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Grass}(4,1,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Grass}(4,1,\mathbb{R})
\end{array}$$

これがこの小文の主結果である。旗多様体 $\mathrm{Flag}(N;k_1,k_2,\ldots,k_r)$ with $k_1+k_2+\cdots+k_r = N$ は増大する部分空間の列 $V_1\subset V_2\subset\cdots\subset V_r = \mathbb{R}^N$ で、次元条件 $\dim V_1 = k_1, \dim V_2 = k_1+k_2, \ldots, \dim V_{r-1} = k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}$ を満たすものの全体である。例えば、

$$\mathrm{Flag}(4;1,1,2,\mathbb{R}) = \{(V_1,V_2) \mid \dim V_1 = 1, \dim V_2 = 2, V_1\subset V_2\subset\mathbb{R}^4\}$$

である。これは Grassmann 多様体の直積の中の incidence variety

$$\mathrm{Flag}(4;1,1,2,\mathbb{R}) = \{(V_1,V_2)\in\mathrm{Grass}(4,1,\mathbb{R})\times\mathrm{Grass}(4,2,\mathbb{R}) \mid V_1\subset V_2\}$$

としても実現されている。今の言葉遣いで、それを述べ直せば、$\tilde{C}\mathbf{w}$ は $\tilde{C}$ の定める２次元部分空間 V_2 の中の直線 V_1 を定める方向ベクトルである。写像

$$\mathrm{Grass}(4,2,\mathbb{R}) \longleftarrow \mathrm{Flag}(4;1,1,2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Grass}(4,1,\mathbb{R})$$

[2] J が不自然に挟まっているように見えるが、写像の compatibility のために後に必要となる補正である。

は、Radon 変換や Hecke 対応などでよく利用されている double fibration であり、その視点からは、ここで話題としている写像 $\hat{T}$ はそれを直線束に持ち上げたものと考えられる。

特に $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S^1$ の時にこれらの写像を具体的に計算すると

- $\mathbb{V}_2((\mathbf{v}, -\rho)) = -\rho\mathbf{v}^t\mathbf{v} = R$,
- $(\mathbf{w}, -\rho) = \Phi((\tilde{C}, \mathbf{v}, -\rho)) = (\tilde{C}J\mathbf{v}, -\rho) = (C, -\rho)$,
- $\mathbb{V}_4((\mathbf{w}, -\rho)) = \rho\mathbf{w}^t\mathbf{w} = \rho C^t C = \hat{T}$.

となり、[1] の結果と符丁している。というか、そうなるように、空間 Z や写像 Φ を定めた。Φ の定義に一見役割がはっきりしない J が挟まっているのはそのためである。上の大きな可換図式は、これが $\mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})_{\mathrm{rk}=1}$ の一点 R の上だけでなく、$GL(2, \mathbb{R})$ 共変になるように $\mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})_{\mathrm{rk}=1}$ の上に延長されたものとみなすことができる。$GL(2, \mathbb{R})$ の $\mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})_{\mathrm{rk}=1}$ への作用は推移的である。もちろん、Clebsch 変数の立場からは C, L の役割は対等でなく、特別な isotropic な方向 C を選択することになっている。この特別な方向の選択は、等質空間 $GL(2, \mathbb{R})/B$, B は Borel 部分群, でコントロールされている。

6 まとめ

以上のように、テンソル S はグラスマン多様体 $\mathrm{Grass}(4, 2, \mathbb{R})$ と密接に関係し、テンソル $\hat{T}$ は旗多様体 $\mathrm{Flag}(4; 1, 1, 2, \mathbb{R})$ と関係していることがわかった。以前の報告 [6] では、複素数体で議論を簡易に逃れていたところを、ここでは実数体で丁寧に記述した。当然のことながら、複素数体では連結性や全射性などが当たり前であったところが、実数体上では、直交群の連結成分に関するデリケートな問題が発生した。これを今回クリアした。

References

[1] H. Sakuma, I. Ojima, and M. Ohtsu, Gauge symmetry breaking and emergence of Clebsch-dual electromagnetic field as a model of dressed photons, Appl. Phys. A (2017) 123:750, DOI 10.1007/s00339-017-1364-9.

[2] H. Sakuma, I. Ojima, and M. Ohtsu, Dressed photons in a new paradigm of off-shell quantum fields, Progress in Quantum Electronics **55**, 74–87 (2017).

[3] H. Saigo, I. Ojima, and M. Ohtsu, Dressed photons from the viewpoint of photon localization: the entrance to the off-shell science, Appl. Phys. A (2017) 123:724, DOI 10.1007/s00339-017-1345-z.

[4] I. Ojima, Theoretical formulation of dressed photons, in ドレスト光子に関する基礎的数理研究, MIR vol. 14, 105–125, (2019).

[5] H. Ochiai, Symmetry of dressed photons, in ドレスト光子に関する基礎的数理研究, MIR vol. 15, 149–155, (2019).

[6] H. Ochiai, Symmetry on dressed photons, in Basic mathematical studies on dressed photon phenomena, ドレスト光子に関する基礎的数理研究, MIR vol. 19, 165–184, (2020).

[7] H. Sakuma, I. Ojima, M. Ohtsu, and H. Ochiai, Off-Shell Quantum Fields to Connect Dressed Photons with Cosmology, Symmetry, 2020, 12(8), 1244; https://doi.org/10.3390/sym12081244.

[8] Misa Hamano and H. Saigo, Quantum walk and dressed photon, MIR vol. 19, 88–97, (2020)

[9] H. Tamaru, 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part I,II,III, IV (2014–2018).