対合有界なBCK-代数からできる束のイデアルについて

(On the Ideals of a Lattice derived from an Involutive Bounded BCK-Algebra)

箕面学園高等学校　熊澤　昌明

Masaaki Kumazawa

Minoh Gakuen High School

1　準備と背景

1966 年に井関清志先生は, 論文 [3] において BCK-代数を定義した.
まず, その BCK-代数の定義を確認する.

定義 1.1（BCK-代数)　定数 0 と二項演算 * を持つ $<2,0>$ 型の代数 $X =< X; *, 0 >$ が BCK-代数であるとは, X の任意の元 x, y, z に対して, 次の 5 つの条件 (I)〜(V) を満たすものである.

(I)　$\{(x * y) * (x * z)\} * (z * y) = 0,$
(II)　$\{x * (x * y)\} * y = 0,$
(III)　$x * x = 0,$
(IV)　$0 * x = 0,$
(V)　$x * y = 0$ かつ $y * x = 0$　ならば　$x = y.$

このとき, 次のように BCK-代数に, 演算 $*$ を使って関係 $\leqq$ を入れる.

$x * y = 0$ であるとき, そのときに限り $x \leqq y$ とする.

この関係 $\leqq$ は, BCK-代数において順序関係となることが知られている.

次に, 1974 年に井関清志先生, 1975 年に田中昭太郎先生によって与えられた BCK-代数の重要な特別なクラスの定義を述べる.

定義 1.2（可換 BCK-代数 : S. Tanaka [9],[10], K. Iséki and S. Tanaka [6]）
BCK-代数 X 上に, 演算 $*$ を用いることによって新たな二項演算 $\wedge$ を, X の任意の 2 元 x, y に対して　$x \wedge y = y * (y * x)$　と定義する. ここで, X の 2 元 x, y に対して, 次の条件

(VI)　$x \wedge y = y \wedge x$

を常に満たすとき, BCK-代数 X は可換 BCK-代数と呼ばれる.

定義 1.3（有界 BCK-代数 : K. Iséki [4], K. Iséki and S. Tanaka [6]）
BCK-代数 X において, X の任意の元 x に対して $x \leqq 1$ を満たす特別な元 1 が存在するとき, BCK-代数 X は有界 BCK-代数と呼ばれる

上の定義 1.2 と定義 1.3 より, 次の定理が知られている.

定理 1.4 (S. Tanaka [9], K. Iséki and S. Tanaka [6], T. Traczyk [11])
有界で, 更に可換な BCK-代数 $X =< X; *, 0, 1 >$ において, 演算 $*$ を用いて次のように二項演算 $\wedge, \vee$ と一項演算 N を定義する;

$$x \wedge y = y * (y * x),\ Nx = 1 * x,\ x \vee y = N(Nx \wedge Ny).$$

このとき, $X =< X; \wedge, \vee, N, 0, 1 >$ は演算 $\wedge, \vee$ に関して分配束となり, 更に演算 $\wedge, \vee, N$ に関してド・モルガンの法則を満たすので, ド・モルガン代数となる.

従って, 有界可換 BCK-代数 $X =< X; *, 0, 1 >=< X; \wedge, \vee, N, 0, 1 >$ は演算 $\wedge, \vee$ に関して束となっている. この事実より, 次のような問題を考える.

問題. 1　BCK-代数全体において, 有界可換 BCK-代数全体のつくるクラスよりも真に大きいクラスであり, 更に束にもなっているクラスは存在するのか？

2　対合有界な BCK-代数

まず, 1 つの例を与える.

例 2.1　集合 $X = \{0, a, b, 1\}$ を半順序集合とし, その順序関係は $0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ を満たしているものとする. このとき, 集合 X には, この順序関係を満たしながら, 次の, 異なる 6 種類の非同型な BCK-代数の構造が存在する.

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	a	0	0
1	1	b	a	0

乗積表 2.1

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	b	0	0
1	1	b	a	0

乗積表 2.2

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	a	0	0
1	1	a	a	0

乗積表 2.3

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	b	0	0
1	1	1	b	0

乗積表 2.4

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	a	0	0
1	1	1	1	0

乗積表 2.5

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	b	0	0
1	1	1	1	1

乗積表 2.6

事実.A　演算 $*$ が乗積表 2.1 で与えられる BCK-代数 X は, 有界可換 BCK-代数であり, 更に X の任意の元 x に対して, 常に $NNx = x$ が成り立つ.

事実.B　演算 $*$ が乗積表 2.2 で与えられる BCK-代数は, 可換 BCK-代数ではないが, X の任意の元 x に対して, 常に $NNx = x$ が成り立つ.

一般に, 有界可換 BCK-代数に対して, 次の定理が成り立つ.

定理 2.2（K. Iséki and S. Tanaka [6]） 有界可換BCK-代数 $X =< X; *, 0, 1 >$ において, X の任意の元 x に対して, 常に $NNx = x$ が成り立つ.

事実.A は定理 2.2 が成立することの一つの具体例を与えているが, 事実.B はその定理の逆が一般に成立しないことを示している. このことを受けて, 次の定義を与える.

定義 2.3（対合有界 BCK-代数：Y. S. Huang [2]） 有界 BCK-代数 X において, X の任意の元 x に対して一項演算 N が対合性：$NNx = x$ を満たすとき, この BCK-代数 X を対合有界 (involutive bounded) であると呼ぶ.

他方, BCK-代数における任意の 2 元に対する下限の存在に関しては, 以下の結果が得られている. (M. Kumazawa [8] より)

定義 2.4($(\mathrm{I})_{x,y}$-条件) BCK-代数 X の 2 元 x, y に対して, X の元 z が存在し, 以下の (i)〜(iii) の条件を満たすとき, z は $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たすという.

(i) $z \leqq x,\ z \leqq y,$
(ii) $x * z \leqq x * y,$
(iii) $y * z \leqq y * x.$

定義 2.5（単一 $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件） BCK-代数 X の 2 元 x, y に対して, X の元 z が $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす唯一つの元であるとき, z は単一 $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たすという.

更に, 定義 2.5 より BCK-代数の中の特別なクラスを, 次のように定義する.

定義 2.6（(I)-条件を持つ BCK-代数） BCK-代数 X の任意の 2 元 x, y に対して, 単一 $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件満たす元 z が X に存在するとき, BCK-代数 X を (I)-条件を持つ BCK-代数という. このとき x, y に対して元 z は唯 1 つ定まるので z を $x \times y$ と表すことにする. 即ち $z = x \times y = y \times x$ が成立する.

このクラスは, 次の性質を持つ.

定理 2.7 BCK-代数が演算 $\times$ に関して下半束となる条件は, BCK-代数が (I)-条件を持つことと同値である.

この (I)-条件を持つ BCK-代数のクラスは, 可換 BCK-代数よりも真に広いクラスであり (例 2.1 を参照), 更に演算 $\times$ に関して下半束となる. ここで最初の問題の解答となる次の定理が得られる.

定理 2.8 (I)-条件を持つ対合有界な BCK-代数は, 演算 $\times, \vee_\times$ に関して束となる. ただし, 演算 $\vee_\times$ は X の 2 元 x, y に対して $x \vee_\times y = N(Nx \times Ny)$ と定める. 更に, 演算 $\times, \vee_\times, N$ に関してド・モルガンの法則も満たす.

証明 始めに, (I)-条件を持つ対合有界な BCK-代数 X が, 積 $\times$ と和 $\vee_\times$ に関して束となることを示す.
まず, 定理 2.7 より X の任意の 2 元 x, y に対して, $x \times y$ は x と y の下限となる.
次に, 2 元 x, y に対して, $x \vee_\times y$ が上限となることを示す.
演算 $\times$ の定義より

$$Nx \times Ny \leqq Nx,\ Nx \times Ny \leqq Ny \tag{2.1}$$

更に, X が有界であることより

$$x \leqq y \Rightarrow Ny \leqq Nx \tag{2.2}$$

ここで, (2.1), (2.2) と X が対合有界であることより

$$N(Nx \times Ny) \geqq NNx = x,\ N(Nx \times Ny) \geqq NNy = y \tag{2.3}$$

(2.3) より $x \vee_{\times} y = N(Nx \times Ny)$ は x と y の共通の上界の一つであることがわかる.
ここで, x と y の任意の共通の上界を u とする. 即ち, 条件 $x \leqq u,\ y \leqq u$ を満たすものとする.
この元 u について考える. すると, $Nu \leqq Nx,\ Nu \leqq Ny$ であり, Nu は Nx と Ny の共通の下界であることがわかる.
一方, $Nx \times Ny$ は Nx と Ny の下限, 即ち Nx と Ny の最大の下界であるので, $Nu \leqq Nx \times Ny$ を満たす. ここで, X の対合有界性より

$$x \vee_{\times} y = N(Nx \times Ny) \leqq NNu = u \tag{2.4}$$

(2.4) より, $x \vee_{\times} y$ は x と y の任意の共通の上界 u より小さいことがわかる, 即ち, $x \vee_{\times} y$ は x と y の, 最小の共通の上界であるので, x と y の上限となる.

次に, X 上でド・モルガンの法則を満たすことを示す.
X の任意の 2 元 x, y に対して, 次が成立する.

$$Nx \vee_{\times} Ny = N(N(Nx) \times N(Ny)) = N(x \times y) \tag{2.5}$$

$$N(x \vee_{\times} y) = N(N(Nx \times Ny)) = Nx \times Ny \tag{2.6}$$

(2.5) と (2.6) によってド・モルガンの法則が示された.

□

注意 「(I)-条件を持つ対合有界な BCK-代数は分配束である.」と予想するが, まだ分配性の証明はできていない.

3 (I)-条件を持つ対合有界なBCK-代数のイデアル

まず, BCK-代数と束, それぞれに定義されたイデアルを確認する.

定義 3.1（BCK-代数のイデアル : K. Iséki [5]） BCK-代数 X の空でない部分集合 A が, 次の 条件 (i), (ii) を満たすとき BCK-代数の井関のイデアルと呼ばれている.

X の 2 元 x, y に対して,

(i) $0 \in A$,
(ii) $y * x \in A,\ x \in A$ ならば $y \in A$.

定義 3.2（束のイデアル : G. Birkhoff [1]） 束 L の空でない部分集合 I が, 次の条件 (1),(2) を満たすとき束のイデアルと呼んでいる.

L の 3 元 a, b, x に対して,

(1) $a \in I,\ x \in L,\ x \leqq a$ ならば $x \in I$,
(2) $a \in I,\ b \in I$ ならば $a \vee b \in I$.

問題. 2 上記の 2 種類のイデアルは異なる代数の上に定義されたものであるが, (I)-条件を持ち対合有界な BCK-代数は, BCK-代数の構造も束の構造もどちらも持っている. このとき, 2 種類のイデアルの間にどのような関係があるのか？

この問題に関連して, 先に次の定理が得られている.

定理 3.3（M. Kumazawa [7]）　有界可換 BCK-代数 $X =< X; *, 0, 1 > =< X; \wedge, \vee, 0, 1 >$ の井関のイデアルは, 演算 $\wedge, \vee$ に関して束のイデアルでもある.

(I)-条件を持ち対合有界な BCK-代数は有界可換 BCK-代数より真に広いクラスである. この場合に次の結果が得られた.

定理 3.4　(I)-条件を持ち対合有界な BCK-代数 $X =< X; *, 0, 1 >=< X; \times, \vee_\times, 0.1 >$ の井関のイデアルは, 演算 $\times, \vee_\times$ に関して束のイデアルでもある.

証明　束のイデアルであることを示すには, 定義 3.2 の条件 (1),(2) を示せばよい.
まず, 条件 (1) を示す. $X \supset A$ を井関のイデアルとすると, 仮定 $x \leqq a$ と条件 (i) より $x * a = 0 \in A$. ここで, $a \in A, x * a \in A$ より, 条件 (ii) より $x \in A$. これで, 条件 (1) は示された.
次に, 条件 (2) を示す. この条件 (2) の成立を示すには, 次の等式 (3.1) が示されれば, 条件 (1) の証明と同様の方法で示すことができる.

$$\{(x \vee_\times y) * y\} * x = 0 \tag{3.1}$$

(3.1) を示すために, $(x \vee_\times y) * y \leqq x$ を示す.
X は対合有界であるので $x * y = Ny * Nx$ が成立し, 更に X は (I)-条件を持っているので,

$$\begin{aligned}(x \vee_\times y) * y &= N(Nx \times Ny) * y \\ &= Ny * (Nx \times Ny) \\ &\leqq Ny * Nx \\ &= x * y \\ &\leqq x\end{aligned}$$

これで, (3.1) は示されたので, 条件 (2) も示された.

□

注意　なお, 有界可換 BCK-代数における積 $\wedge$ は積 $\times$ と一致し, 和 $\vee$ は和 $\vee_\times$ と一致しているので, 定理 3.4 は定理 3.3 の拡張であるといえる.

補遺　BCK-代数における対合有界（involutive bounded）の概念は, 初め Y. S. Huang [2] によって”*involutory* BCK-algebra” という名称で定義されたが, 環論において対合環を”involutive ring” と呼んでいることを参考にして, この論文では”*involutive bounded* BCK-algebra” と呼ぶことにした.

参考文献

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory (Third edition)*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, (1967).

[2] Y. S. Huang, On Involutory BCK-Algebras, *Soochow J. Math.*,**32**(2006), 51-57.

[3] K. Iséki, An Algebra Related with a Propositional Calculus, *Proc. Japan Acad.*,**42**(1966), 26-29.

[4] K. Iséki, Some Properties of BCK-algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe Univ.*,**2**(1974), 193-201.

[5] K. Iséki, On Ideals in BCK-Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe Univ.*,**3**(1975), 1-12.

[6] K. Iséki and S. Tanaka, Introduction to the theory of BCK-algebras, *Math. Japonica.*, **23** (1978), 1-26.

[7] M. Kumazawa, A Remark on the Ideal of BCK-Algebras and Lattices, *Int. J. Algebra*, **13**(2019), 493-497. http://doi.org/10.12988/ija.2019.91042

[8] M. Kumazawa, A New Class in BCK-Algebras, (*Scientiae Math. Japonica.* に掲載予定).

[9] S. Tanaka, A New Class of Algebra, *Mathematics Seminar Notes Kobe Univ.*, **3** (1975), 37-43.

[10] S. Tanaka, On $\wedge$-Commutative Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe Univ.*, **3** (1975), 59-64.

[11] T. Traczyk, On the Variety of Bounded Commutative BCK-Algebras, *Math. Japonica.*,**24**(1979), 283-292.

This work was supported by Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Resarch Center located in Kyoto University.

（コロナ・ウイルスの休みに記す, 2020.5.7)