QUOTIENTS OF INVERSE SEMIGROUPS AND ÉTALE GROUPOIDS

慶應義塾大学理工学研究科 紅村 冬大
FUYUTA KOMURA
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KEIO UNIVERSITY

Abstract. 本稿では逆半群 (inverse semigroup), エタール亜群 (étale groupoid) の関係について紹介する. 特に, 逆半群, エタール亜群のそれぞれの商がどのように関係するかについて, 筆者の研究成果を解説する.

1. Introduction

本稿では筆者の論文 [5], [4] を概説することを目的とする. これらの論文で扱う主な対象は逆半群 (inverse semigroup), エタール亜群 (étale groupoid) と C*環 (C*-algebra) である. 本稿では, 特に逆半群とエタール亜群の関係について着目する. 逆半群は完全に代数的な対象であり, エタール亜群は位相と代数の構造を兼ね備えた対象である. C*環論は関数解析の一分野として扱われている. ここで, これらの対象の関係を簡単に説明する.

作用素環論は Hilbert 空間上の作用素がなす代数を扱う分野であり, 関数解析の一分野として扱われる. 作用素環は一般に無限次元であり位相を考えることが重要となるが, 扱う位相の差異によって作用素環論は C*環論, von Neumann 環論に分かれる. 本稿で扱う C*環論では, 主にノルムから定まる位相を用いる. C*環を定義すること自体は難しくはないが, 様々な具体例を構成することは困難であった. 今では様々な C*環の構成法が考えられており, その中の一つにエタール亜群を用いるものがある (Renault[10] による). 亜群とは全ての射が可逆となるような小圏である. 圏の構造と両立する位相を備えた亜群は位相亜群と呼ばれるが, その中でも特にある離散性を持つ位相亜群をエタール亜群と呼ぶ. エタール亜群が与えられると, その上の convolution algebra を完備化することによって亜群 C*環と呼ばれる C*環が得られる. 亜群 C*環の性質をエタール亜群の言語で特徴付ける研究は数多くの研究者によってなされている. 亜群 C*環のイデアル構造については [2], nuclearity などの解析的な性質については [1] が詳しい. [5] では, 亜群 C*環のアーベル化をエタール亜群の言語で記述した.

エタール亜群は様々な状況で得られる. 例えば, 離散力学系や多様体上の葉層構造からエタール亜群が得られる. 本稿では逆半群から得られるエタール亜群に着目する. 一般に, 逆半群が位相空間に作用している時, エタール亜群を構成することができる ([8] を参照せよ). また, 逆半群の作用を考える動機は, [7] で述べられているように, フラクタル図形などが持つ “local symmetry” を記述することにある. 逆半群はその idempotent semilattice のスペクトラムに作用するので, 本稿ではこの作用から得られるエタール亜群に着目する.

この作用から得られるエタール亜群は逆半群の universal groupoid と呼ばれ, Paterson により定義, 研究された [8]. 逆半群と universal groupoid の関係が判明すれば, 前述の亜群 C*環の研究と合わせることで C*環論の現象に逆半群を用いた記述が得られる. Exel はこのような動機で研究を行っており [3], 筆者もその後を追っている. [4] では, 逆半群の商と universal groupoid の商, 不変集合の関係について述べた. なお, エタール亜群の商, 不変集合を調べることは亜群 C*環のイデアルを調べることと対応している研究である. 逆に, エタール亜群や亜群 C*環に対し自然に考えられる概念が逆半群の理論にも輸入される.

次節より, [5], [4] における結果と関連する定義やその性質について解説する.

2. 逆半群

本節では逆半群に関する基本的な概念を解説する. 省略した証明に関しては [7] などの教科書を参照せよ.

S を半群とする. 任意の $s \in S$ に対し

$$s^*ss^* = s^*, ss^*s = s$$

となるような $s^* \in S$ が一意に存在する時, S を逆半群と呼ぶ. s^* は s の一般化逆元 (generalized inverse) と呼ばれる.

S の冪等元全体からなる集合を $E(S)$ と書く, つまり

$$E(S) := \{e \in S \mid e^2 = e\}$$

とする. $E(S)$ の元は互いに可換であり, かつ $E(S)$ は S の部分逆半群になることが知られている.

Example 2.1. X を集合とする. $I(X)$ を, X 上の partial bijection 全体からなる集合とする;

$$I(X) := \{f \colon U \to V \mid U, V \subset X,\ f \text{ は全単射 }\}.$$

写像の合成によって $I(X)$ の積が定まる. また, $f \in I(X)$ に対し $f^* := f^{-1}$ とすれば, $I(X)$ は逆半群となる. partial bijection$f \colon U \to V$ に対し, その定義域, 値域をそれぞれ $\mathrm{dom}(f) := U, \mathrm{ran}(f) := V$ と書く.

$E(I(X))$ は X の部分集合上の恒等写像全体からなる集合と一致する. また, X の構造によって $I(X)$ の元に適切な条件を課す. 例えば, X が位相空間であるときは, $I(X)$ は X の開集合から開集合への同相写像全体からなる集合と定める.

Wagner-Preston の定理は, 任意の逆半群がある $I(X)$ の部分半群として実現されることを主張する. これは群論の Cayley の定理の類似物である.

S 上の同値関係 $\nu \subset S \times S$ は以下の条件を満たすときに congruence と呼ばれる;

任意の $a \in S$ と $(s,t) \in \nu$ に対し $(as, at) \in \nu$, $(sa, ta) \in \nu$ が成り立つ.

ν が S の congruence であるとき, 商集合 S/ν は自然に逆半群となり, 商写像 $S \to S/\nu$ が準同型となる.

Congruence の具体例を紹介する.[1] S/ν が群となるような congruence ν のうち, 包含関係に関して最小のものを ν_{gr} と書く. S/ν_{gr} を S の maximal group image と呼ぶ. S が Clifford であるとは, 任意の $s \in S$ に対し $s^*s = ss^*$ が成り立つことである. S/ν が Clifford となるような congruence ν のうち, 包含関係に関して最小のものを ν_{Clif} と書く. S/ν_{Clif} は S の Clifford 化と呼ばれる. 同様に, S/ν が可換となるような congruence ν のうち, 包含関係に関して最小のものを ν_{ab} と書き, S/ν_{ab} を S のアーベル化と呼ぶ. 群や可換な逆半群は Clifford なので, $\nu_{\mathrm{Clif}} \subset \nu_{\mathrm{gr}}$, $\nu_{\mathrm{Clif}} \subset \nu_{\mathrm{ab}}$ が成り立つ.

3. エタール亜群

本節ではエタール亜群に関する基本的な事項を解説する. 端的に言えば, 亜群とは全ての射が可逆な小圏である. 本稿では以下のような記号を用いる.

Definition 3.1. 亜群 G とは

(1) unit space $G^{(0)} \subset G$,
(2) domain map と range map $d, r\colon G \to G^{(0)}$,
(3) $G^{(2)} := \{(\alpha, \beta) \in G \times G \mid d(\alpha) = r(\alpha)\}$ 上で定義される積

$$G^{(2)} \ni (\alpha, \beta) \mapsto \in \alpha\beta \in G$$

から構成され, これらは以下の条件を満たす;

- 任意の $x \in G^{(0)}$ に対し $d(x) = r(x) = x$ が成り立つ,
- 任意の $(\alpha, \beta) \in G^{(2)}$ に対し $d(\alpha)\beta = \beta$, $\alpha r(\beta) = \alpha$ が成り立つ,
- 任意の $(\alpha, \beta) \in G^{(2)}$ に対し, $d(\alpha\beta) = d(\beta)$, $r(\alpha\beta) = r(\alpha)$ が成り立つ,
- 任意の $(\alpha, \beta), (\beta, \gamma) \in G^{(2)}$ に対し, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ が成り立つ,
- 任意の $\gamma \in G$ に対し, ある $\gamma' \in G$ が存在して $(\gamma', \gamma), (\gamma, \gamma') \in G^{(2)}$, $d(\gamma) = \gamma'\gamma$ と $r(\gamma) = \gamma\gamma'$ が成り立つ.

上のような γ' は γ から一意に定まるので γ^{-1} と表す.

Example 3.2. 群は unit space が 1 点集合となる亜群と同一視することができる. 集合は unit space が全体と一致するような亜群と同一視することができる.

群に対して位相群という概念があるように, 亜群に対しても位相亜群を考える. 位相亜群 G とは, 積と inverse $G \ni \gamma \mapsto \gamma^{-1} \in G$ が連続となる位相を備えた亜群 G のことである. $d(\gamma) = \gamma^{-1}\gamma, r(\gamma) = \gamma\gamma^{-1}$ が任意の $\gamma \in G$ に対し成り立つことから, 位相亜群の domain map と range map は連続である.

Definition 3.3. G を位相亜群とする. G がエタールであるとは, domain map $d\colon G \to G^{(0)}$ が局所同相写像になることである.[2] エタール位相亜群を, 単にエタール亜群と呼ぶ.

---

[1] ここで用いられる記法は多くのテキスト (例えば [9]) と異なるので, 他の文献を参照する際は注意せよ

[2] $d\colon G \to G^{(0)}$ が局所同相写像であるとは, 任意の $\gamma \in G$ に対し $\gamma \in U$ となる開集合 $U \subset G$ が存在し $d(U) \subset G^{(0)}$ が開集合かつ $d|_U$ が像への同相写像となることである.

位相亜群において inverse をとる写像は同相写像なので, エタール亜群の range map は局所同相写像になる.

本稿ではエタール亜群の unit space が局所コンパクトハウスドルフ空間であることを仮定する. エタール亜群は domain map が局所同相写像であることから局所的にはコンパクトハウスドルフ空間であることが従うが, 一方でエタール亜群が大域的にハウスドルフ空間であるとは限らない. 実際, 本稿で扱う逆半群の作用から定まるエタール亜群は往々にしてハウスドルフ性を持たない.

エタール亜群は, 以下の意味で離散性を持つ.

Proposition 3.4. G をエタール亜群とする. この時, 任意の $x \in G^{(0)}$ に対し $G_x := d^{-1}(\{x\})$ と $G^x := r^{-1}(\{x\})$ は離散集合となる.

与えられたエタール亜群から新たなエタール亜群を得る方法はいくつかある. 本稿では

(1) 不変集合への制限
(2) 正規部分亜群による商

を用いるので, これらについて説明する.

G を亜群とする.$F \subset G^{(0)}$ が不変集合であるとは, 任意の $\alpha \in G$ に対し $d(\alpha) \in F$ ならば $r(\alpha) \in F$ が成り立つことである. 特に, $\{x\} \subset G^{(0)}$ が不変集合であるとき $x \in G^{(0)}$ を不動点と定義する. $F \subset G^{(0)}$ が不変集合であるとき, $G_F := d^{-1}(F)$ は G の部分亜群となる. G_F を, G の F への制限と呼ぶ. G がエタール亜群, 不変集合 $F \subset G^{(0)}$ が開集合または閉集合であるとき F は局所コンパクトハウスドルフ空間となり, G_F は再びエタール亜群となる. また, G の不動点全体からなる集合は $G^{(0)}$ の閉集合になることが知られている. G の不動点全体からなる集合への制限を G_{fix} と書く.

引き続き G を亜群とする. 部分亜群 $H \subset G$ が正規であるとは, 以下の 2 条件が成り立つことである;

(1) $G^{(0)} \subset H \subset \mathrm{Iso}(G)$ が成り立つ.
(2) 任意の $\alpha \in G$ に対し, $\alpha H \alpha^{-1} \subset H$ が成り立つ.

ここで, $\mathrm{Iso}(G)$ とはイソトロピー

$$\mathrm{Iso}(G) := \{\alpha \in G \mid d(\alpha) = r(\alpha)\}$$

のことである.

G を亜群, $H \subset G$ を正規部分亜群とする. G 上の同値関係 $\sim$ を

$$\alpha \sim \beta \iff d(\alpha) = d(\alpha) \text{ かつ} \alpha\beta^{-1}$$

によって定める. G の H による商を $G/H := G/{\sim}$ と定義する. G/H には商写像 $q\colon G \to G/H$ が準同型となるような亜群の構造が入る.

G がエタール亜群の場合, G/H の位相的な性質について以下のことが成り立つ.

Proposition 3.5 ([5, Proposition 3.8, 3.11])**.** G をエタール亜群, $H \subset G$ を開正規部分亜群とする. この時, G/H はエタール亜群となる. また, G/H がハウスドルフであることと $H \subset G$ が閉であることは同値である.

次に, 逆半群の空間への作用から得られるエタール亜群について解説する. 逆半群の作用から得られるエタール亜群が本稿の考察の対象となる.

Definition 3.6. S を逆半群, X を位相空間とする. S の X への作用とは, 逆半群の準同型 $\alpha\colon S \to I(X)$ のことである. この時, $\alpha\colon S \curvearrowright X$ と書く. また, $s \in S$ の α による像を $\alpha_s \in I(X)$ と書く.

Definition 3.7. S を逆半群, X を局所コンパクトハウスドルフ空間, $\alpha\colon S \curvearrowright X$ を作用とする. 集合

$$S * X := \{(s,x) \in S \times X \mid x \in \mathrm{dom}(\alpha_s)\}$$

上の同値関係 $\sim$ を以下のように定める;

$$(s,x) \sim (t,y) \iff x = y \text{ かつ } se = te \text{ なる } e \in E(S) \text{ が存在する.}$$

$S \ltimes_\alpha X := S * X/{\sim}$ と定め, $(s,x) \in S * X$ の同値類を $[s,x] \in S \ltimes_\alpha X$ と書く.

$S \ltimes_\alpha X$ の亜群としての構造は以下のように定まる. まず, unit space を

$$(S \ltimes_\alpha X)^{(0)} := \{[e,x] \in S \ltimes_\alpha X \mid x \in \mathrm{dom}(\alpha_e)\}$$

と定める. 写像

$$(S \ltimes_\alpha X)^{(0)} \ni [e,x] \mapsto x \in X$$

は全単射になることが分かるので, この全単射によって $(S \ltimes_\alpha X)^{(0)}$ と X を同一視する. $S \ltimes_\alpha X$ の domain map, range map をそれぞれ

$$d([s,x]) = x, r([s,x]) = \alpha_s(x)$$

と定める. $[s,x], [t,y] \in S \ltimes_\alpha X$ の積は $x = \alpha_t(y)$ の時に定義し

$$[s,x][]t,y] := [st,y]$$

と定める.[3] $[s,x]$ の逆元は $[s^*, \alpha_s(x)]$ と定まる. 以上の構造によって $S \ltimes_\alpha X$ は亜群となる. また, $s \in S$ と開集合 $U \subset \mathrm{dom}(\alpha_s)$ に対し

$$Z(s,U) := \{[s,x] \in S \ltimes_\alpha X \mid x \in U\}$$

と定める. $S \ltimes_\alpha X$ の位相として $Z(s,U)$ 全体が生成する位相を考える. この位相によって $S \ltimes_\alpha X$ はエタール亜群になる.

4. Paterson の普遍亜群 (universal groupoid)

逆半群の作用からエタール亜群を得ることができるのであった. 本節では逆半群 S の spectral action から得られるエタール亜群について解説する. この構成は [8] に基づく.

S を逆半群とする. 本稿では, $\{0,1\}$ を普通の掛け算によって半群とみなす. $\widehat{E(S)}$ を, $E(S)$ から $\{0,1\}$ への 0 でない準同型全体からなる集合とする;

$$\widehat{E(S)} := \{\xi\colon E(S) \to \{0,1\} \mid \xi \neq 0, \xi \text{ は準同型 }\}.$$

$\widehat{E(S)}$ は $\{0,1\}^{E(S)}$ の部分集合とみなすことができるので, $\widehat{E(S)}$ の位相として $\{0,1\}^{E(S)}$ に入る積位相の相対位相を考える. この位相に関して $\widehat{E(S)}$ は局所コンパクトハウスドルフ空間になる.

---

[3] domain map や range map, 積が実際に well-defined であることは容易に確かめられる.

S の $\widehat{E(S)}$ への作用 (spectral action) $\beta\colon S \curvearrowright \widehat{E(S)}$ を定義する．$s \in S$ に対し，

$$\mathrm{dom}(\beta_s) := \{\xi \in \widehat{E(S)} \mid \xi(s^*s) = 1\}, \mathrm{ran}(\beta_s) := \{\xi \in \widehat{E(S)} \mid \xi(ss^*) = 1\}$$

と定義する．$\mathrm{dom}(\beta_s)$, $\mathrm{ran}(\beta_s)$ は $\widehat{E(S)}$ のコンパクトな開集合である．写像 $\beta_s\colon \mathrm{dom}(\beta_s) \to \mathrm{ran}(\beta_s)$ を

$$\beta_s(\xi)(e) := \xi(s^*es)$$

によって定める (ここで, $\xi \in \mathrm{dom}(\beta_s)$, $e \in E(S)$ とした)．β_s は同相写像となる．写像 $s \mapsto \beta_s$ は準同型となることが分かるので, これを $\beta\colon S \curvearrowright \widehat{E(S)}$ と書き S の spectral action と呼ぶ.

Definition 4.1. S を逆半群とする．S の普遍亜群を

$$G_u(S) := S \ltimes_\beta \widehat{E(S)}$$

と定義する．

逆半群 S からエタール亜群 $G_u(S)$ を得ることができた．S と $G_u(S)$ の関係を調べることは基本的な問題である．[4] で S の congruence と $G_u(S)$ の制限, 商の関係について考察したので, これを紹介する．

S を逆半群, ν を congruence, $q\colon S \to S/\nu$ を商写像とする．$F_q \subset \widehat{E(S)}$ を

$$F_q := \{\xi \circ q \in \widehat{E(S)} \mid \xi \in \widehat{E(S/\nu)}\}$$

と定義する．この時, F_ν が $G_u(S)$ の閉不変集合であることが分かる ([4, Proposition 2.1.2])．また, F_ν が恒等写像 1 を含むこと (unital であること) や, $\xi, \eta F_\nu$ に対し，その積 $\xi\eta$ が 0 でないならば $\xi\eta \in F_\nu$ である，つまり F_ν が multiplicative であることも分かる．逆に, $G_u(S)$ の閉不変集合であって unital かつ multiplicative であるものは, ある congruence から得られることも分かる ([4, Corollary 2.1.6]).[4)]

再び S を逆半群, ν を congruence, $q\colon S \to S/\!\sim$ を商写像とする．ν の kernel を $\ker\nu := q^{-1}(E(S/\nu))$ と定義する．$\ker\nu$ は $E(S) \subset \ker\nu$ を満たすような S の部分逆半群となる．これを用いると自然な単射準同型

$$G_u(\ker\nu) \ni [s, \xi] \mapsto [s, \xi] \in G_u(S)$$

が導かれることが分かるが, この単射によって $G_u(\ker\nu)$ を $G_u(S)$ の部分亜群とみなすことができる．$G_u(\ker\nu)$ が $G_u(S)$ の開集合となることも容易に分かる．一方で, $G_u(\ker\nu)$ が $G_u(S)$ の正規部分亜群になるとは限らないが, F_ν に制限することで以下の主張が得られる．

Theorem 4.2 ([5, Theorem 3.1.3])**.** S を逆半群，ν を congruence とする．この時，$G_u(\ker\nu)_{F_\nu}$ は $G_u(S)_{F_\nu}$ の開正規部分亜群となる．さらに，その商 $G_u(S)_{F_\nu}/G_u(\ker\nu)_{F_\nu}$ は $G_u(S/\nu)$ と同型になる．

---

4) より強く, $G_u(S)$ の閉不変集合であって unital かつ multiplicative であるものと $E(S)$ 上の "normal" な congruence が 1 対 1 に対応することが分かっている．

この定理により, S の congruence と $G_u(S)$ の制限, 商の関係が分かった. 次節では, S の具体的な congruence に対して, それが $G_u(S)$ のどのような制限, 商を引き起こすかを紹介する.

5. 具体例

本節では, 逆半群の具体的な congruence に対し, それが普遍亜群にどのような制限, 商を引き起こすか紹介する.

逆半群 T が Clifford であるとは, 任意の $t \in T$ に対し $t^*t = tt^*$ が成り立つことであった. 逆半群 S の congruenceν が Clifford であるとは, S/ν が Clifford になることと定義される. Clifford な congruence のうち, 包含関係に関して最小な物を ν^{Clif} と書く. S の Clifford 化を $S^{\mathrm{Clif}} := S/\nu^{\mathrm{Clif}}$ と定義する. S から Clifford 逆半群 T への準同型は S^{Clif} を経由する, という普遍性を S^{Clif} は持つ. S^{Clif} の普遍亜群は以下のように計算できる.

Theorem 5.1 ([4, Theorem 3.2.2])**.** S を逆半群とする. $G_u(S^{\mathrm{Clif}})$ は $G_u(S)_{\mathrm{fix}}$ と同型になる.

Proof. 証明の概略を述べる.

実は, $G_u(\ker \nu^{\mathrm{Clif}})_{F_{\nu^{\mathrm{Clif}}}} = G_u(\ker \nu^{\mathrm{Clif}})^{(0)}_{F_{\nu^{\mathrm{Clif}}}}$ が成り立つ. これは「ν^{Clif} は $E(S)$ のある normal congruence が生成する congruence として実現できる」という事実を用いることで証明できる [4, Proposition 3.2.1].

次に, $F_{\nu^{\mathrm{Clif}}}$ の計算をする. $G_u(S)$ の不動点全体からなる集合を $F_{\mathrm{fix}} \subset G^{(0)}$ と書く. まず, S^{Clif} が Clifford であることから $F_{\nu^{\mathrm{Clif}}} \subset F_{\mathrm{fix}}$ が計算によって分かる. また, $\{0,1\}$ が Clifford であることから, S^{Clif} の普遍性を用いることで $F_{\nu^{\mathrm{Clif}}} \supset F_{\mathrm{fix}}$ が分かる.

以上より, Theorem 4.2 から,

$$G_u(S^{\mathrm{Clif}}) \simeq G_u(S)_{F_{\nu^{\mathrm{Clif}}}}/G_u(\ker \nu^{\mathrm{Clif}})_{F_{\nu^{\mathrm{Clif}}}} = G_u(S)_{\mathrm{fix}}/G_u(S)^{(0)}_{\mathrm{fix}} \simeq G_u(S)_{\mathrm{fix}}$$

が成り立つ. □

上の定理から $G_u(S^{\mathrm{Clif}}) = \mathrm{Iso}(G_u(S^{\mathrm{Clif}}))$ となることが分かるので, 任意の $\xi \in G_u(S^{\mathrm{Clif}})^{(0)}$ に対し $G_u(S^{\mathrm{Clif}})_\xi$ は群となる. $G_u(S^{\mathrm{Clif}})_\xi$ がどのような群となるかは, [6, Theorem 3.1] や [4, Corollary 4.1.6] などで, 帰納極限や商によって計算されている.

逆半群の Clifford 化と同様にして, 逆半群 S の abel 化 $S^{\mathrm{ab}} = S/\nu^{\mathrm{ab}}$ が定義される. ここで, S/ν が可換になるような congruence ν のうち包含関係について最小の物を ν^{ab} とした. $G_u(S^{\mathrm{ab}})$ は $G_u(S)$ のエタール亜群としてのアーベル化 $G_u(S)^{\mathrm{ab}}$ と同型になることも示されている [4, Theorem 3.2.3]. エタール亜群のアーベル化は [5] で定義された概念であり, 亜群 C*環のアーベル化を記述するようなエタール亜群である.

Acknowledgement. 本研究は JSPS 科研費 20J10088 の助成を受けたものです.

References

[1] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault. *Amenable Groupoids*. Monographie de l'Enseignement mathématique. L'Enseignement Mathématique, 2000.

[2] J. Brown, L. O. Clark, C. Farthing, and A. Sims. Simplicity of algebras associated to étale groupoids. *Semigroup Forum*, **88**(2):433–452, 2014.

[3] R. Exel. Inverse semigroups and combinatorial C*-algebras. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 39, 04 2007.

[4] Fuyuta Komura. Invariant sets and normal subgroupoids of universal étale groupoids induced by congruences of inverse semigroups. arXiv: 2002.02691, 2020.

[5] Fuyuta Komura. Quotients of étale groupoids and the abelianizations of groupoid C*-algebras. *Journal of the Australian Mathematical Society*, pages 1–20, 2020.

[6] S. M. LaLonde and D. Milan. Amenability and uniqueness for groupoids associated with inverse semigroups. *Semigroup Forum*, 95(2):321–344, Oct 2017.

[7] M.V. Lawson. *Inverse Semigroups: The Theory of Partial Symmetries*. World Scientific, 1998.

[8] A. Paterson. *Groupoids, Inverse Semigroups, and their Operator Algebras*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, 2012.

[9] M. Petrich. *Inverse semigroups*. Pure and applied mathematics. Wiley, 1984.

[10] J. Renault. *A Groupoid Approach to C*-Algebras*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1980.

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, 223-8522, Japan

Email address: fuyuta.k@keio.jp