Brauer-friendly 加群の性質について

東京理科大学大学院・理学研究科　渡辺　将一
Nobukatsu Watanabe
Department of Mathematics,
Tokyo University of Science

1　イントロダクション

本稿では次のような設定を用いる. p を素数として, $\mathcal{O}$ を完備離散付値環でその唯一の極大イデアル $\mathfrak{p} := J(\mathcal{O})$ による剰余体 $k := \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ が標数 p の代数的閉体であるものを一つ固定する. このとき, 自然な全射 $\mathcal{O}G \twoheadrightarrow kG$ の $x \in \mathcal{O}G$ の像を $\overline{x}$ により表す. また, べき等元の持ち上げ可能定理により, 各原始べき等元 $i \in kG$ に対して, ある原始べき等元 $\hat{i} \in \mathcal{O}G$ で $\overline{\hat{i}} = i$ を満たすものが存在する. $R \in \{\mathcal{O}, k\}$ を固定する. 以下, 任意の環上の加群は特に断らない限り有限生成な左加群とする.

有限群のモジュラー表現論において次の Broué 予想はとても重要な予想である.

予想 (Broué 予想)**.** G を有限群, b を不足群 P を持つ RG のブロック, c を b の Brauer 対応子とする. もし P が可換群ならば, RGb と $RN_G(P)c$ は導来同値である.

奥山哲郎氏により導入された奥山メソッドにより, Broué 予想の解決には森田型安定同値の構成が重要であることが示された. これより, 森田型安定同値の構成に関して主ブロックの場合と, それらを含めた一般のブロックの場合の概要をそれぞれ見ていく.

まず, 主ブロックの場合を見ていく. b を RG の主ブロックとする. この場合に M. Broué が次の森田型安定同値の構成法を導入した.

定理 1.1 (Broué の貼り合わせの原理)**.** G と H を $\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(H)$ を満たす共通の Sylow p-部分群 P を持つ有限群, b と c をそれぞれ RG と RH の主ブロックとする. このとき, P の各部分群 Q に対して, b_Q と c_Q をそれぞれ $kC_G(Q)$ と $kC_H(Q)$ の主ブロックとする. $M := S(G\times H, \Delta P)$ を vertex ΔP を持つ Scott $R(G \times H)$-加群とする. このとき, 以下の条件は同値である.

(i) M とその双対加群 M^* により RGb と RHc の間の森田型安定同値が誘導される.

(ii) 各 $1 \neq Q \leq P$ に対して, $\mathrm{Br}_{\Delta Q}(M)$ とその双対加群 $\mathrm{Br}_{\Delta Q}(M^*)$ により $kC_G(Q)b_Q$ と $kC_{N_G(P)}(Q)c_Q$ の間の森田同値が誘導される.

ここで, Br は後で定義される Brauer construction である.

Broué の貼り合わせの原理を適用するためには, Kessar-Kunugi-Mitsuhashi[4] において導入された次の Brauer 直既約性が重要な役割を果たす.

定義 1.2 (Brauer 直既約性 [4])**.** M を RG-加群とする. G の各 p-部分群 Q に対して $\mathrm{Res}^{N_G(Q)/Q}_{QC_G(Q)/Q}(\mathrm{Br}_Q(M))$ が直既約または 0 となるとき, M は Brauer 直既約であるという.

Scott 加群に対する Brauer 直既約性の同値条件は Ishioka-Kunugi[3, Theorem 1.3] により次の様に与えられた.

定理 1.3 ([3, Theorem 1.3])**.** G を有限群, P を G の p-部分群, $M := S(G, P)$ とする. $\mathcal{F} := \mathcal{F}_P(G)$ が saturated であると仮定する. このとき, 次の条件は同値である.

(i) M は Brauer 直既約である.
(ii) P の各 fully $\mathcal{F}$-normalized 部分群 Q に対して, $\mathrm{Res}^{N_G(Q)}_{QC_G(Q)}(S(N_G(Q), N_P(Q)))$ は直既約である.

もしこれらの条件が成り立つならば, P の各 fully $\mathcal{F}$-normalized 部分群 Q に対して次の同型が成り立つ.

$$\mathrm{Br}_Q(M) \cong S(N_G(Q), N_P(Q)).$$

次に主ブロックの場合に見てきたことを一般のブロックの場合に見ていく. b を RG のブロックとする. M. Linckelmann は Broué の貼り合わせの原理を一般のブロックに対して次の様に一般化した.

定理 1.4 (Linckelmann の貼り合わせの原理 [7, Theorem 1.2])**.** G と H を有限群, b と c をそれぞれ RG と RH の共通の不足群 P を持つブロック, $i \in (RGb)^{\Delta P}$ と $j \in (RHc)^{\Delta P}$ を almost source idempotent とする. 各 P の部分群 Q に対して, e_Q と f_Q によりそれぞれ $\mathrm{Br}_{\Delta Q}(i)e_Q \neq 0$ と $\mathrm{Br}_{\Delta Q}(j)f_Q \neq 0$ を満たす $kC_G(Q)$ と $kC_H(Q)$ のブロックとする. また, $\hat{e}_Q$ と $\hat{f}_Q$ によりそれぞれ e_Q と f_Q の一意的な持ち上げを表すとする. $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{(P,\hat{e}_P)}(G, b)$ とし, $\mathcal{F}_{(P,\hat{e}_P)}(G, b) = \mathcal{F}_{(P,\hat{f}_P)}(H, c)$ を仮定する. V を vertex P を持つ $\mathcal{F}$-stable 直既約 endo-permutation RP-加群とし $R\Delta P$-加群と見る. M を RGb-RHc-両側加群

$$RGi \otimes_{RP} \mathrm{Ind}^{P\times P}_{\Delta P}(V) \otimes_{RP} jRH$$

の直既約因子とする. M は vertex ΔP を持つと仮定する. このとき, P の各非自明な部分群 Q に対して, $\mathrm{End}_k(M_Q) \cong \mathrm{Br}_{\Delta Q}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\hat{e}_Q M \hat{f}_Q))$ を満たす $kC_G(Q)e_Q$-$kC_H(Q)f_Q$-加群 M_Q が存在する. さらに, もし P の各非自明な部分群 Q に対して両側加群 M_Q が $kC_G(Q)e_Q$ と $kC_H(Q)f_Q$ の間の森田同値を誘導するならば, M とその双対加群 M^* は $\mathcal{O}Gb$ と $\mathcal{O}Hc$ の間の森田型安定同値を誘導する.

Linckelmann の貼り合わせの原理に出てくる各 M_Q は E. Biland が定義した Brauer-friendly 加群と呼ばれる (endo-)p-permutation 加群を一般化した加群である. また, E. Biland は Brauer 関手の一般化として slash 関手を定義している. このことから, Brauer-friendly 加群に対しても

Brauer 直既約性と同様に slash 直既約性が定義出来る．さらに, Broué の貼り合わせの原理において Brauer 直既約性が重要であったのと同じ様に, slash 直既約性は Linckelmann の貼り合わせの原理において重要な役割を果たす．そのため本稿の主結果の一つ目として, Ishioka-Kunugi により与えられた Scott 加群に対する Brauer 直既約性の同値条件を Brauer-friendly 加群に対する slash 直既約性の同値条件へと一般化する．

本稿の主結果の二つ目の説明に入る．Linckelmann の貼り合わせの原理の場合においては, Brauer-friendly 加群が森田型安定同値を誘導することが分かったので, その森田型安定同値を調べるためには Brauer-friendly 加群自身を調べたい．このとき有用なのが次の“持ち上げ可能性”である．

定義 1.5 (持ち上げ可能性)**.** M を kG-加群とする．このとき, M が $\mathcal{O}G$-加群に持ち上げ可能であるとは, ある $\mathcal{O}G$-加群 $\widehat{M}$ で $k \otimes_{\mathcal{O}} \widehat{M} \cong M$ を満たすものが存在するときをいう．また, この $\widehat{M}$ のことを M のリフトという．

持ち上げ可能であることが分かっている加群のクラスはごく少数である． 例えば, p-permutation 加群 (特に Scott 加群) や endo-permutation 加群が持ち上げ可能であることは分かっている．また, C. Lassueur と J. Thévenaz は [6] においてこれらを真に含む加群のクラスである edno-p-permutation 加群に対して持ち上げ可能であることを示した．本稿の主結果の二つ目として, edno-p-permutation 加群を真に含む加群のクラスでもある Brauer-friendly 加群が持ち上げ可能であることを示す．

2 記号と用語の導入

この節では, Brauer-friendly 加群や slash 関手の定義やそれらを定義するために必要な用語を定義する．以下, G を有限群とする．まず, $\mathcal{O}G$-加群 M, $H \leq G$ に対して M^H により H の元の作用により不変な M の元全体を表す．また, トレース写像 $\mathrm{Tr}_H^G : M^H \to M^G$ を $\mathrm{Tr}_H^G(m) := \sum_{t \in G/H} tm$ により定める．以下, $\overline{N}_G(H) := N_G(H)/H$ とする．

定義 2.1 (Brauer construction, Brauer morphism, Brauer 関手)**.** P を G の p-部分群, M を $\mathcal{O}G$-加群とする． $\mathrm{Br}_P(M) := M^P/(\sum_{Q<P} \mathrm{Tr}_Q^P(M^Q) + J(\mathcal{O})M^P)$ により $k\overline{N}_G(P)$-加群である M の P による Brauer construction を定める． これにより定まる関手 $\mathrm{Br}_P : {}_{\mathcal{O}G}\mathbf{Mod} \to {}_{k\overline{N}_G(P)}\mathbf{Mod}; M \mapsto \mathrm{Br}_P(M)$ を Brauer 関手という．また, 自然な全射 $\mathrm{br}_P : M^P \twoheadrightarrow \mathrm{Br}_P(M)$ を M の P による Brauer morphism という．さらに (G, b)-subpair (P, b_P) に対して, $\mathrm{Br}_{(P,b_P)}(M) := \mathrm{Br}_P(b_P M)$ により $k\overline{N}_G(P, b_P)\overline{b}_P$-加群である M の (P, b_P) による Brauer construction を定める．これにより次の関手が定まる．

$$\mathrm{Br}_{(P,b_P)} : {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Mod} \to {}_{k\overline{N}_G(P,b_P)\overline{b}_P}\mathbf{Mod}.$$

$g \in G$ に対して, c_g により g による共役写像を表すとする．

定義 2.2 (ブロックの fusion system)**.** b を RG のブロック, (P, b_P) を (G, b)-subpair とする. このとき, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(P,b_P)}(G, b)$ を次のような対象と射を持つ圏として定める. この $\mathcal{F}$ を (G, b) の (P, b_P) における fusion system という.
・対象：P の部分群.
・射：$R, Q \leq P$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q, R) := \{c_g : Q \to R \mid {}^{\exists}g \in G, {}^{g}(Q, b_Q) \leq (R, b_R)\}.$$

次の vertex subpair と source triple は vertex と source をより精密にした概念である.

定義 2.3 (vertex subpair, source triple, [1, Definition 2])**.** M を直既約 $\mathcal{O}Gb$-加群とする.
・M の vertex subpair が (P, b_P) であるとは, (P, b_P) が (G, b)-subpair で, $P =_G \mathrm{vtx}(M)$ で, ある直既約 $\mathcal{O}P$-加群 V により $M \mid b\mathcal{O}Gb_P \otimes_{\mathcal{O}P} V$ が成り立つことをいう.
・V が M の vertex subpair (P, b_P) に関する source であるとは, V が $M \mid b\mathcal{O}Gb_P \otimes_{\mathcal{O}P} V$ の成り立つ直既約 $\mathcal{O}P$-加群のことをいう.
・(P, b_P, V) が M の source triple であるとは, V が M の vertex subpair (P, b_P) に関する source であるときをいう.

定理 2.4 (Green 対応 [1, Lemma 1, Definition 2])**.** (P, b_P) を (G, b)-subpair とする. M を直既約 $\mathcal{O}Gb$-加群としたとき, $f^b_{b_P}(M)$ を $b_P\mathrm{Res}^G_{N_G(P,b_P)}(M)$ の直既約因子で source triple (P, b_P, V) を持つ唯一の因子により定める. このとき, $f^b_{b_P}$ は source triple (P, b_P, V) をもつ直既約 $\mathcal{O}Gb$-加群の同型類全体から source triple (P, b_P, V) をもつ直既約 $\mathcal{O}N_G(P, b_P)b_P$-加群の同型類全体への全単射を与える.

Brauer-friendly 加群は次に定義する $\mathcal{F}$-stable endo-permutation 加群を source に持つ.

定義 2.5 ($\mathcal{F}$-stable)**.** b を $\mathcal{O}G$ のブロック, (P, b_P) を (G, b)-subpair, V を endo-permutation $\mathcal{O}Q$-加群, $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{(P,b_P)}(G, b)$ とする.
・V が $\mathcal{F}$-stable であるとは, 任意の $R \leq Q$ と任意の $c_{g^{-1}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(R, Q)$ に対して $\mathrm{Res}^Q_R(V) \oplus \mathrm{Res}^{{}^gQ}_R({}^gV)$ が endo-permutation 加群であるときをいう.
・(P, b_P, V) が fusion-stable endo-permutation source triple とは, V が $\mathcal{F}$-stable かつ直既約 endo-permutation $\mathcal{O}P$-加群で vertex P をもつときをいう.

定義 2.6 (source triple に対する compatibility)**.** (P_i, b_{P_i}, V_i) を $\mathcal{F}_{(P_i,b_i)}(G, b)$-stable endo-permutation source triple$(i = \{1, 2\})$ とする.
・(P_1, b_{P_1}, V_1) と (P_2, b_{P_2}, V_2) が compatible であるとは, 任意の (G, b)-subpair (Q, b_Q) と任意の $c_{g_i} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Br}(G,b)}((Q, b_Q), (P_i, b_{P_i}))$ に対して $\mathrm{Res}_{c_{g_1}}(V_1) \oplus \mathrm{Res}_{c_{g_2}}(V_2)$ が endo-permutation 加群であることである. ここで, $\mathrm{Br}(G, b)$ は Brauer 圏である.

定義 2.7 (Brauer-friendly 加群 [1, Definition 8])**.** M を $\mathcal{O}Gb$-加群, M の直既約分解 $M = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} X_i$ において各 X_i は source triple (P_i, b_{P_i}, V_i) をもつとする.

・M が Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群であるとは, (P_i, b_{P_i}, V_i) が $\mathcal{F}_{(P_i,b_i)}(G,b)$-stable endo-permutation source triple$(i = \{1, ..., n\})$ で, (P_i, b_{P_i}, V_i) と (P_j, b_{P_j}, V_j) が compatible$(^\forall i, j \in \{1, ..., n\})$ であるときをいう.

定義 2.8 (Brauer-friendly 加群に対する compatibility)**.** Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群 L, M に対して, $L \oplus M$ が Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群となるとき, L と M は compatible であるという.

定義 2.9 (slash 関手 [1, Definition 14])**.** b を $\mathcal{O}G$ のブロック, (P, b_P) を (G, b)-subpair, ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ を ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Mod}$ の部分圏, (P, b_P) を (G, b)-subpair, $PC_G(P) \leq H \leq N_G(P, b_P)$, $\overline{H} := H/P$ とする. (加法) 関手 $Sl : {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M} \to {}_{k\overline{H}\overline{b}_P}\mathbf{Mod}$ が以下のデータによって定まっているとき, Sl を (P, b_P)-slash 関手という.

- 各 $L, M \in {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ に対して, ある写像

$$Sl^{L,M} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}P}(L, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(Sl(L), Sl(M))$$

  で次の条件を満たすものが存在する.
  - 各 $M \in {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ に対して, $Sl^{M,M}(1_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)}) = 1_{\mathrm{End}_k(Sl(M))}$;
  - 各 $L, M, N \in {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$, 各 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}P}(L, M)$, 各 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}P}(M, N)$ に対して, $Sl^{L,N}(g \circ f) = Sl^{M,N}(g) \circ Sl^{L,M}(f)$;
  - 各 $L, M \in {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ に対して, ある $k(C_G(P) \times C_G(P))\Delta H$-同型

$$f_{L,M} : \mathrm{Br}_{\Delta P}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(b_P L, b_P M))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(Sl(L), Sl(M))$$

    で次の図式を可換にするものが存在する.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}P}(L, M) \arrow[rr, "Sl^{L,M}"] \arrow[dr, "\mathrm{br}^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L,M)}_{(\Delta P, b_P \otimes b_P)}"'] & & \mathrm{Hom}_k(Sl(L), Sl(M)) \\
& \mathrm{Br}_{\Delta P}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(b_P L, b_P M))) \arrow[ur, "f_{L,M}"'] &
\end{tikzcd}$$

Slash 関手はどんな圏に対しても存在する訳ではなく, 次のような Brauer-friendly 圏に対しては存在することが知られている.

定義 2.10 (Brauer-friendly 圏 [1, Definition 15])**.** ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ を ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Mod}$ の部分圏とする. ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ が Brauer-friendly 圏とは, 任意の $L, M \in {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ に対して, L と M は compatible な Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群であるときをいう.

例. すべての p-permutation $\mathcal{O}Gb$-加群の圏を ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Perm}$ とすると, これは Brauer-friendly 圏になっている.

定理 2.11 ([1, Theorem 18])**.** b を $\mathcal{O}G$ のブロック, ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ を ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Mod}$ の Brauer-friendly 部分圏, (P, b_P) を (G, b)-subpair, $PC_G(P) \leq H \leq N_G(P, b_P)$, $\overline{H} := H/P$, $\overline{C}_G(P) := PC_G(P)/P$ とする. このとき, 以下のことが成り立つ.

(i) (P, b_P)-slash 関手 $Sl_{(P,e_P)}: {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M} \to {}_{k\overline{H}\overline{b}_P}\mathbf{Mod}$ が存在する.

(ii) $Sl'_{(P,b_P)}: {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M} \to {}_{k\overline{H}\overline{b}_P}\mathbf{Mod}$ を (P, b_P)-slash 関手とすると, ある linear character $\chi: \overline{H}/\overline{C}_G(P) \to k^\times$ により関手としての同型 $\chi_* Sl_{(P,b_P)} \cong Sl'_{(P,b_P)}$ が成り立つ.

例. 上で考えた Brauer-friendly 圏の例である ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Perm}$ に対しては slash 関手は Brauer 関手 (の linear character 倍) である.

定義 2.12 (slash 直既約性 [2, Definition 5.1])**.** ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ を ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Mod}$ の Brauer-friendly 部分圏, $M \in {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ とする. このとき, M が slash 直既約であるとは, 任意の (G, b)-Brauer pair (Q, b_Q) に対する, ある (Q, b_Q)-slash 関手 $Sl_{(Q,b_Q)}: {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M} \to {}_{k\overline{H}\overline{b}_Q}\mathbf{Mod}$ により $\mathrm{Res}^{N_G(Q,b_Q)/Q}_{QC_G(Q)/Q}(Sl_{(Q,b_Q)}(M))$ が直既約または 0 となることをいう.

注意. Slash 直既約性の定義は Brauer-friendly 圏 ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ と (Q, b_Q)-slash 関手 $Sl_{(Q,b_Q)}$ の取り方には依存しない.

定理 2.13 ([1, Theorem 23])**.** *b を $\mathcal{O}G$ のブロック, (P, b_P, V) を $\mathcal{F}_{(P,b_P)}(G, b)$-stable endo-permutation source triple, ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ を "big enough" な (つまり, 任意の直既約 Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群で source triple (P, b_P, V) をもつものの有限個の直和が属する)Brauer-friendly 圏, $Sl_{(P,b_P)}: {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M} \to {}_{k\overline{N}_G(P,b_P)\overline{b}_P}\mathbf{Mod}$ を (P, b_P)-slash 関手とする. このとき, source triple (P, b_P, V) をもつすべての直既約 Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群の同型類の集合からすべての直既約射影 $k\overline{N}_G(P, b_P)\overline{b}_P$-加群の同型類の集合への全単射が $Sl_{(P,b_P)}$ により与えられる.*

この定理を用いて Brauer-friendly 加群を次の様に表示する.

定義 2.14. 定理 2.13 と同じ設定とし, M を直既約 Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群で source triple (P, b_P, V) を持ち ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ に属するものとする. このとき, 定理 2.13 によりある唯一の単純 $k\overline{N}_G(P, b_P)\overline{b}_P$-加群 S により $Sl_{(P,b_P)}(M) \cong P(S)$ となるので, M を $B(b, (P, b_P, V), Sl_{(P,b_P)}, S)$ と表す. また, 自明 $k\overline{N}_G(P, b_P)\overline{b}_P$-加群 $S = k_{\overline{N}_G(P,b_P)}$ のとき, $BS(b, (P, b_P, V), Sl_{(P,b_P)}) := B(b, (P, b_P, V), Sl_{(P,b_P)}, S)$ とする. この加群を Brauer-friendly Scott $\mathcal{O}G$-加群と呼ぶことにする.

注意. 1. 上記の Brauer-friendly 加群の表示は linear char. 倍を除き一意である.

2. Scott $\mathcal{O}G$-加群 $S(G, P)$ は, $\mathcal{O}G$ の主ブロック b により,

$$S(G, P) = BS(b, (P, b_P, \mathcal{O}_P), Sl_{(P,b_P)})$$

と表示出来る.

3 補題

このセクションでは, [3] において主結果を示すために必要であった Scott 加群と Brauer 関手に対する補題を, Brauer-friendly 加群 (や Brauer-friendly Scott 加群) と slash 関手に対して用

意する (そのうち, 主要なものを報告する). また, 二つ目の主結果を示す際に必要になる補題も用意する.

次は, [3, Lemma 2.2] の H. Kawai の結果に対応するものである.

補題 3.1. (P, b_P) を (G, b)-subpair, $(Q, b_Q) \leq_G (P, b_P)$, $H := N_G(Q, b_Q)$ とする.
もし $R := {}^gP \cap H$ が $\{{}^iP \cap H \mid i \in G, (Q, b_Q) \leq {}^i(P, b_P)\}$ の極大元ならば, ある (R, b_R)-slash 関手 $Sl_{(R,b_R)}$, ある $n \in G$, ある単純 $k[\overline{N}_H(R, b_R)\bar{b}_R]$-加群 S' が存在して

$$B(b_Q, (R, b_R, \mathrm{Cap}(\mathrm{Res}_R^{{}^nP}({}^nV))), Sl_{(R,b_R)}, S') \mid \mathrm{Res}_H^G(B(b, (P, b_P, V), Sl_{(P,b_P)}, S))$$

が成り立つ (ここで, b_R は $(R, b_R) \leq {}^g(P, b_P)$ を満たす唯一のブロックである).

次の補題は, [3, Lemma 2.1] の Thévenaz のテキストの exercise に対応するものである.

補題 3.2. (P, b_P) を (G, b)-subpair, $Q \leq_G P$, $M := B(b, (P, b_P, V), Sl_{(P,b_P)}, S)$, $H := N_G(Q, b_Q)$ とする. [1, Lemma 10(i)] より, $b_Q\mathrm{Res}_H^G(M) = L \oplus L'$($L$ は Brauer-friendly $\mathcal{O}Hb_Q$-加群, L' は各直既約因子の vertex が Q を含まない) と直和分解し, $L := \bigoplus_{1 \leq i \leq n} L_i$ と直既約分解する. $Z_i := \mathrm{vtx}(L_i)$ とする.
このとき, $^\exists g_i \in G (1 \leq i \leq n)$, $^\exists S_i$:単純 $k[N_H(Z_i, b_{Z_i})/Z_i]\bar{b}_{Z_i}$-加群 $(1 \leq i \leq n)$ により,

$$Sl_{(Q,b_Q)}(L_i) \cong B(b_Q, (Z_i, b_{Z_i}, \mathrm{Cap}(\mathrm{Res}_{Z_i}^{{}^{g_i}P}({}^{g_i}V))[Q]), Sl_{(Z_i,b_{Z_i})}, S_i) \oplus (\bigoplus_j X_{i,j})$$

が成り立つ. ここで, $X_{i,j}$ は直既約 Brauer-friendly kHb_Q-加群でその source triple $(\mathrm{vtx}(X_{i,j}), b_{\mathrm{vtx}(X_{i,j})}, s(X_{i,j}))$ は次の条件を満たす.

$$(Q, b_Q) \leq {}^\exists(\mathrm{vtx}(X_{i,j}), b_{\mathrm{vtx}(X_{i,j})}) \leq (Z_i, b_{Z_i}),\ {}^\exists \mathrm{s}(X_{i,j}) \mid \mathrm{Res}_{\mathrm{vtx}(X_{i,j})}^{Z_i}(\mathrm{Cap}(\mathrm{Res}_{Z_i}^{{}^{g_i}P}({}^{g_i}V)))[Q].$$

次に, 二つ目の主結果を示す際に必要な補題のうち特に重要であったものを紹介する. 次の補題は [5, Lemma 8.3] の証明と同様に示す事が出来る.

補題 3.3. b を不足群が D を持つ $\mathcal{O}G$ のブロック, i を b の source idempotent, P を D の部分群とする. $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{(P,b_P)}(G, b)$ とする (ここで, b_P は $\bar{b}_P\mathrm{br}_P(i) \neq 0$ を満たす唯一の $\mathcal{O}C_G(P)$ のブロックである). V を vertex P を持つ直既約 $\mathcal{F}$-stable endo-permutation $\mathcal{O}P$-加群とし, $X := \mathcal{O}Gi \otimes_{\mathcal{O}P} V$ とする. このとき, 次の標準的な代数準同型

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(X) \to \mathrm{End}_{kG}(k \otimes_{\mathcal{O}} X)$$

は全射になる. 特に, $k \otimes_{\mathcal{O}} X$ の各直既約因子 M に対して, $k \otimes_{\mathcal{O}} \widehat{M} \cong M$ を満たす X のある直既約因子 $\widehat{M}$ が存在する.

補題 3.4 ([5, Lemma 8.4])**.** P を p-群, $\mathcal{F}$ を P に関する saturated fusion system とする. このとき, 標準的な写像 $\mathcal{D}_{\mathcal{O}}(P, \mathcal{F}) \to \mathcal{D}_k(P, \mathcal{F})$ は全射である.

4 主結果

次が [3, Theorem 1.3] の一般化にあたる Brauer-friendly 加群の slash 直既約性の同値条件を与える一つ目の主定理である.

定理 4.1. b を $\mathcal{O}G$ のブロック, (P, b_P) を (G, b)-subpair, $M := B(b, (P, b_P, V), Sl_{(P,b_P)}, S)$, $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{(P,b_P)}(G, b)$ とする. $Q \leq P$ に対して, $N_Q := N_G(Q, b_Q)$, $H_Q := N_P(Q)$ とする. $\mathcal{F}$ が saturated で $\mathrm{Res}^{N_P}_{PC_G(P)}(S)$ が単純 $\mathcal{O}PC_G(P)$-加群であるとする. このとき, 以下は同値である.

(i) M:slash 直既約.

(ii) $\mathrm{Res}^{N_Q}_{QC_G(Q)}\big(B(b_Q, (H_Q, b_{H_Q}, \mathrm{Cap}(\mathrm{Res}^{{}^nP}_{H_Q}({}^nV))[Q]), Sl_{(H_Q,b_{H_Q})}, S_Q)\big)$:直既約,
($^\forall Q \leq P$:fully $\mathcal{F}$-normalized 部分群).

これらの条件が成り立てば, P の各 fully $\mathcal{F}$-normalized 部分群 Q に対して

$$Sl_{(Q,b_Q)}(M) \cong B(b_Q, (H_Q, b_{H_Q}, \mathrm{Cap}(\mathrm{Res}^{{}^nP}_{H_Q}({}^nV))[Q]), Sl_{(H_Q,b_{H_Q})}, S_Q)$$

が成り立つ.

注意. (ii) の中の $B(b_Q, (H_Q, b_{H_Q}, \mathrm{Cap}(\mathrm{Res}^{{}^nP}_{H_Q}({}^nV))[Q]), Sl_{(H_Q,b_{H_Q})}, S_Q)$ は M と Q に対して補題 3.1 と補題 3.2 により定まる加群である.

次の定理が, ある条件を満たす Brauer-friendly 加群が持ち上げ可能であるという二つ目の主結果である.

定理 4.2. b を不足群 D を持つ kG のブロック, M を source triple(P, b_P, S) を持つ直既約 Brauer-friendly kGb-加群とする. $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{(P,b_P)}(G, b)$ が saturated あると仮定する. このとき, $\widehat{S}/\mathfrak{p}\widehat{S} \cong S$ かつ $\widehat{M}/\mathfrak{p}\widehat{M} \cong M$ を満たす source triple $(P, \widehat{b}_P, \widehat{S})$ を持つある直既約 Brauer-friendly $\mathcal{O}G\hat{b}$-加群 $\widehat{M}$ が存在する.

注意.
1. 一般には, 定理 4.2 によるリフトは一意的ではない.
2. 定理 4.2 の証明は endo-permutation 加群の分類定理を仮定している.

参考文献

[1] E. Biland, *Brauer-friendly modules and slash functors*, J. Pure Appl. Algebra 218 (2014), 2319-2336.

[2] Z. Feng and Z. Li, *Endopermutation Scott modules, slash indecomposability and saturated fusion systems*, Comm. Algebra 46 (2018), 3608-3621.

[3] H. Ishioka and N. Kunugi, *Brauer indecomposability of Scott modules*, J. Algebra 470 (2017), 441-449.

[4] R. Kessar, N. Kunugi and N. Mitsuhashi, *On saturated fusion systems and Brauer indecomposability of Scott modules*, J. Algebra 340 (2011), 90-103.

[5] R. Kessar and M. Linckelmann, *Descent of equivalences and character bijections*, in: Geometric and topological aspects of the representation theory of finite groups, Springer Proc. Math. Stat., 242, Springer, (2018), 181–212.

[6] C. Lassueur and J. Thévenaz, *Lifting endo-p-permutation modules*, Arch. Math. (Basel) **110** (2018), 205–212.

[7] M. Linckelmann, *On stable equivalences with endopermutation source*, J. Algebra 434 (2015), 27-45.

[8] 永尾汎・津島行男, 有限群の表現, 裳華房, (1987).