有限有向グラフに対する四元数水野-佐藤ゼータ函数の伊原表示

横浜国立大学大学院 理工学府数物・電子情報系理工学専攻
石川 彩香 *
Ishikawa Ayaka
Department of Mathematical Science,
Graduate School of Engineering Science,
Yokohama National University

1 概要

本稿では, 講演内で詳しく扱えなかった四元数水野-佐藤ゼータ函数の伊原表示の導出方法について述べる．表題にもある通り，主定理は「四元数荷重の水野-佐藤ゼータは，一般の有限有向グラフ上で定義しても伊原表示をもつ」ことである．この主定理における要点は・荷重が非可換であること・無向グラフではなく有向グラフ上でゼータを定義したこと・そのような状況下でも伊原表示を持つことである．伊原表示以外にも 3 つの表示があり, これらは可換代数荷重の場合は常に成立することが示されている [7]. しかし, 伊原表示は多くのグラフゼータにおいて存在する行列式表示である反面，その表示で記述するための条件は未だ与えられていない. 非可換荷重を扱う目的は，可換荷重では見えにくかった荷重や行列式の性質を観察することである．本稿で用いた Study 行列式は，通常の行列式と類似の性質を多く持つ一方，特殊な性質も存在する．その 2 種類の行列式の差異や共通点から，伊原表示をもつための条件を絞り出すことが本研究の目標の 1 つである.

有向グラフ上での定義が一番影響を与えるのは，グラフゼータの荷重の在り方である．グラフゼータの荷重は, 基本的に伊原ゼータの荷重 $\theta^{\mathrm{I}}(a,a') = \delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')} - \delta_{a^{-1}a'}$ （a, a' は有向グラフ内のアーク (有向辺)）と同様の “形式” で与えられる. 本稿で扱う水野-佐藤ゼータ [6] はまさに伊原ゼータを一般化したもので, その荷重は伊原ゼータの荷重に基づいて $\theta(a,a') = \tau(a')(\delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')} - \delta_{a^{-1}a'})$ で与えられる．ここで，$\delta_{a^{-1}a'}$ は a と a' が互いに他の「逆」である場合 1, それ以外の場合 0 を返す函数である.

先行研究では，各アークに対し逆が一意に定まる対称有向グラフに対してグラフゼータが定義されてきた．一般の有向グラフに対しては，まず，互いに逆となる 2 つのアークの組を可能な限り設定し，剰余分のアークに対しては逆が存在しないと定めるのが通例であった．この場合，対称有向

* 本研究は JSPS 特別研究員奨励費 (課題番号:20J20590) の助成を受けたものです.

グラフに対するグラフゼータと同様に扱うことが可能であるが，一方で，互いに逆となるアークの組をどのように定めるかによってグラフゼータが変わってしまうのが問題であった．本研究では，任意のアークの逆を「“逆向き” のアーク全て」と定義することにより，逆の選び方に依らないグラフゼータを実現した．さらに，そのような逆の定義のもとでも，四元数水野-佐藤ゼータは伊原表示に変形できることが確認できた．

2 準備

2.1 四元数行列

$\mathbb{H}$ で四元数体を表すこととする．四元数 $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ に対し，x^* を x の共役とする．すなわち，$x^* = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k$ である．x のノルムを $||x|| := \sqrt{xx^*} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ で定義する．これを用いて，x の乗法逆元は $x^{-1} = \frac{x^*}{||x||}$ と書ける．任意の四元数 x は 2 つの複素数 s, p を用いて $x = s + pj$ と表せる．すなわち，$x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ に対して，$s = x_0 + x_1 i,\ p = x_2 + x_3 i \in \mathbb{C}$ とおくと，$x = s + pj$ が成り立つ．$\mathrm{Mat}(m, n; K)$ は体 K 上の $m \times n$ 行列の集合とする．任意の四元数行列に対しても前述のような分解記法が存在する．すなわち，行列 $M \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{H})$ に対して，2 つの複素行列 $M^S, M^P \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{C})$ が存在し，$M = M^S + M^P j$ と表せる．写像 $\psi : \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{H}) \to \mathrm{Mat}(2m, 2n; \mathbb{C})$ を

$$M = M^S + M^P j \mapsto \begin{bmatrix} M^S & -\overline{M^P} \\ M^P & \overline{M^S} \end{bmatrix}$$

で定める．ただし，$\overline{M^P}, \overline{M^S}$ はそれぞれ M^P, M^S の複素共役行列である．本稿で用いる Study 行列式は次で定義される:

$$\mathrm{Sdet} : \mathrm{Mat}(n; \mathbb{H}) \to \mathbb{C} : M \mapsto \det(\psi(M)).$$

Study 行列式は通常の行列式と同じ，または類似の性質をいくつか持っている．例えば，行列式の積の保存性は Study 行列式にも備わっている．これにより，行列式表示である橋本表示の導出は，可換荷重の場合と類似した手順で行うことが可能である．さらに，主定理で扱う補題を以下に述べる:

補題 1. 三角行列 $M = (m_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}(m, m; \mathbb{H})$ の *Study* 行列式は

$$\mathrm{Sdet}(M) = \prod_{i=1}^{m} m_{i,i} m_{i,i}^*$$

で与えられる．

補題 2. k 次正方行列 $M = (m_j)_{i,j} \in \mathrm{Mat}(k, k; \mathbb{H})$ について，

$$(I + M)^{-1} = I - (1 + \sum_{j=1}^{k} m_j)^{-1} M$$

が成り立つ．

補題 3. ブロック行列 $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ (A,D は正方行列) に対し，$M/A := D-CA^{-1}B$ を M の A に関する *Schur* 補行列という．$A, D-CA^{-1}B$ が正則であるとき，M の逆行列は

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}+A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1}\\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1}\end{pmatrix}$$

で表せる．さらに，M が四元数行列のとき，*Study* 行列式は $\mathrm{Sdet}(M)=\mathrm{Sdet}(A)\mathrm{Sdet}(M/A)$ と表せる．

補題 4. ブロック行列 M を命題 2 と同様のものとする．$M/A, A, D$ に加えて，M の D に関する *Schur* 補行列 $M/D := A-BD^{-1}C$ が正則のとき，

$$(M/D)^{-1}=A^{-1}+A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1}$$

となる．さらに，M が四元数行列のとき，$\mathrm{Sdet}(M)=\mathrm{Sdet}(D)\mathrm{Sdet}(M/D)$ が成り立つ．

2.2 Lyndon word

X をアルファベット，その上の語の集合を X^* と表す．X 上の辞書式順序 $<$ により，X^* も全順序集合となる．語 $w=x_1x_2\ldots x_k\in X^*$ に対して，k を w の長さといい，$|w|$ で表す．語 w が素であるとは，w が自身よりも短い任意の語のべきで表せないことをいう．すなわち，$|z|<|w|$, $n|z|=|w|$ となる任意の $z\in X^*$, $n\in\mathbb{Z}_{>}0$ に対して，$w\neq z^n$ が成り立つとき，w は素であるという．また，長さが 0 では無く素である語 w が自身の巡回置換類の中で極小のとき，w を Lyndon 語と呼ぶ．例えば，$X=\{1<2<\ldots<n\}$ 上の語 $w=123$ は Lyndon 語である．w は素であり，巡回置換類 $\{123,231,312\}$ の中で極小であることから明らかである．一方，$w=1231212$ は素であるが，Lyndon 語ではない．w の巡回置換類 $\{1231212,\ 2312121,\ldots,1212123,\ldots,2123121\}$ の中では語 1212123 が極小であり，さらに素であるから，1212123 は Lyndon 語である．X 上のリンドン語の集合を $\mathrm{Lyn}(X)$ で表す．

命題 1 (Lyndon's factorization theorem (cf. [2]))**.** *$\forall w\in X^*$, $\exists l_1,l_2,\ldots,l_r\in\mathrm{Lyn}(X)$ $(l_1\geq l_2\geq\ldots\geq l_r)$ s.t. $w=l_1l_2\ldots l_r$.*

Lyndon factorization theorem より，以下の式が成り立つ:

$$\sum_{w\in X^*}w=\prod_{l\in\mathrm{Lyn}(X)}^{\geq}(1-l)^{-1}=\left(1-\sum_{x\in X}x\right)^{-1}.$$

ただし，$\prod^{\geq}$ は非増加順に積をとることを意味する．

この命題から，次が得られる:

命題 2 ([1]). 各 $x \in X$ に対して正方行列 A_x を対応させる．語 $w = x_1 x_2 \dots x_k \in X^*$ に対し，$M_w := M_{x_1} M_{x_2} \dots M_{x_k}$ と定義する．このとき，以下の等式が成り立つ:

$$\det(I - \sum_{x \in X} M_x) = \prod_{l \in \mathrm{Lyn}(X)} \det(I - M_l).$$

集合 X^2 は X 上の辞書式順序 $<$ によりアルファベットとなる．よって，上の命題は X^2 に対しても同様に成り立つ．すなわち，$(x, x') \in X \times X$ に対する正方行列 $M(x, x')$，語 $l = (x_1, x_1')(x_2, x_2') \dots (x_k, x_k') \in (X^2)^*$ に対して，$M_l := M(x_1, x_1')M(x_2, x_2') \dots M(x_k, x_k')$ と定義したとき，次の式が成り立つ:

$$\det\left(I - \sum_{(x,x') \in X^2} M(x, x')\right) = \prod_{l \in \mathrm{Lyn}(X^2)} \det(I - M_l). \tag{1}$$

2.3 四元数水野-佐藤ゼータ函数

集合 V と，集合 $\{(u, v) | u, v \in V\}$ の部分集合 $\mathfrak{A}$ の組 $\Delta = (V, \mathfrak{A})$ を有限有向グラフとする．$V, \mathfrak{A}$ の元をそれぞれ頂点，アーク (有向辺) という．アーク $a = (u, v)$ に対し，頂点 u, v をそれぞれ a の尾 (tail)，頭 (head) と呼び，$\mathfrak{t}(a)$，$\mathfrak{h}(a)$ と書くことにする．アークはしばしば矢印で描画され，矢尻側の頂点を頭，矢筈側の頂点を尾とする．特に，$\mathfrak{t}(a) = \mathfrak{h}(a)$ となるアークをループという．$\mathfrak{t}(a) = u, \mathfrak{h}(a) = v$ となるアーク $a \in \mathfrak{A}$ の集合を $\mathfrak{A}_{uv}$ と書く．さらに，2 頂点 $u, v \in V$ 間のアークの集合を $\mathfrak{A}(u, v) := \mathfrak{A}_{uv} \cup \mathfrak{A}_{vu}$ で表す．アーク $a \in \mathfrak{A}_{uv}$ に対して任意の $a' \in \mathfrak{A}_{vu}$ を a の逆アークとする．すなわち，a と "逆向き" の全てのアークを a の逆アークとする．$\mathfrak{h}(a_i) = \mathfrak{t}(a_{i+1})$ を満たすようなアークの列 $p = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ を長さ k の路という．特に，$\mathfrak{h}(a_k) = \mathfrak{t}(a_1)$ となるとき，p を閉路という．Δ 内の閉路集合を $C(\Delta)$ で表す．写像 $\tau : \mathfrak{A} \to \mathbb{H}$ に対して，写像 $\theta : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathbb{H}$ を次で定める:

$$\theta(a, a') = \tau(a')(\delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')} - \delta_{a^{-1}a'}).$$

また，閉路 $c = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in C(\Delta)$ に対して，$\mathrm{circ}_\theta(C) := \theta(a_1, a_2) \dots \theta(a_{k-1}, a_k)\theta(a_k, a_1)$ と定義する．

定義 1. 有限有向グラフ Δ に対する四元数水野-佐藤ゼータ函数を以下で定義する:

$$Z_\Delta(t; \theta) := \prod_{C \in C(\Delta)} \frac{1}{(1 - \mathrm{circ}_\theta(C) t^{|C|})(1 - \mathrm{circ}_\theta(C) t^{|C|})^*}$$

この表示をオイラー表示という．

注意 1. 四元数水野-佐藤ゼータ函数は以下のように書ける:

$$Z_\Delta(t; \theta) = \exp\left(\sum_{n \geq 1} \sum_{C \in C(\Delta)} \frac{2\mathrm{Re}\ (\mathrm{circ}_\theta(C)^n)}{n} t^{n|C|}\right)$$

この表示を指数表示という．本稿の主定理では，オイラー表示を橋本表示に変形し，橋本表示から伊原表示を導出するため，指数表示は用いない．ここでは上式の証明は省略するが，*[4]* と同様の手順で導出することが可能である．

3 主定理

3.1 橋本表示

$\Delta = (V, \mathfrak{A})$ を多重アークや多重ループを許す有限有向グラフとし，さらに $\mathfrak{A}$ に全順序を定める．$\theta(a, a')$ を各成分に持つ行列 $M \in \mathrm{Mat}(|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{A}|; \mathbb{H})$ を水野-佐藤ゼータの辺行列と呼ぶ．$E_{a,a'} \in \mathrm{Mat}(|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{A}|; \mathbb{Z})$ を (a, a')-成分が 1, その他の成分が全て 0 である行列とし，$M(a, a') := \theta(a, a')E_{a,a'}$ を定める．補題 1, 式 (1) より，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sdet}\,(I - tM) &= \det\psi(I - tM) \\
&= \prod_{l=(a_1,a_2,\ldots,a_k)\in\mathrm{Lyn}(\mathfrak{A}^2)} \det\psi(I - \theta(a_1, a_2)\theta(a_2, a_3)\cdots\theta(a_{k-1}, a_k)E_{a_1,a_k}t^{|l|}) \\
&= \prod_{l\in C(\Delta)} (1 - \mathrm{circ}_\theta(l)t^{|l|})(1 - \mathrm{circ}_\theta(l)t^{|l|})^*.
\end{aligned}$$

が得られる．これにより, 四元数水野-佐藤ゼータは次の行列式表示に変形できる．

定理 1. 有限有向グラフ Δ に対する四元数水野-佐藤ゼータの橋本表示は以下で与えられる*:*

$$Z_\Delta(t; \theta) = \frac{1}{\mathrm{Sdet}(I - tM)}$$

3.2 伊原表示

定理 2 (Ishikawa 2021+)**.** $\tau_{uv} := \sum_{a\in\mathfrak{A}_{uv}} \tau(a)$ とおく．各 *2* 頂点 u, v に対して, 以下の多項式を定義与える*:*

$$w(u, v) := \begin{cases} (1 - t^2\tau_{vu}\tau_{uv})^{-1} & u \neq v \\ (1 + t\tau_{uu})^{-1} & u = v \end{cases}.$$

頂点位数次の行列 $A_\theta := (\tau_{uv}w(u, v))_{u,v\in V}$，$D_\theta := (\delta_{uv}\sum_{u'\in V} \tau_{uu'}w(u, u')\tau_{u'u})_{u,v\in V}$，$J := (\tau(a')\delta_{a^{-1}a'})_{a,a'\in\mathfrak{A}}$ を用いて，

$$Z_\Delta(t; \theta) = \frac{1}{\mathrm{Sdet}(I + tJ)\mathrm{Sdet}(I - tA_\theta + t^2D_\theta)}.$$

A_θ を荷重隣接行列, D_θ を荷重次数行列といい, この *2* つの行列を用いて表される行列式表示を伊原表示という．

系 1 (Konno, Mitsuhashi and Sato [4])**.** $G = (V, E)$ を有限無向グラフとする．各辺 $e = \{u, v\} \in E$ に対して，*2* つのアーク $a_e = (u, v), a'_e = (v, u)$ を対応させた有向グラフ $\Delta(G) =$

$(V, \mathfrak{A}(G))$ を考える．a_e と a'_e をそれぞれ逆アークと定義すると，荷重隣接行列，荷重次数行列は $A_{\mathrm{s}} = (\sum_{a\in\mathfrak{A}_{uv}}(1-t^2\tau(a)\tau(a^{-1}))^{-1}\tau(a))_{u,v\in V}$，$D_{\mathrm{s}} = (\delta_{uv}\sum_{w\in V, w\neq u}\sum_{a\in\mathfrak{A}_{uw}}(1-t^2\tau(a)\tau(a^{-1}))^{-1}\tau(a)\tau(a^{-1}))_{u,v\in V}$ となる．このとき，$\Delta(G)$ に対する四元数水野-佐藤ゼータの伊原表示は次で与えられる:

$$\begin{aligned}
Z_\Delta(t;\theta) &= \frac{1}{\mathrm{Sdet}(I+tJ)\mathrm{Sdet}(I-tA_{\mathrm{s}}+t^2D_{\mathrm{s}})} \\
&= \frac{1}{\prod_{a\in\mathfrak{A}}(1-t^2\tau(a)\tau(a^{-1})(1-t^2\tau(a)\tau(a^{-1})^*\mathrm{Sdet}(I-tA_{\mathrm{s}}+t^2D_{\mathrm{s}})}.
\end{aligned}$$

Proof. (定理 2 の証明) 行列 M に対して，行列 K, L を $K = (\delta_{\mathfrak{h}(a)v})_{a\in\mathfrak{A}, v\in V}$，$L = (\tau(a')\delta_{v\mathfrak{t}(a')})_{v\in V, a'\in\mathfrak{A}}$ と定めると，$M = KL - J$ が成り立つ．よって，水野-佐藤ゼータの橋本表示は以下のように変形できる:

$$\begin{aligned}
Z_\Delta(t;\theta)^{-1} &= \mathrm{Sdet}((I+tJ)-tKL) \\
&= \mathrm{Sdet}(I+tJ)\mathrm{Sdet}(I-t(I+tJ)^{-1}KL) \\
&= \mathrm{Sdet}(I+tJ)\mathrm{Sdet}(I-tL(I+tJ)^{-1}K).
\end{aligned}$$

部分グラフ $(V, \mathfrak{A}(u,v))$ に対する J, K, L の小行列をそれぞれ $J(u,v) := (\tau(a')\delta_{a^{-1}a'})_{a,a'\in\mathfrak{A}(u,v)}$，$K(u,v) := (\delta_{\mathfrak{h}(a)w})_{a\in\mathfrak{A}(u,v), w\in V}$，$L(u,v) := (\tau(a')\delta_{w\mathfrak{t}(a')})_{w\in V, a'\in\mathfrak{A}(u,v)}$ とおくと，$J = \oplus_{u,v\in V}J(u,v)$ と表せることから，$L(I+tJ)^{-1}K = \sum_{u,v\in V}L(u,v)(I+tJ(u,v))^{-1}K(u,v)$ が成り立つ．特に，$J(u,v)$ の形は $\mathfrak{A}(u,v)$ の様相により変化する．したがって，各 $\mathfrak{A}(u,v)$ に対して $L(u,v)(I+tJ(u,v))^{-1}K(u,v)$ をして求める．$\mathfrak{A}(u,v) \neq \emptyset$ は以下の 3 つの場合のいずれかに当てはまる:

- $\mathfrak{A}(u,v) = \mathfrak{A}_{uv}$,
- $\mathfrak{A}(u,v) = \mathfrak{A}(u,u) = \mathfrak{A}_{uu}$,
- $\mathfrak{A}(u,v) = \mathfrak{A}_{uv} \sqcup \mathfrak{A}_{vu}$, ただし $\mathfrak{A}_{uv}, \mathfrak{A}_{vu} \neq \emptyset$.

頂点 $u, v \in V$ に対し, $\mathfrak{A}(u,v) = \mathfrak{A}_{uv}$ を満たす場合, すなわち，任意のアークに対して逆アークが存在しない場合, $J(u,v) = O$ は明らかである．よって，$L(u,v)(I+tJ(u,v))^{-1}K(u,v) = L(u,v)K(u,v)$ が成り立つ．便宜上, 行列 $W(u,v) := w(u,v)I_{|\mathfrak{A}_{uv}|} \oplus w(v,u)I_{|\mathfrak{A}(u,v)\setminus\mathfrak{A}_{vu}|}$ を用いて

$$L(u,v)(I+tJ(u,v))^{-1}K(u,v) = L(u,v)W(u,v)^{-1}K(u,v) \tag{2}$$

と記述する．

次に，$\mathfrak{A}(u,u) = \mathfrak{A}_{uu}$ の場合，すなわち，頂点 u におけるループが存在する場合，$J(u,u) =$

$(\tau(a'))_{a,a'\in\mathfrak{A}(u,u)}$ となる．$J(u,u)K(u,u)=\tau_{uu}K(u,u)$ となることに注意すると, 補題 2 より,

$$\begin{aligned}
L(u,u)(I+tJ(u,u))^{-1}K(u,u) &= L(u,u)(I-tw(u,u)J(u,u))K(u,u)\\
&= L(u,u)w(u,u)\{I+t(t^{-1}(w(u,u)^{-1}-1)I-J(u,u))\}K(u,u)\\
&= L(u,u)w(u,u)\{K(u,u)+t(\tau_{uu}K(u,u)-\tau_{uu}K(u,u))\}\\
&= L(u,u)w(u,u)K(u,u)\\
&= L(u,u)W(u,u)^{-1}K(u,u). \qquad (3)
\end{aligned}$$

最後に，$\mathfrak{A}(u,v)=\mathfrak{A}_{uv}\sqcup\mathfrak{A}_{vu}$ の場合，すなわち，u,v 間の任意のアークに逆アークが少なくとも 1 つ存在する場合を考える．$\mathfrak{A}_{uv}=\{a_1,a_2,\dots,a_k\},\mathfrak{A}_{vu}=\{a_{k+1},a_{k+2},\dots,a_{k+l}\}$ とおく．$B:=(\tau(a_{k+j}))_{i,j}\in\mathrm{Mat}(k,l;\mathbb{H})$, $C:=(\tau(a_j))_{i,j}\in\mathrm{Mat}(l,k;\mathbb{H})$ とおくと，$I+tJ(u,v)$ は $\begin{pmatrix} I_k & tB\\ tC & I_l\end{pmatrix}$ とブロック行列として表せる．補題 3,4 により，$(I+tJ(u,v))^{-1}$ は $\begin{pmatrix} (I_k-t^2BC)^{-1} & -tB(I_l-t^2CB)^{-1}\\ -t(I_l-t^2CB)^{-1}C & (I_l-t^2CB)^{-1}\end{pmatrix}$ となる．行列 BC,CB は正方行列であり, 各列の成分が全て等しい行列なので, 補題 2 より, $(I_k-t^2BC)^{-1}=I_k+t^2w(u,v)BC$, $(I_l-t^2CB)^{-1}=I_l+t^2w(v,u)CB$ が得られる．$J(u,v)^2K(u,v)=t^{-2}(I-W(u,v))K(u,v)$ が成り立つことに注意すると,

$$\begin{aligned}
L(u,v)(I+tJ(u,v))^{-1}K(u,v) = L(u,v)&W(u,v)^{-1}K(u,v)\\
&-tL(u,v)W(u,v)^{-1}J(u,v)K(u,v) \qquad (4)
\end{aligned}$$

を得る．

式 (2),(3),(4) をまとめると,

$$L(I+tJ)^{-1}K=\sum_{u,v\in V}L(u,v)W(u,v)^{-1}K(u,v)-t\sum_{\substack{u,v\in V\\ u\neq v}}L(u,v)W(u,v)^{-1}J(u,v)K(u,v)$$

と書ける．ここで, $\sum_{u,v\in V}L(u,v)W(u,v)^{-1}K(u,v)$, $\sum_{\substack{u,v\in V\\ u\neq v}}L(u,v)W(u,v)^{-1}J(u,v)K(u,v)$ の各成分を計算すると, それぞれ A_θ, D_θ と等しいことが確認できる．以上より,

$$\mathrm{Sdet}(I-tL(I+tJ)^{-1}K)=\mathrm{Sdet}(I-tA_\theta+t^2D_\theta)$$

が成り立つ．

□

参考文献

[1] S. A. Amitsur, “On the characteristic polynomial of a sum of matrices”, *Linear and Multilinear Algebra 9*, 177-182, 1980.

[2] D.Foata and D.Zeilberger, "A combinatorial proof of bass's evaluations of the ihara-selberg zeta function for graphs", *Transactions of the American Mathematical Society*, 351.6, 2257-2274, 1999.

[3] Y. Ihara, "On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields", *Journal of the Mathematical Society of Japan* 18.3, 219 – 235, 1966.

[4] N. Konno, H. Mitsuhashi, and I. Sato, "The quaternionic weighted zeta function of a graph", *Journal of Algebraic Combinatorics*, 44.3, 729 – 755, 2016.

[5] N. Konno, and I. Sato, "On the relation between quantum walks and zeta functions", *Quantum Information Processing* 11.2, 341-349, 2012.

[6] H. Mizuno, and I. Sato, "Weighted zeta functions of graphs" *J. Comb. Theory, Ser. B* 91.2, 169 – 183, 2004.

[7] H. Morita, "Ruelle zeta functions for finite digraphs", *Linear Algebra and its Applications*, 603, 329-358, 2020.