二次元共形場理論の consistency と full 頂点代数

(On consistency of two-dimensional conformal field theory and full vertex algebra)

カブリ数物連携宇宙研究機構　森脇 湧登

Yuto Moriwaki

Kavli institute for the physics and mathematics of the universe

1　序文

本稿の目的は、筆者が [M2] で定義した full 頂点代数という代数が、「いかにして物理 (二次元共形場理論) から現れるか?」を informal に概説することである。共形場理論からは相関関数という物理量を取り出すことができる。逆に相関関数を用いて共形場理論を特徴づけることもできる。本稿の前半部分では、informal な議論に基づき共形場理論の相関関数から full 頂点代数が定義されることを見る。full 頂点代数の定義で本質的なのは物理におけるブートストラップ仮説と呼ばれるアイディアである。このアイディアを解説することも本稿の目的の一つである。また後半部分では、full 頂点代数の相関関数を数学的に定義し、前半部分の議論で用いた種々の性質を定義から導出する。後半部分の数学的内容は [M1] に基づいている。最後の二つの章では、頂点代数と共形場理論の関係性について、またブートストラップ仮説を用いた高次元の共形場理論の研究について簡潔に述べる。full 頂点代数を定義する純粋に数学的なモチベーションに関しては、別の RIMS の講究録 [M4] を参照されたい。

2　共形場理論

2.1　共形場理論と相関関数

場の量子論では理論が定義される時空を決める必要があるが、以下、リーマン球面 $\mathbb{C}P^1$ 上の共形場理論を考える。物理の目的の一つは「観測可能な物理量」を理論的に予言することである。場の量子論から取り出される重要な物理量の一つに相関関数と呼ばれるものがある。実は相関関数が与えられると共形場理論は復元できるため、本稿では相関関数が中心的な役割を果たす。共形場理論に含まれる可能な物理状態全体はベクトル空間をなすがこれを F とおく (正確には原点に局在する状態全体)。このとき、時空 $\mathbb{C}P^1$ の n 点 $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}P^1$ の各点に $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ をそれぞれ置いた状態を考える (図 1)。

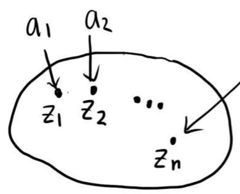

図 1:

状態図 1 が、起こりうる確率はある複素数 (確率振幅) の絶対値で表される (図 2)。これが相関関数である。

より正確に述べるため、$\mathbb{C}P^1$ 上の n 点の配位空間を

$$X_n(\mathbb{C}P^1) = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}P^1)^n \mid z_i \neq z_j\}$$

とおく。$\mathbb{C}P^1$ 上定義された共形場理論の n 点相関関数とは、

$$\mathrm{Cor}_n : X_n(\mathbb{C}P^1) \times F^{\otimes n} \to \mathbb{C}$$

のことである。

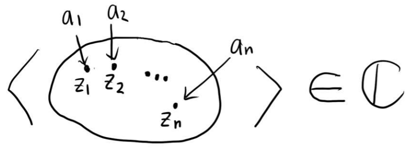

図 2:

Remark 2.1 *(高次元の)* 場の量子論において相関関数がどのように役立つかは、*[IZ]* などを参照されたい。

S_n を n 次の対称群とする。n 点相関関数は次の顕著な性質を満たす:
任意の $\sigma \in S_n$ と $a_1, \dots, a_n \in F$ に対して、

$$\mathrm{Cor}_n(a_1, z_1, \dots, a_n, z_n) = \mathrm{Cor}_n(a_{\sigma 1}, z_{\sigma 1}, \dots, a_{\sigma n}, z_{\sigma n}). \tag{1}$$

2.2 共形対称性

時空 $\mathbb{R}^n$ 上の (ユークリッド的) 場の理論にはポアンカレ群 $\mathbb{R}^n \rtimes SO(n)$ が作用する。この対称性がより大きな対称性 $\mathbb{R}^n \rtimes SO(n) \subset SO(n+1,1)$(共形対称性) に拡張している場の理論を共形場理論 (Conformal field theory) と呼ぶ。共形対称性は特にスケール変換 $x \mapsto rx$ を含む $r \in \mathbb{R}_{>}$。

さて、二次元共形場理論の状態の空間 F には、(大域的) 共形対称性 $\mathrm{SO}(3,1) \cong \mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ が作用している。良い共形場理論を考える場合、F は回転 $\mathrm{SO}(2) \subset \mathrm{SO}(3,1)$ とスケール変換 $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathrm{SO}(3,1)$ の固有空間に分解するため、状態空間は $F = \bigoplus_{H \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}} F_{H,s}$ と次数付けを持つ。物理的には (H,s) はそれぞれ energy と spin に対応する。

実リー代数 $\mathrm{so}(3,1)$ の複素化は $\mathrm{sl}_2\mathbb{C} \oplus \mathrm{sl}_2\mathbb{C} = \bigoplus_{i=-1,0,1} \mathbb{C}L(i) \oplus \bigoplus_{j=-1,0,1} \mathbb{C}\overline{L}(j)$ であり、実際はこの直和分解に即した作用を考える方が便利なため、$(h, \bar{h}) = (\frac{1}{2}(H+s), \frac{1}{2}(H-s))$ による $\mathbb{R}^2$ 次数付けを考えることが多い。これを共形ウェイトと呼ぶ。

このとき相関関数は以下の性質を満たす: $a_i \in F_{h_i, \bar{h}_i}$ のとき、

$$(\sum_{i=1}^n \frac{d}{dz_i})\mathrm{Cor}_n(a_1, z_1, \dots, a_n, z_n) = 0$$
$$(\sum_{i=1}^n z_i\frac{d}{dz_i} + h_i)\mathrm{Cor}_n(a_1, z_1, \dots, a_n, z_n) = 0$$
$$(\sum_{i=1}^n z_i^2\frac{d}{dz_i} + 2h_i z_i)\mathrm{Cor}_n(a_1, z_1, \dots, a_n, z_n) = \mathrm{Cor}_n(L(1)a_1, z_1, \dots, a_n, z_n) + \cdots + \mathrm{Cor}_n(a_1, z_1, \dots, L(1)a_n, z_n)$$
$$(\sum_{i=1}^n \frac{d}{d\bar{z}_i})\mathrm{Cor}_n(a_1, z_1, \dots, a_n, z_n) = 0$$
$$(\sum_{i=1}^n \bar{z}_i\frac{d}{d\bar{z}_i} + \bar{h}_i)\mathrm{Cor}_n(a_1, z_1, \dots, a_n, z_n) = 0$$
$$(\sum_{i=1}^n \bar{z}_i^2\frac{d}{d\bar{z}_i} + 2\bar{h}_i \bar{z}_i)\mathrm{Cor}_n(a_1, z_1, \dots, a_n, z_n) = \mathrm{Cor}_n(\overline{L}(1)a_1, z_1, \dots, a_n, z_n) + \cdots + \mathrm{Cor}_n(a_1, z_1, \dots, \overline{L}(1)a_n, z_n).$$

共形対称性は時空 $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} = \mathbb{C}P^1$ に strict three-transitive に作用するため、上記の連立微分方程式から相関関数

$$\mathrm{Cor}_n : X_n(\mathbb{C}P^1) \times F^{\otimes n} \to \mathbb{C}$$

は、$n \leq 3$ ならば、定数の不定性を除き完全に決まってしまう。

例： $a_i \in F_{h_i, \bar{h_i}}$ (i=1,2,3) を準プライマリ状態とする。ただし $a \in F_{h,\bar{h}}$ が準プライマリ状態であるとは、$L(1)a = \overline{L}(1)a = 0$ が成り立つことをいう。

このとき、a_i たちの 2 点、3 点相関関数は、以下のようにかける:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cor}_2(a_1, z_1, a_2, z_2)\\
&= \delta_{h_1,h_2}\delta_{\bar{h}_1,\bar{h}_2} C_{a_1,a_2}(z_1 - z_2)^{-2h_1}(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{-2\bar{h}_1}\\
&\mathrm{Cor}_3(a_1, z_1, a_2, z_2, a_3, z_3)\\
&= C_{a_1,a_2,a_3}(z_1 - z_2)^{h_3 - h_1 - h_2}(z_2 - z_3)^{h_1 - h_2 - h_3}(z_1 - z_3)^{h_2 - h_1 - h_3}\\
&(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{\bar{h}_3 - \bar{h}_1 - \bar{h}_2}(\bar{z}_2 - \bar{z}_3)^{\bar{h}_1 - \bar{h}_2 - \bar{h}_3}(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)^{\bar{h}_2 - \bar{h}_1 - \bar{h}_3},
\end{aligned}$$

ただし $C_{a_1,a_2}, C_{a_1,a_2,a_3} \in \mathbb{C}$。
(証明のスケッチ)
多項式のべき $(z_1-z_2)^h$ は以下の性質を満たすことを注意する。

$$(\frac{d}{dz_1}+\frac{d}{dz_2})(z_1-z_2)^h = 0$$
$$(z_1\frac{d}{dz_1}+z_2\frac{d}{dz_2})(z_1-z_2)^h = h(z_1-z_2)^h$$

このことから、$f(z_1,z_2) = \mathrm{Cor}_2(a_1,z_1,a_2,z_2)(z_1-z_2)^{h_1+h_2}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{\bar{h}_1+\bar{h}_2}$ は、

$$(\frac{d}{dz_1}+\frac{d}{dz_2})f(z_1,z_2) = (\frac{d}{d\bar{z}_1}+\frac{d}{d\bar{z}_2})f(z_1,z_2) = 0$$
$$(z_1\frac{d}{dz_1}+z_2\frac{d}{dz_2})f(z_1,z_2) = (\bar{z}_1\frac{d}{d\bar{z}_1}+\bar{z}_2\frac{d}{d\bar{z}_2})f(z_1,z_2) = 0$$

を満たすため定数関数である。$(z_1^2\frac{d}{dz_1}+z_2^2\frac{d}{dz_2})(z_1-z_2)^{-h_1-h_2} = -(h_1+h_2)(z_1+z_2)(z_1-z_2)^{-h_1-h_2}$ であるから、

$$(z_1^2\frac{d}{dz_1}+z_2^2\frac{d}{dz_2}+h_1z_1^2+h_2z_2^2)\mathrm{Cor}_2(a_1,z_1,a_2,z_2) = 0$$
$$(\bar{z}_1^2\frac{d}{d\bar{z}_1}+\bar{z}_2^2\frac{d}{d\bar{z}_2}+\bar{h}_1\bar{z}_1^2+\bar{h}_2\bar{z}_2^2)\mathrm{Cor}_2(a_1,z_1,a_2,z_2) = 0$$

を満たすために、$h_1 = h_2, \bar{h}_1 = \bar{h}_2$ が分かる。三点の場合も同様である (数学的な主張は [M1] 参照)。

よってスカラー $C_{a_1,a_2}, C_{a_1,a_2,a_3} \in \mathbb{C}$ を決めれば、準プライマリ状態の間の相関関数の形は共形ウェイトのみから決まってしまう。そのため、$C_{a_1,a_2}, C_{a_1,a_2,a_3} \in \mathbb{C}$ は理論の構造を決める構造定数と呼ばれる。とくに二点相関関数を与える構造定数は $C_{-,-} : F \otimes F \to \mathbb{C}$ という形をしているため、F 上の内積を与える。

Remark 2.2 三点相関関数 $(z_1-z_2)^{h_3-h_1-h_2}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{\bar{h}_3-\bar{h}_2-\bar{h}_1}...$ は $h_1,h_2,h_3,\bar{h}_1,\bar{h}_2,\bar{h}_3 \in \mathbb{R}$ であるため、一価関数でないように見える。

しかし実際は、共形ウェイト $(h,\bar{h})$ とスピンとエネルギー (s,H) の間には $s = h-\bar{h}, H = h+\bar{h}$ という関係がある。スピン s は $\mathrm{SO}(2)$ の表現であるから、$\theta \mapsto \exp(2\pi i s\theta)$ が *well-defined* であるために整数である *(Fermion* も含む理論を考える場合は半整数も許される*)*。よって

$$z^h\bar{z}^{\bar{h}} = z^s(z\bar{z})^{\bar{h}}$$

より、三点相関関数は $X_3(\mathbb{C}P^1)$ 上の一値な関数を定める。

以下、$F_{0,0}$ は真空ベクトル $\mathbf{1}$ と呼ばれる特別なベクトルで張られていると仮定する $F_{0,0} = \mathbb{C}\mathbf{1}$。後で見るように真空は、環論における単位元に相当する。

Remark 2.3 もし理論がユニタリならば、$F_{0,0}$ は最低エネルギーをもつ状態に対応する。

$<>$: $F = \bigoplus_{h,\bar{h}} F_{h,\bar{h}} \to F_{0,0} \cong \mathbb{C}$ を射影で定義する。ただし、$F_{0,0} \cong \mathbb{C}$ は $<\mathbf{1}>= 1$ を満たすように定める。この $<->\in F^*$ のことを、真空期待値と呼ぶ。共形対称性から、一点相関関数は、定数関数 $\mathrm{Cor}_1(a,z) =<a>\in \mathbb{C}$ となり $z \in \mathbb{C}P^1$ によらない。

2.3 相関関数と頂点作用素

場の理論では、二つの素粒子を近づけると相関関数が発散する。一般の場の理論では、この発散は様々な事情により難しい (cut-off scale への依存など)。しかし共形場理論においては、共形対称性から i 番目の粒子と j 番目の粒子を近づけたとき $(z_i \to z_j)$、相関関数の極での振る舞いは、$(z_i-z_j)^r(\bar{z}_i-\bar{z}_j)^s$, $(r,s \in \mathbb{R}$

かつ $r-s\in\mathbb{Z}$) と、$z_i - z_j$ と $\bar{z}_i - \bar{z}_j$ の実数べきで記述される。すなわち $z_1 \to z_2$ において次の等式が成立する:

$$\mathrm{Cor_n}(a_1, z_1, a_2, z_2, \dots) = \sum_{r,s\in\mathbb{R}} (z_1 - z_2)^{-r-1}(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{-s-1} f_{r,s}(z_2, z_3, \dots, z_n).$$

さて、この expansion の係数 $f_{r,s} : X_{n-1}(\mathbb{C}P^1) \to \mathbb{C}$ が、$n-1$ 点相関関数でかけると仮定する。

すなわち、各 $r, s \in \mathbb{R}$ に対して、

$$(r,s) : F \times F \to F,\ (a,b) \mapsto a(r,s)b$$

なる積が与えられ、

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cor_n}(a_1, z_1, a_2, z_2, \dots)\\ &= \sum_{r,s\in\mathbb{R}} (z_1 - z_2)^{-r-1}(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{-s-1} \mathrm{Cor_{n-1}}(a_1(r,s)a_2, z_2, \dots, a_n, z_n)\end{aligned}$$

を満たすと仮定する。

ここで頂点作用素 ((r,s) 積の母関数)

$$\begin{aligned}Y(-,z) &: F \to \mathrm{End}F[[z, \bar{z}, |z|^{\mathbb{R}}]],\\ Y(a,z)b &= \sum_{r,s\in\mathbb{R}} a(r,s)bz^{-r-1}\bar{z}^{-s-1}\end{aligned}$$

を導入すると、

$$\mathrm{Cor_n}(a_1, z_1, a_2, z_2, \dots) = \mathrm{Cor_{n-1}}(Y(a_1, z_1 - z_2)a_2, z_2, \dots, a_n, z_n)$$

と書ける。

繰り返し用いると、

$$\begin{aligned}\mathrm{Cor}_n(a_1, z_1, a_2, z_2, \dots, a_n, z_n) &= \mathrm{Cor}_{n-1}(Y(a_1, z_1 - z_2)a_2, z_2, \dots, a_n, z_n)\\ &= \mathrm{Cor}_{n-2}(Y(Y(a_1, z_1 - z_2)a_2, z_2 - z_3)a_3, \dots, a_n, z_n)\\ &= \mathrm{Cor}_1(Y \dots Y(Y(a_1, z_1 - z_2)a_2, z_2 - z_3)a_3, z_3 - z_4) \dots)a_n).\end{aligned}$$

ここで $\mathrm{Cor}_1(-,z) =< - >: F = \bigoplus_{h,\bar{h}} F_{h,\bar{h}} \to F_{0,0} \cong \mathbb{C}$ を思い出すと、

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cor}_n(a_1, z_1, a_2, z_2, \dots, a_n, z_n)\\ &=< Y \dots Y(Y(a_1, z_1 - z_2)a_2, z_2 - z_3)a_3, z_3 - z_4) \dots)a_n >\end{aligned}$$

が分かる。すなわち、n 点相関関数は頂点作用素と真空期待値 $<>: F \to \mathbb{C}$ のみから決まる。

二点相関関数が内積 $(-,-) : F \otimes F \to \mathbb{C}$ を与えることを思い出すと、

$$\begin{aligned}&C_{a_1,a_2,a_3} \times (z_1 - z_2)^{\bullet} \dots\\ &= \mathrm{Cor}_3(a_1, z_1, a_2, z_2, a_3, z_3)\\ &= \mathrm{Cor}_2(Y(a_1, z_1 - z_2)a_2, z_2, a_3, z_3)\\ &= (Y(a_1, z_1 - z_2)a_2, a_3)(z_2 - z_3)^{\bullet} \dots\end{aligned}$$

より、構造定数を考えること頂点作用素はほぼ同値である。

Remark 2.4 このことと、n 点相関関数が頂点作用素から計算できることを合わせると、共形場理論の相関関数は二点相関関数と三点相関関数から全て計算できることが分かる *(たとえば [P])*。よって三点の構造定数 $C_{-,-,-} : F \otimes F \otimes F \to \mathbb{C}$ が重要である。

これまで $z_1 \to z_2$ としたが、$z_{n-1} \to z_n$ としてもよく、この場合

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cor}_n(a_1, z_1, \ldots, a_{n-1}, z_{n-1}, a_n, z_n) \\
&= \mathrm{Cor}_{n-1}(a_1, z_1, \ldots, Y(a_{n-1}, z_{n-1} - z_n)a_n, z_n) \\
&\ldots \\
&= < Y(a_1, z_1 - z_n) \ldots Y(a_{n-1}, z_{n-1} - z_n)a_n > .
\end{aligned}$$

これは $\mathbb{C}[[z_1, \bar{z}_1, |z_1|^{\mathbb{R}}, \ldots, z_n, \bar{z}_n, |z_n|^{\mathbb{R}}]]$ なる formal power series の元を定める。

このように頂点作用素を用いた可能な縮約の仕方は多数あり、見かけ上異なる formal power series を与える。またそれらは異なる収束域を持つ。たとえば、

$$< Y(a_1, z_1 - z_n) \ldots Y(a_{n-1}, z_{n-1} - z_n)a_n > .$$

の場合、まず $z_{n-1} \to z_n$ として、次に $z_{n-2} \to \bar{z}_n$ を考えているため、$|z_{n-2} - z_n| > |z_{n-1} - z_n|$ が成立する必要がある。すなわち収束域は以下の領域になる：

$$\{z_1, \ldots, z_n) \in X_n(\mathbb{C}P^1) \mid |z_1 - z_n| > \ldots, > |z_{n-2} - z_n| > |z_{n-1} - z_n|\}$$

Remark 2.5 相関関数の共形対称性は頂点作用素においては以下の等式に置き換わる*:* $a \in F_{h,\bar{h}}$ に対して、

$$\begin{aligned}
[L(-1), Y(a,z)] &= \frac{d}{dz} Y(a,z), \\
[\overline{L}(-1), Y(a,z)] &= \frac{d}{d\bar{z}} Y(a,z), \\
[L(0), Y(a,z)] &= (z\frac{d}{dz} + h) Y(a,z), \\
[\overline{L}(0), Y(a,z)] &= (\bar{z}\frac{d}{d\bar{z}} + \bar{h}) Y(a,z), \\
[L(1), Y(a,z)] - Y(L(1)a, z) &= (z^2\frac{d}{dz} + 2hz) Y(a,z), \\
[\overline{L}(-1), Y(a,z)] - Y(\overline{L}(1)a, z) &= (\bar{z}^2\frac{d}{d\bar{z}} + 2\bar{h}\bar{z}) Y(a,z).
\end{aligned}$$

2.4 共形場理論の Consistency

以上をまとめると、共形場理論とは $\mathrm{sl}_2\mathbb{C} \oplus \mathrm{sl}_2\mathbb{C}$ の表現 F で、表現から定まる次数付け $F = \bigoplus_{h,\bar{h} \in \mathbb{R}^2} F_{h,\bar{h}}$ と、頂点作用素

$$\begin{aligned}
Y(-, z) &: F \to \mathrm{End}F[z, \bar{z}, |z|^{\mathbb{R}}] \\
Y(a, z) &= \sum_{r,s \in \mathbb{R}} a(r,s) z^{-r-1} \bar{z}^{-s-1}
\end{aligned}$$

を持ち、頂点作用素を用いて、どんな順序どんな結合の仕方で計算した相関関数も解析接続すると、同じ $X_n(\mathbb{C}P^1)$ 上の実解析的関数 Cor_n を定めるものである。これを物理では ($\mathbb{C}P^1$ 上の) 共形場理論の consistency と呼ぶ。またこれまで出てこなかったが、真空ベクトル $\mathbf{1} \in F_{0,0}$ は、

$$\begin{aligned}
Y(\mathbf{1}, z) &= \mathrm{id}_F \\
y(a, z)\mathbf{1} &= a + O(z, \bar{z}) \in F[[z, \bar{z}]]
\end{aligned}$$

を満たすことを要請する。ここで id_F は恒等演算子。

真空ベクトルの consistency を用いると、たとえば三点相関関数のうちの一つを真空に取ると、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cor}_3(\mathbf{1}, z_1, a_2, z_2, a_3, z_3) &= < Y(\mathbf{1}, z_1 - z_3) Y(a_2, z_2 - z_3) a_3 > \\
&= < Y(a_2, z_2 - z_3) a_3 > \\
&= \mathrm{Cor}_2(a_2, z_2, a_3, z_3)
\end{aligned}
$$

となり二点相関関数に帰着される (真空の位置、z_1 によらない)。これは三点相関関数の公式に $(h_1, \bar{h}_1) = (0, 0)$ をいれた結果

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Cor}_3(\mathbf{1}, z_1, a_2, z_2, a_3, z_3) \\
&= C_{\mathbf{1}, a_2, a_3} (z_1 - z_2)^{h_3 - h_1 - h_2} (z_2 - z_3)^{h_1 - h_2 - h_3} (z_1 - z_3)^{h_2 - h_1 - h_3} \\
&(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{\bar{h}_3 - \bar{h}_1 - \bar{h}_2} (\bar{z}_2 - \bar{z}_3)^{\bar{h}_1 - \bar{h}_2 - \bar{h}_3} (\bar{z}_1 - \bar{z}_3)^{\bar{h}_2 - \bar{h}_1 - \bar{h}_3} \\
&= C_{\mathbf{1}, a_2, a_3} (z_2 - z_3)^{-h_2 - h_3} (\bar{z}_2 - \bar{z}_3)^{-\bar{h}_2 - \bar{h}_3}
\end{aligned}
$$

と、$C_{\mathbf{1}, a_2, a_3} = C_{a_2, a_3}$ とすることで compatible である。

このように共形場理論の consistency は、構造定数の間の種々の関係式に帰着される。ではどのくらいたくさん関係式が存在しうるだろうか？

2.5 ブートストラップ仮説

共形場理論のブートストラップ仮説によると、共形場理論の consitency は実は特別な四点相関関数の一致からすべて従う。

(ブートストラップ仮説)

任意の $a_1, a_2, a_3, a_4 \in F$ に対して、以下の formal power series:

$$
\begin{aligned}
&< Y(Y(a_1, z_{12}) a_2, z_{24}) Y(a_3, z_{34}) a_4 > \\
&< Y(Y(a_1, z_{13}) a_3, z_{34}) Y(a_2, z_{24}) a_4 >
\end{aligned} \tag{2}
$$

が $X_4(\mathbb{C}P^1)$ 上の一価実解析的関数に収束して一致するならば、全ての consistency が成り立つ。ただし $z_{ij} = z_i - z_j$。式 (2) をブートストラップ等式と呼ぶ。

式 (2) は構造定数に制約条件を課す上では非常に便利であるが、理論展開をする上ではやや不便であるので、ここでは少し形を変更した以下の等式を用いる (結果として同値であることが証明できる) :

$$
\begin{aligned}
&< Y(a_1, z_1) Y(a_2, z_2) Y(a_3, z_3) Y(a_4, z_4) \mathbf{1} > \\
&< Y(a_1, z_1) Y(a_3, z_3) Y(a_2, z_2 2) Y(a_4, z_4) \mathbf{1} >
\end{aligned} \tag{3}
$$

ここで、ブートストラップ仮説の意味を考えてみる。A をアーベル群、$\cdot : A \otimes A \to A$ をその上の bilinear な線形写像 (結合的とは限らない積) とする。また $1 \in A$ が積 $\cdot$ に関して単位元としてふるまうとする (すなわち $1 \cdot a = a = a \cdot 1$)。このとき、頂点作用素 $Y(-, z) : A \to \mathrm{End} A[[z, \bar{z}, |z|^{\mathbb{R}}]]$ を、$Y(a, z) b = ab$ によって定める (位置によらない)。

ここで

$$
a(bc) = b(ac) \tag{4}
$$

が任意の $a, b, c \in A$ に対して成り立つと仮定する。すると、$Y(a, z) Y(b, w) = Y(b, w) Y(a, z)$ であるから、ブートストラップ仮説の仮定は成り立ち、A は共形場理論になる。よって n 個の元の積 $A^{\otimes n} \to A$ は縮約の順序 (積の括弧付け) によらず一意に決まるはずである。すなわち A は結合代数になるはずである。

これは実際に正しく、(4) を仮定すると、$ab = a(b1) = b(a1) = ba$ であり、$a(bc) = a(cb) = c(ab) = (ab)c$ となるから、とくに積は括弧のつけ方によらない。

よって共形場理論のブートストラップ仮説とは、「代数の結合法則を考える上で、全ての括弧付けをチェックする必要はなく、$a(bc) = a(bc)$ さえ要請すれば、残りは自動的に従う。」という事実のオペラッド的拡張である。

Remark 2.6 基本的には共形場理論は「配位空間のなすオペラッド $\{X_n(\mathbb{C}P^1)\}_{n=1,2,\dots}$」上の代数と思える。ただし、テクニカルには様々な障害がある。こういったオペラッドを用いた共形場理論への取り組みに関してはたとえば *[HL2]* を参照されたい。

2.6 四点相関関数と conformal singularity

2.2 章で見たように、共形対称性は三点相関関数までは形を完全に決めてしまう。では四点相関関数はどのような形をしているだろうか。超幾何関数の文脈で良く知られた事実である同相写像

$$\xi : X_4(\mathbb{C}P^1)/\mathrm{PSL}_2\mathbb{C} \to \mathbb{C}P^1 \setminus \{0,1,\infty\},\ (z_1,z_2,z_3,z_4) \mapsto \frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}$$

を思い出そう [Y]。

$a_i \in F_{h_i,\bar{h}_i}$ $(i=1,2,3,4)$ が準プライマリ状態であるとし、

$$\begin{aligned} Q(z) = &(z_1-z_2)^{-2h_2}(z_3-z_4)^{h_1-h_2-h_3-h_4}(z_1-z_4)^{h_2-h_1+h_3-h_4}(z_1-z_3)^{h_2-h_1-h_3+h_4} \\ &(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{-2\bar{h}_2}(\bar{z}_3-\bar{z}_4)^{\bar{h}_1-\bar{h}_2-\bar{h}_3-\bar{h}_4}(\bar{z}_1-\bar{z}_4)^{\bar{h}_2-\bar{h}_1+\bar{h}_3-\bar{h}_4}(\bar{z}_1-\bar{z}_3)^{\bar{h}_2-\bar{h}_1-\bar{h}_3+\bar{h}_4} \end{aligned} \tag{5}$$

とする。このとき、2.2 章の議論と同様にして、$\mathrm{Cor}_4(a_1,z_1)Q(z)^{-1}$ は 6 つの微分作用素の kernel に入る、すなわち $(\sum_{i=1}^4 \frac{d}{dz_i})$, $(\sum_{i=1}^4 z_i\frac{d}{dz_i})$, $(\sum_{i=1}^4 z_i^2\frac{d}{dz_i})$ とその共役。よって $\mathrm{Cor}_4(a_1,z_1,\dots,a_4,z_4)Q(z)^{-1}$ は $X_4(\mathbb{C}P^1)/\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ 上定義される。ゆえにある $\mathbb{C}P^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ 上定義された実解析的関数 ϕ で

$$\mathrm{Cor}_4(a_1,z_1,\dots,a_4,z_4) = Q(z)\phi\left(\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}\right) \tag{6}$$

を満たすものが存在する。$\phi(z)$ は一般に $z=0,1,\infty$ で極を持つが、極における振る舞いは共形対称性のおかげで、非常に良い。たとえば $z=0$ は $z_1 \to z_2$ に対応しているが、

$$\mathrm{Cor}_4(a_1,z_1,\dots,a_4,z_4) = \sum_{r,s\in\mathbb{R}} (z_1-z_2)^{-r-1}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{-s-1}\mathrm{Cor}_4(a_1(r,s)a_2,z_2,\dots,a_4,z_4)$$

であるから、$\phi(z)$ は $z \to 0$ において

$$\phi(z) = \sum_{r,s\in\mathbb{R}, r-s\in\mathbb{Z}} a_{r,s} z^r \bar{z}^s$$

なる級数展開を持つ。このような極を [M2] では conformal singularity と呼んだ。正確には級数が離散和であって、下に有界であることを仮定する。このような形式的級数のなす空間を $\mathbb{C}((z,\bar{z},|z|^{\mathbb{R}}))$ とかく。こういった仮定は物理的には共形場理論のコンパクト性から導出できる。正確な定義とその動機については別の RIMS の講究録を参照されたい [M4]。

$F_{0,1,\infty}$ を $\mathbb{C}P^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ 上の実解析的関数で、$z=0,1,\infty$ において conformal singularity をもつもののなす集合とする。コンパクトな共形場理論の四点相関関数は、ここまでで見てきたように $\phi(z) \in F_{0,1,\infty}$ を用いて式 (6) のようにかける。

最後に四点相関関数の $z_1 \to \infty$, $z_4 \to 0$ における極限について議論しておく。

式 (6) と $\lim_{(z_1,z_4)\to(\infty,0)} \frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)} = \frac{z_3}{z_2}$ より

$$\lim_{(z_1,z_4)\to(\infty,0)} z_1^{2h_1}\bar{z}_1^{2\bar{h}_1}\mathrm{Cor}_4(a_1,z_1,\ldots,a_4,z_4) = z_3^{-h_1+h_2+h_3+h_4}\bar{z}_3^{-\bar{h}_1+\bar{h}_2+\bar{h}_3+\bar{h}_4}\phi\left(\frac{z_3}{z_2}\right) \tag{7}$$

である。他方、相関関数の consistency より

$$z_1^{2h_1}\bar{z}_1^{2\bar{h}_1}\mathrm{Cor}_4(a_1,z_1,\ldots,a_4,0) = z_1^{2h_1}\bar{z}_1^{2\bar{h}_1} < Y(a_1,z_1)Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)a_4 > \tag{8}$$

が $|z_1|>|z_2|>|z_3|>|z_4|$ において成り立つ。(7) の収束性から (8) の右辺の級数は $\{z_1^{-m}\bar{z}_1^{-n}\}_{n,m\geq 0}$ の項しか含まない。よって、

$$\lim_{z_1\to\infty} z_1^{2h_1}\bar{z}_1^{2\bar{h}_1} < Y(a_1,z_1)Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)a_4 >=< a_1(2h_1-1,2\bar{h}_1-1)Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)a_4 > .$$

ここで $< a_1(2h_1-1,2\bar{h}_1-1)\bullet >: F \to \mathbb{C}$,$v \mapsto < a_1(2h_1-1,2\bar{h}_1-1)v >$ は、制限された双対空間 $F^\vee = \bigoplus_{h,\bar{h}\in\mathbb{R}} F^*_{h,\bar{h}}$ の元を定めることに注意せよ。式 (7) の右辺は $Y_2 = \{(z_2,z_3)\in(\mathbb{C}^\times)^2 \mid z_2\neq z_3\}$ 上の実解析的関数である。そこで式 (7) の右辺の形をした関数全体から貼られる Y_2 上の実解析的関数のなす関数空間を $\mathrm{GCor}(Y_2)$ とおく。また式 (6) の右辺の形をした関数全体から貼られる $X_4(\mathbb{C}P^1)$ 上の実解析的関数のなす関数空間を $\mathrm{Cor}(X_4)$ とおく。

以上より、ブートストラップ仮説を満たす頂点作用素は次の性質を満たす：

任意の $a,b,c\in F$ と $u\in F^\vee$ に対して

- 形式的級数 $u(Y(a,z)Y(b,w)c)$, $u(Y(b,w)Y(a,z)c)$ はある実解析的関数 $\phi(z,w)\in\mathrm{GCor}(Y_2)$ の異なる領域 $|z|>|w|$, $|w|>|z|$ における級数展開に一致する。

2.7 Full 頂点代数の定義

今までの議論に基づいて、共形場理論のブートストラップ仮説に基づく数学的な定義を与える。

full 頂点代数とは $\mathbb{R}^2$ 次数付けを持つ $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $F=\bigoplus_{h,\bar{h}\in\mathbb{R}} F_{h,\bar{h}}$ と、ゼロでないベクトル $\mathbf{1}\in F_{0,0}$ および線形作用素

$$Y(-,\underline{z}) : F \to \mathrm{End}F[[z,\bar{z},|z|^{\mathbb{R}}]], \qquad a\mapsto \sum_{r,s\in\mathbb{R}} a(r,s)z^{-r-1}\bar{z}^{-s-1}$$

と $L(-1),\overline{L}(-1)\in\mathrm{End}F$ であって以下の条件を満たすものである。

FV1) 任意の $a,b\in F$ に対して、$Y(a,\underline{z})b\in F((z,\bar{z},|z|^{\mathbb{R}}))$;

FV2) $h-\bar{h}\notin\mathbb{Z}$ ならば $F_{h,\bar{h}}=0$;

FV3) 任意の $a\in F$ に対して、$Y(a,\underline{z})\mathbf{1}\in F[[z,\bar{z}]]$ かつ $\lim_{\underline{z}\to 0} Y(a,\underline{z})\mathbf{1} = a(-1-1)\mathbf{1} = a$;

FV4) $Y(\mathbf{1},\underline{z}) = \mathrm{id}_F$;

FV5) 任意の $h_i,\bar{h}_i\in\mathbb{R}$、$a_i\in F_{h_i,\bar{h}_i}$ $(i=1,2,3)$ と $u\in F^\vee$ に対して、形式的級数 $u(Y(a,z)Y(b,w)c)$, $u(Y(b,w)Y(a,z)c)$ はある実解析的関数 $\phi(z,w)\in\mathrm{GCor}(Y_2)$ の異なる領域 $|z|>|w|$, $|w|>|z|$ における級数展開に一致する。

FV6) 任意の $a\in F_{h,\bar{h}}$ に対して、$[L(0),Y(a,\underline{z})] = (z\frac{d}{dz}+h)Y(a,\underline{z})$、$[\overline{L}(0),Y(a,\underline{z})] = (\bar{z}\frac{d}{d\bar{z}}+\bar{h})Y(a,\underline{z})$。ただし $L(0)|_{F_{h,\bar{h}}} = h$, $\overline{L}(0)|_{F_{h,\bar{h}}} = \bar{h}$.

FV7) 任意の $a\in F$ に対して、$[L(-1),Y(a,z)] = Y(L(-1)a,z) = \frac{d}{dz}Y(a,z)$、$[\overline{L}(-1),Y(a,z)] = Y(\overline{L}(-1)a,z) = \frac{d}{d\bar{z}}Y(a,z)$.

これまでの章でみたように、コンパクトな共形場理論は full 頂点代数を定める。逆に full 頂点代数は共形場理論を定めるだろうか。以下の疑問が生じる。

1. full 頂点代数の相関関数はどうやって定義されるのか?

2. full 頂点代数の相関関数はブートストラップ等式を満たすか?

3. full 頂点代数の相関関数は S_n 対称性（式 (1)）を満たすか？

我々は [M1] で自然な仮定の下、full 頂点代数の n 点相関関数 $(n \leq 4)$ を定義し、$n \leq 4$ に対して上記の疑問を肯定的に証明した。とくに full 頂点代数はブートストラップ仮説を満たしている。

次の章で、full 頂点代数の四点相関関数を定義し、上記の疑問のとくに 3 の疑問について証明の概略を説明する。

2.8 full 頂点代数から相関関数へ

この章では、full 頂点代数の 4 点相関関数を定義し、それが S_4 対称性 (式 (1)) を満たすことを示す。full 頂点代数の定義 (FV5) は S_4 の元のうち、(23) に対応する対称性を相関関数が満たすことをおおよそ主張しているが、残りの S_4 の元に対しても対称になることは自明ではない。証明は四つのステップからなる。

1. full 頂点代数の上に不変双線形形式を定義する。相関関数は不変双線形形式を用いて定義できる。

2. 弱い仮定の下、full 頂点代数は準プライマリ状態から $\mathrm{sl}_2\mathbb{C} \oplus \mathrm{sl}_2\mathbb{C}$ 加群として生成される。

3. 準プライマリ状態の間の相関関数が 2.2 章の微分方程式を満たすことから、四点相関関数が収束する。

4. 双線形形式が不変であることを用いて四点相関関数の S_4 対称性が分かる。

まず step1 からはじめる。双線形形式を定義するためには、full 頂点代数の定義に入っていない、$L(1), \overline{L}(1) \in \mathrm{End}F$ を入れる必要がある。$L(1), \overline{L}(1) \in \mathrm{End}F$ が以下の条件を満たすと仮定する。

- Remark2.5 にある関係式を満たす。

- $\{L(i)\}_{i=-1,0,1}$ と $\{\overline{L}(j)\}_{j=-1,0,1}$ は互いに可換でありそれぞれ sl_2-triple の関係式を満たす。

- $L(1)\mathbf{1} = \overline{L}(1)\mathbf{1} = 0.$

また full 頂点代数 F は以下の条件を満たすとする。

B1) ある $N \in \mathbb{R}$ が存在して、任意の $h \leq N$ または $\bar{h} \leq N$ に対して $F_{h,h} = 0$。

B2) 任意の $h, \bar{h} \in \mathbb{R}$ に対して、$F_{h,\bar{h}}$ は有限次元ベクトル空間。

このとき $S_z : F \to F[z^{\pm}, \bar{z}^{\pm}, |z|^{\mathbb{R}}]$ を $h, \bar{h} \in \mathbb{R}$、$a \in F_{h,\bar{h}}$ に対して

$$S_z a = (-1)^{h-\bar{h}} z^{-2h} \bar{z}^{-2\bar{h}} \exp(zL(1) + \bar{z}\overline{L}(1))a$$

によって定める。(FV2) より $h - \bar{h} \in \mathbb{Z}$ であるから、$(-1)^{h-\bar{h}}$ は well-defined である。また条件 (B1) より $L(1), \overline{L}(1)$ は局所べき零作用素である。

F 上の双線形形式 $(-,-) : F \otimes F \to \mathbb{C}$ が不変双線形形式であるとは、任意の $a, b, c \in F$ に対して、

$$(Y(a,z)b, c) = \big(b, Y(S_z a, z^{-1})c\big)$$

を満たすことをいう。このとき、頂点代数の場合と同様に次の命題が示せる。

Proposition 2.1 *[M1, Proposition 3.2] F 上の不変双線形形式の空間と $Hom(F_{0,0}/L(1)F_{1,0}+\overline{L}(1)F_{0,1},\mathbb{C})$ には一対一対応が存在する。また不変双線形形式は対称である。*

非退化な不変双線形形式が存在する full 頂点代数を自己双対 full 頂点代数という。full 頂点代数が単純 (非自明なイデアルを持たない) ならば、ゼロでない不変双線形形式は非退化である。

次に step2 を考える。各 $h,\bar{h}\in\mathbb{R}$ に対して、

$$
\begin{aligned}
QF_{h,\bar{h}} &= \{a \in F_{h,\bar{h}} \mid L(1)a = \overline{L}(1)a = 0\} \\
QF &= \bigoplus_{h,\bar{h}\in\mathbb{R}} QF_{h,\bar{h}}
\end{aligned}
$$

とおく。F が QF から $\mathrm{sl}_2\mathbb{C}\oplus\mathrm{sl}_2\mathbb{C}$ 加群として生成されるとき、「F は QP 生成される」という。$\mathrm{sl}_2\mathbb{C}\oplus\mathrm{sl}_2\mathbb{C}$ の表現論からただちに、次の命題が示せる。

Proposition 2.2 *[M1, Proposition 3.5] F を自己双対な full 頂点代数とする。このとき F が QP 生成されることと以下の条件は同値である：*

QP1) $h\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{<0}$ または $\bar{h}\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{<0}$ ならば、$F_{h,\bar{h}}=0$。

QP2) 任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して、$L(1)F_{1,n}=0$ と $\overline{L}(1)F_{n,1}=0$ が成り立つ。

QP3) 任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して、$L(-1)F_{0,n}=0$ と $\overline{L}(-1)F_{n,0}=0$ が成り立つ。

以下、full 頂点代数は (QP1),(QP2),(QP3) を満たすと仮定する。このとき、$L(1)F_{1,0}=\overline{L}(1)F_{0,1}=0$ と $F_{0,0}=\mathbb{C}\mathbf{1}$ より、命題 2.1 から、F には不変双線形形式 $(-,-)$ で $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ を満たすものが存在する。このとき $(\mathbf{1},\bullet)=<\bullet>$ が成り立つ。

そこで $a_i\in F_{h_i,\bar{h}_i}$ $(i=1,2,3,4)$ に対して、次の形式的級数を考える：

$$(\mathbf{1},Y(a_1,z_1)Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)Y(a_4,z_4)\mathbf{1}).$$

双線形形式の定義より、$(\mathbf{1},L(i)\bullet)=0$ が $i=-1,0,1$ に対して成り立つことに注意すると、

$$
\begin{aligned}
0 &= (\mathbf{1},L(-1)Y(a_1,z_1)Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)Y(a_4,z_4)\mathbf{1}) \\
&= (\mathbf{1},[L(-1),Y(a_1,z_1)]Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)Y(a_4,z_4)\mathbf{1}) + \dots (\mathbf{1},Y(a_1,z_1)Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)[L(-1),Y(a_4,z_4)]\mathbf{1}]) \\
&= \left(\frac{d}{dz_1}+\frac{d}{dz_2}+\frac{d}{dz_3}+\frac{d}{dz_4}\right)(\mathbf{1},Y(a_1,z_1)Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)Y(a_4,z_4)\mathbf{1}).
\end{aligned}
$$

同様にして、形式的級数 $(\mathbf{1},Y(a_1,z_1)Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)Y(a_4,z_4)\mathbf{1})$ は、2.2 章の 6 つの微分方程式を満たすことが分かる。形式的級数のなす線形空間を適切に設定し、その中で微分方程式を解くことで、形式的な極限 $(z_1,z_2,z_3,z_4)\to(\infty,1,z,0)$ が well-defined であることが分かる。実際、共役も込めて $4*2=8$ 変数の形式的級数の解のなす空間と $\mathbb{C}((z,\bar{z},|z|^{\mathbb{R}}))$ の間には、同型が存在する。これを用いると形式的級数 $(\mathbf{1},Y(a_1,z_1)Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)Y(a_4,z_4)\mathbf{1})$ は、(FV5) にあった $u(Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)a_4)$ に帰着される。とくに四点相関関数の収束は $u(Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)a_4)$ の収束から従う。よって次の命題が成り立つ。

Proposition 2.3 *[M1, Proposition 3.6] $a_i\in QF_{h_i,\bar{h}_i}(i=1,2,3,4)$ のとき、以下が成り立つ：*

1. ある $C_{a_1,a_2}\in\mathbb{C}$ があって、

$$(\mathbf{1},Y(a_1,z_1)Y(a_2,z_2)\mathbf{1})=\delta_{h_1,h_2}\delta_{\bar{h}_1,\bar{h}_2}C_{a_1,a_2}(z_1-z_2)^{-2h_1}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{-2\bar{h}_1}.$$

2. ある $C_{a_1,a_2,a_3}\in\mathbb{C}$ があって、

$$(\mathbf{1},Y(a_1,z_1)Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)\mathbf{1})=C_{a_1,a_2,a_3}\Pi_{1\le i<j\le 3}(z_i-z_j)^{h_1+h_2+h_3-2h_i-2h_j}(\bar{z}_i-\bar{z}_j)^{\bar{h}_1+\bar{h}_2+\bar{h}_3-2\bar{h}_i-2\bar{h}_j}.$$

3. ある $\phi(z) \in F_{0,1,\infty}$ があって、

$$(\mathbf{1}, Y(a_1,z_1)Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)Y(a_4,z_4)\mathbf{1}) = Q(z)\phi\left(\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}\right)|_{|z_1|>|z_2|>|z_3|>|z_4|}$$

ただし $Q(z)$ は式 (5) で与えられる。

F がQP生成であることから、a_i が準プライマリ状態と限らない任意の $(\mathbf{1}, Y(a_1,z_1)Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)Y(a_4,z_4)\mathbf{1})$ は、式 (6) の形の $X_4(\mathbb{C}P^1)$ 上の実解析的関数の微分でかける。よってそれ自身、(6) の形の関数の線形和でかける。よって

$$\mathrm{Cor}_4 : F^{\otimes 4} \times X_4(\mathbb{C}P^1) \to \mathrm{Cor}(X_4)$$

が、

$$(\mathbf{1}, Y(a_1,z_1)Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)Y(a_4,z_4)\mathbf{1}) = \mathrm{Cor}_4(a_1,z_1,a_2,z_2,a_3,z_3,a_4,z_4)|_{|z_1|>|z_2|>|z_3|>|z_4|}$$

によって定義される。

最後に、任意の $\sigma \in S_4$ に対して、

$$\mathrm{Cor}_4(a_1,z_1,a_2,z_2,a_3,z_3,a_4,z_4) = \mathrm{Cor}_4(a_{\sigma 1},z_{\sigma 1},a_{\sigma 2},z_{\sigma 2},a_{\sigma 3},z_{\sigma 3},a_\sigma 4,z_\sigma 4)$$

が成り立つことをみる。$\sigma = (23)$ については、(FV5) と命題 2.3 から従う。$\sigma = (34)$ については、full 頂点代数の公理から簡単に導かれる等式

$$Y(a,z)b = \exp(zL(-1) + \bar{z}\overline{L}(-1))Y(b,-z)a$$

から従う。よって $\sigma = (1234)$ に対して示せば十分である。$a_i \in QF_{h_i,\bar{h}_i} (i = 1,2,3,4)$ が準プライマリ状態として、双線形形式の不変性を用いると

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{1}, Y(a_1,z_1)Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)Y(a_4,z_4)\mathbf{1}) \\
&= (Y(S_{z_1}a_1, z_1^{-1})\mathbf{1}, Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)Y(a_4,z_4)\mathbf{1}) \\
&= z_1^{-2h_1}\bar{z}_1^{-2\bar{h}_1}(-1)^{h_1-\bar{h}_1}(Y(a_1,z_1^{-1})\mathbf{1}, Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)Y(a_4,z_4)\mathbf{1})
\end{aligned}$$

である。繰り返し用いることで

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{1}, Y(a_1,z_1)Y(a_2,z_2)Y(a_3,z_3)Y(a_4,z_4)\mathbf{1}) \\
&= \left(\Pi_{i=1}^4 z_i^{-2h_i}\bar{z}_i^{-2\bar{h}_i}(-1)^{h_i-\bar{h}_i}\right)(Y(a_4,z_4^{-1})Y(a_3,z_3^{-1})Y(a_2,z_2^{-1})Y(a_1,z_1^{-1})\mathbf{1},\mathbf{1}) \\
&= (\mathbf{1}, \left(\Pi_{i=1}^4 z_i^{-2h_i}\bar{z}_i^{-2\bar{h}_i}(-1)^{h_i-\bar{h}_i}\right)(Y(a_4,z_4^{-1})Y(a_3,z_3^{-1})Y(a_2,z_2^{-1})Y(a_1,z_1^{-1})\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

ここで右辺は

$$\left(\Pi_{i=1}^4 z_i^{-2h_i}\bar{z}_i^{-2\bar{h}_i}(-1)^{h_i-\bar{h}_i}\right)\mathrm{Cor}_4(a_4,z_4^{-1},a_3,z_3^{-1},a_2,z_2^{-1},a_1,z_1^{-1})|_{|z_1|>|z_2|>|z_3|>|z_4|}$$

に等しい。$\frac{(z_4^{-1}-z_3^{-1})(z_2^{-1}-z_1^{-1})}{(z_4^{-1}-z_2^{-1})(z_3^{-1}-z_1^{-1})} = \frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}$ であることと、$Q(z)$ 項の変化が $\left(\Pi_{i=1}^4 z_i^{-2h_i}\bar{z}_i^{-2\bar{h}_i}(-1)^{h_i-\bar{h}_i}\right)$ に相殺されることから、実解析的関数として

$$\mathrm{Cor}_4(a_1,z_1,a_2,z_2,a_3,z_3,a_4,z_4) = \mathrm{Cor}_4(a_4,z_4,a_3,z_3,a_2,z_2,a_1,z_1)$$

が分かる。

Theorem 2.1 *[M1, Theorem 3.1] F が QP 生成かつ自己双対な full 頂点代数ならば、任意の $a_1,a_2,a_3,a_4 \in F$ と、$\sigma \in S_4$ に対して、*

$$\mathrm{Cor}_4(a_1,z_1,a_2,z_2,a_3,z_3,a_4,z_4) = \mathrm{Cor}_4(a_{\sigma 1},z_{\sigma 1},a_{\sigma 2},z_{\sigma 2},a_{\sigma 3},z_{\sigma 3},a_\sigma 4,z_\sigma 4)$$

が成り立つ。

よって四点相関関数は S_4 対称性を持つ。**1** を挿入することで、$n \leq 4$ ならば、n 点相関関数の S_n 対称性も従う。

ブートストラップ等式 (2) が

$$< Y(Y(a_1, z_{12})a_2, z_{24})Y(a_3, z_{34})a_4 >$$
$$< Y(Y(a_1, z_{13})a_3, z_{34})Y(a_2, z_{24})a_4 >$$

収束するか、また解析接続すると $Cor_4(a_1, z_1, a_2, z_2, a_3, z_3, a_4, z_4)$ と一致するかは依然明らかではない。これはよりテクニカルな証明が必要なので、本稿では割愛する。興味のある読者は [M1] を参照されたい。

Theorem 2.2 *[M1, Theorem 3.2] F が QP 生成かつ自己双対な full 頂点代数ならば、$n \leq 4$ に対して、n 点相関関数の consistency が成り立つ。とくに任意の $a_1, a_2, a_3, a_4 \in F$ に対して、*

$$< Y(Y(a_1, z_{12})a_2, z_{24})Y(a_3, z_{34})a_4 >, \ < Y(Y(a_1, z_{13})a_3, z_{34})Y(a_2, z_{24})a_4 >$$

は $X_4(\mathbb{C}P^1)$ 上の同じ実解析的関数 $\mathrm{Cor}_4(a_1, z_1, a_2, z_2, a_3, z_3, a_4, z_4)$ に収束する。

2.9 カイラル対称性

この章ではブートストラップ等式を満たす頂点作用素を見つける一般的な方法について解説する。共形場理論では「ブートストラップ等式に加えて理論が大きな対称性を持つことを仮定し、対称性によって頂点作用素の形を絞り込む」という手法がよく用いられる。ここで対称性とは必ずしも群やリー代数から来るものとは限らず、もっと一般的な対称性 (カイラル対称性と呼ばれる) を考えることができる。

F を full 頂点代数とする。このとき $a \in \ker \overline{L}(-1)$ とすると、(FV7) より

$$0 = Y(\overline{L}(-1)a, z) = \frac{d}{d\bar{z}}Y(a, z) = \sum_{r,s \in \mathbb{R}, r-s \in \mathbb{Z}} a(r, s)(-s-1)z^r \bar{z}^{-s-2}.$$

よって、$Y(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n, -1)z^{-n-1}$ が分かる。すなわち場 $Y(a, z)$ は正則である。

$\mathbb{C}P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の実解析的関数で $0, 1, \infty$ で conformal singularity を持つ関数 $\phi(z)$ が正則関数とする。同様の議論により、conformal singularity という条件は、正則関数 $\phi(z)$ に対しては $0, 1, \infty$ での特異性が高々極であることと同値になる。$\mathbb{C}P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の正則関数で $0, 1, \infty$ で高々極を持つ関数の空間は多項式環 $\mathbb{C}[z^{\pm}, (1-z)^{\pm}]$ である。

このことから、任意の $a, b \in \ker \overline{L}(-1)$ と $u \in F^{\vee}$ と $c \in F$ に対して、形式的級数 $u(Y(a, z)Y(b, w)c)$, $u(Y(b, w)Y(a, z)c)$ はある多項式 $\phi(z, w) \in \mathbb{C}[z^{\pm}, w^{\pm}, (z-w)^{\pm}]$ の異なる領域 $|z| > |w|$, $|w| > |z|$ における級数展開に一致することが分かる。

Proposition 2.4 *$\ker \overline{L}(-1) \subset F$ は部分代数であり、$Y(-, z)$ によって頂点代数の構造を持つ。さらに F は $\ker \overline{L}(-1)$ の頂点代数としての加群であり、$Y(-, z)$ は頂点代数の加群の間の intertwining operator である。*

$\ker L(-1)$ も同様にして、(変数 $\bar{z}$ をもつ) 頂点代数の構造を持つ。また F は full 頂点代数 $\ker \overline{L}(-1) \otimes \ker L(-1)$ の拡大になる。

よって、full 頂点代数を構成は二つのステップに分かれる [MS, FRS]。

- $\ker \overline{L}(-1)$ と $\ker L(-1)$ の加群とその間の intertwining operator を分類する。
- それらの可能な貼り合わせ方を分類する。

単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の対称性を持つような共形場理論の場合、$\ker \overline{L}(-1)$ はアファイン頂点代数 $V_k(\mathfrak{g})$ と呼ばれる頂点代数を含む。そのため、頂点代数のことを共形場理論の対称性と思って、カイラル対称性と呼ぶ。共形場理論の対称性にはこのようなリー代数に直接関連するもののほかにも、W 代数と呼ばれるより複雑な「共形場理論の対称性」も考えられる。

良いクラス (regular) の頂点 (作用素) 代数の加群とその間の intertwining operator の一般論は Huang らの一連の仕事で構築された (たとえば [HL])。また、$\ker L(-1) = \ker \overline{L}(-1)$ が同じ regular 頂点作用素代数の場合、対角的に既約加群を張り合わると、full 頂点代数の構造が入ることが [HK] によって示された。(Huang-Kong の論文では full field algebra という本稿と少し異なる共形場理論の定式化がされているが、regular 頂点作用素代数をカイラル対称性に持つ場合は両者の概念は同値である。)

対角でない共形場理論の数学的な構成例に関しては [M3] を参照されたい。

2.10 高次元の共形場理論とブートストラップ仮説

近年の物理学においてブートストラップ等式を用いた共形場理論の研究は高次元の共形場理論も含めて、目覚ましい発展を遂げている。筆者がブートストラップ等式に基づき共形場理論を定式化した理由もそこにある。

物理では、(おそらく読者になじみのある) 式 (3) ではなく式 (2) が用いられる。その理由は、ユニタリ共形場理論を考えるとき式 (2) からは構造定数に関する無限個の良い不等式が導かれることである。この不等式を数値計算にかけることで理論に現れる共形ウェイトの値に制約条件を課すことができる。このことからある種の共形場理論の非存在が証明される。

この数値的ブートストラップ法は、場の量子論が二次元に比べてより難しい高次元でも有効である。[RRTV] では四次元の共形場理論に対して数値的ブートストラップを適用し、不等式の数を増やしていくと、共形ウェイトの取りうる値はパラメータ空間の中で孤立した小さな島のようになることを示した。このことは島の中に一つの共形場理論が存在することを示唆する。この発見の素晴らしい点は、島の半径ほどの誤差を許して計算された四次元共形場理論の共形ウェイトは、他のどんなやり方で計算された値よりも精度が高いところにある。数値的ブートストラップ法は三次元の共形場理論に対しても有効である [EPPRSV]。

このようにブートストラップは理論の存在や非存在に関する強力な手法を提供してくれる。数学的視点からのブートストラップを扱った研究はあまりないため、本稿がブートストラップ法入門への一助になれば幸いである。

参考文献

[EPPRSV] S. El-Showk, M.F. Paulos, D. Poland, S. Rychkov, D. Simmons-Duffin and A. Vichi, Solving the 3d Ising model with the conformal bootstrap II. c-minimization and precise critical exponents, J. Stat. Phys., **157**, 2014, (4)-(5), 869–914.

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, Vertex operator algebras and the Monster, Pure and Applied Mathematics, **134**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[FRS] J. Fuchs, I. Runkel and C. Schweigert, Conformal correlation functions, Frobenius algebras and triangulations, Nucl. Phys. **624** 2002, 452–468.

[HK] Y.-Z. Huang, L. Kong, Full field algebras, Comm. Math. Phys., **272**, 2007, (2), 345–396.

[HL] Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, A theory of tensor products for module categories for a vertex operator algebra, I, Selecta Mathematica (New Series), **1**, 1995, 699–756.

[HL2] Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, Vertex operator algebras and operads, 145–161, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993

[IZ] C. Itzykson and J.B. Zuber, Quantum field theory, International Series in Pure and Applied Physics, McGraw-Hill International Book Co., New York, 1980.

[M1] Y. Moriwaki, Full vertex algebra and bootstrap – consistency of four point functions in 2d CFT, arXiv:2006.15859 [q-alg].

[M2] Y. Moriwaki, Two-dimensional conformal field theory, current-current deformation and mass formula, arXiv:2007.07327 [q-alg].

[M3] Y. Moriwaki, Code conformal field theory and framed full vertex operator algebra (in preparation).

[M4] Y. Moriwaki, 二次元共形場理論とカレントカレント変形, RIMS 講究録, 組合せ論的表現論の最近の進展, 2020 (to appear).

[MS] G. Moore and N. Seiberg, Classical and quantum conformal field theory, Comm. Math. Phys. **123**, 1989, 177–254.

[P] A. M. Polyakov, Non-Hamiltonian approach to conformal quantum field theory, Ž. Èksper. Teoret. Fiz., **66**, 1974, 23–42.

[RRTV] R. Rattazzi, V.S. Rychkov, E. Tonni and A. Vichi, Bounding scalar operator dimensions in 4D CFT, J. High Energy Phys., 2008, **12**.

[Y] M. Yoshida, Hypergeometric functions, my love, Aspects of Mathematics, E32, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.