ヒルベルト空間における非線形写像族の共通不動点へ収束定理
(CONVERGENCE THEOREMS FOR A COMMON FIXZED POINT OF A FAMILY OF NONLINEAR MAPPINGS IN A HILBERT SPACE)

茨木貴徳 (TAKANORI IBARAKI)
横浜国立大学 教育学部
(COLLEGE OF EDUCATION, YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY)

1. はじめに

本論文では, ヒルベルト空間における非線形写像族の共通不動点への近似法を考察する. 1963 年に DeMarr [3] は可換な非拡大写像族に関する共通不動点定理を示した. 以降, 多くの研究者により共通不動点定理の研究がなされてきたが存在定理のみならず, 不動点への軌道を求める収束定理に関する研究も数多く扱われてきた. 例えば, Atsushiba [2], Ishikawa [6], Kitahara and Takahashi [7], Kuhfittig [11], Linhart [12], Shimizu and Takahashi [13], Suzuki [14, 15], Takahashi and Tamura [18] などである.

本論文ではこれらの先行研究を参考に, まずはじめに収束定理に必要な写像族の条件を考察する. 次に, 考察した写像族の条件のもとでヒルベルト空間における非線形写像族に関する共通不動点への収束定理を議論する.

2. 準備

本論文では, H は実ヒルベルト空間 (real Hilbert space) とし内積 (inner product) を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表し, この内積から導かれるノルム (norm) を $\|\cdot\|$ で表す. また, C は H の空でない部分集合とする. 以降, 特に断りがない限り, 本論文では常に H は実ヒルベルト空間とし, C は H の "空でない" 部分集合とすることとする. また, $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}_0$ は順に正の整数全体の集合と非負の整数全体の集合を表すこととする.

C を H の閉凸部分集合とする. このとき, H の任意の元 x に対し $\|x-x_0\| = \min_{y\in C}\|x-y\|$ となる C の元 x_0 が一意に存在する. そこで H の元 x に対し, このような C の元 x_0 を対応させる写像を H から C の上への距離射影 (metric projection) と呼び, P_C で表す.

C を H の部分集合とし, T を C から H への写像とし, I を C 上の恒等写像 (identity mapping) とする. $F(T)$ は T の不動点 (fixed point) 全体の集合とする, すなわち $F(T) = \{x \in C : x = Tx\}$. $A(T)$ は T の吸引点 (attractive point) 全体の集合とする, すなわち $A(T) = \{x \in H : \|Ty - x\| \le \|x - y\| \ (\forall y \in C)\}$ ([19] を参照). $I - T$ が 0 でデミ閉 (demiclosed at 0) であるとは, C の点列 $\{x_n\}$ が C の元 p に弱収束し, $\{\|Tx_n - x_n\|\}$ が 0 へ収束すれば, p が常に $F(T)$ の要素になるときをいう. 次に 4 つの非拡大型写像の定義を示す.

- T が疑非拡大 (quasi-nonexpansive) であるとは, $F(T) \neq \emptyset$ かつ C の任意の元 x と $F(T)$ の任意の元 p に対して $\|Tx - p\| \le \|x - p\|$ が成立するときをいう;
- T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, C の任意の元 x, y に対して $\|Tx-Ty\| \le \|x-y\|$ が成立するときをいう;
- T が条件 (N_2) を満たすとは, ある $s \in [0,\infty)$ が存在し, C の任意の元 x, y に対して $\|x - Ty\| \le \|x - y\| + s\|x - Tx\|$ が成立するときをいう ([4] を参照);

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47H10, 41A65.
Key words and phrases. 吸引点, 不動点, 非拡大, 疑非拡大, 条件 (N_2), λ-ハイブリッド.

- $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. T が λ-ハイブリッド (λ-hybrid) であるとは C の任意の元 x, y に対して $\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + 2(1 - \lambda)\langle x - Tx, y - Ty\rangle$ が成立するときをいう ([1] を参照) .

これらの非拡大型写像には次の性質が成立する ([1, 4, 8–10, 16, 19] 等を参照).

- T が疑非拡大写像であることの必要十分条件は $\emptyset \neq F(T) \subset A(T)$ である;
- $F(T) \neq \emptyset$ を満たす非拡大写像 T は疑非拡大である;
- 非拡大写像は $s = 1$ として条件 (N_2) を満たし, さらに 1-ハイブリッド写像でもある;
- T が λ-ハイブリッドまたは条件 (N_2) のいずれかを満たしていれば $F(T) \subset A(T)$ である. さらに $F(T) \neq \emptyset$ を仮定すれば, 疑非拡大になる;
- T が非拡大, λ-ハイブリッド, または条件 (N_2) のいずれかを満たしていれば $I - T$ は 0 でデミ閉である.

3. 写像の非拡大性に関する考察

本節では非線形写像族に関する共通不動点へ収束定理を議論する際に必要な写像族の条件を考察する. 不動点近似法では写像にある種の非拡大性を仮定することが多く, 第 2 節で示した 4 つの写像は代表的な非拡大型写像である. この 4 つの非拡大型写像の写像族の一般化として以下の条件を考察する: C を H の閉凸集合とし, $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ を C からそれ自身への非線形写像族とし, 以下の 2 つの条件を満たすこととする. (簡単のため $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ は以降, $\{T_j\}$ と表記する.)

(1) 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し, $I - T_j$ は 0 でデミ閉;
(2) $\emptyset \neq A := \cap_{j\in\mathbb{N}} A(T_j)$, $F := \cap_{j\in\mathbb{N}} F(T_j) \subset A$.

不動点近似法において, (ハイブリッド法を除いて) 条件 (1) を外すことは困難であろう. 実際, 疑非拡大写像を除く先の 3 つの非拡大型写像から条件 (1) は自然と導かれる. また, 疑非拡大写像における不動点近似法を扱う場合は通常, 条件 (1) を仮定する. ゆえに, 条件 (1) を仮定することは妥当であろう. 次に条件 (2) を考察する. $\{T_j\}$ の共通不動点を求める場合は通常 $F \neq \emptyset$ を仮定する. $\{T_j\}$ が先に上げた 4 つの非拡大型写像のいずれかを満たす写像族かつ $F \neq \emptyset$ を満たすとき, 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して $\emptyset \neq F(T_j) \subset A(T_j) \cdots$ $(*)$ が成立する. このとき $\emptyset \neq F \subset A \cdots$ $(**)$ を満たすことも容易にわかる. 条件 (2) と条件 $(*)$, $(**)$ を考察する.

- $F \subset A$ を仮定しても, 全ての $j \in \mathbb{N}$ 対して $F(T_j) \subset A(T_j)$ であるとは限らない;
- $F \subset A$ の仮定なしに, $F \neq \emptyset$ から $A \neq \emptyset$ は導けない;
- $A \neq \emptyset$ ならば $F \neq \emptyset$ である ([19, Lemma 2.2] を参照);
- $A \neq \emptyset$ を仮定しても $F \subset A$ とは限らない;
- $F \subset A$ の仮定なしに, F が閉凸であることを導けない.

これらの考察から条件 $(*)$ ならば条件 $(**)$ を満たし, 条件 $(**)$ ならば条件 (2) を満たすことがわかり条件 (2) は第 2 節で示した 4 つの非拡大型写像の写像族より一般化されていることがわかる. 次に, この条件を満たし一般化されている例を示す. ただし, 簡単のため 2 つの写像で考えることとする.

例 3.1. $H = \mathbb{R}^2$, $C = \left\{x = (s,t) \in \mathbb{R}^2 : s \in [0,1], t \in \left[\frac{1}{2}s, 2s\right]\right\}$ とする. C の任意の元 $x = (s,t)$ に対して 2 点 $u_x := (\frac{1}{2}t, t)$, $z_x := (s, \frac{1}{2}s)$ を定義する. この 2 点 u_x, z_x を用いて C からそれ自身への写像 T_1 と T_2 を以下で定義する; C の任意の元 $x = (s,t)$ に対して

$$T_1 x = \frac{1}{2}(x + u_x) \quad = \frac{1}{2}\left((s,t) + \left(\frac{1}{2}t, t\right)\right) \quad = \left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{4}t, t\right),$$
$$T_2 x = \frac{1}{2}(x + z_x) \quad = \frac{1}{2}\left((s,t) + \left(s, \frac{1}{2}s\right)\right) \quad = \left(s, \frac{1}{4}s + \frac{1}{2}t\right)$$

このとき以下が成立することは容易に確認できる.

- C はコンパクト凸集合となる;

- 条件 (1) は成立する, すなわち $I - T_j$ は 0 でデミ閉 $(j = 1, 2)$;
- 条件 (2) は成立する, すなわち

$$\{(0,0)\} = \bigcap_{j=1}^{2} F(T_j) \subset \bigcap_{j=1}^{2} A(T_j) = \{(s,t) : s \leq 0, t \leq 0\};$$

- T_1 と T_2 は共に疑非拡大とはならない.

4. 収束定理

本節では, 前節で考察した "写像の条件" を用いた収束定理を議論する. まず, はじめに収束定理に必要な 2 つの数列を定義する: 数列 $\{c_j\}$ が条件 (s) を満たすとは,

$$\text{任意の } j \in \mathbb{N} \text{ に対して } c_j \in (0,1) \text{ かつ, } \sum_{j=1}^{\infty} c_j = 1$$

を満たすときをいう. また, 二重数列 $\{c_{n,j}\}$ が条件 (ds) を満たすとは, 条件 (s) を満たす数列 $\{c_j\}$ を用いて, $c_{1,1} = 1$ とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ に対して

$$c_{n,j} = c_j \ (j = 1, \ldots, n-1) \text{ かつ } c_{n,n} = \sum_{j=n}^{\infty} c_j = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} c_j$$

と定義されることとする. 条件 (ds) を満たす二重数列 $\{c_{n,j}\}$ は以下のような性質を持つ;

$$\text{任意の } j \in \mathbb{N} \text{ に対し } \lim_{n \to \infty} c_{n,j} = c_j, \text{ かつ任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対し } \sum_{j=1}^{n} c_{n,j} = 1.$$

次に条件 (s) を満たす数列 $\{c_j\}$ と条件 (ds) を満たす二重数列 $\{c_{n,j}\}$ の具体例を示す.

例 4.1. 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し $c_j = \dfrac{1}{2^j}$ とおくと数列 $\{c_j\}$ は条件 (s) を満たす. この数列 $\{c_j\}$ を用いた, 条件 (ds) を満たす二重数列は次のようになる;

$$\{c_{1,j}\}_{j \in N(1,1)} = \{1\}, \ \{c_{2,j}\}_{j \in N(1,2)} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \ \{c_{3,j}\}_{j \in N(1,3)} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\},$$

$$\{c_{4,j}\}_{j \in N(1,4)} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right\}, \ \{c_{5,j}\}_{j \in N(1,5)} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right\}, \ \ldots$$

ただし, $i, j \in \mathbb{N}$ $(i \leq j)$ に対して $N(i,j) := \{k \in \mathbb{N} : i \leq k \leq j\}$ である.

4.1. 弱収束定理.

前節で考察した写像の条件を用いた非線形写像族に関する共通不動点への弱収束定理を得る.

定理 4.2 ([5]). a, b を $a \leq b$ を満たす開区間 $(0,1)$ 上の実数とし, $\{a_n\}$ を閉区間 $[a,b]$ 上の数列とする. $\{c_j\}$ を条件 (s) を満たす数列とし, $\{c_{n,j}\}$ を条件 (ds) を満たす二重数列とする. C を H の閉凸部分集合とし, $\{T_j\}$ を C からそれ自身への写像族で, 各 $j \in \mathbb{N}$ に対して $I - T_j$ が 0 でデミ閉であるとする. $F := \cap_{j \in \mathbb{N}} F(T_j)$ とし, $S_n := \sum_{j=1}^{n} c_{n,j} T_j$ とする. 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: x_1 を C の任意の元とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$x_{n+1} = a_n x_n + (1 - a_n) S_n x_n$$

とする. このとき $\emptyset \neq A := \cap_{j \in \mathbb{N}} A(T_j)$ と仮定すると, 以下が成立する.

(1) $\{x_n\}$ すべての弱収積点 (*weak cluster point*) は F の要素となる;
(2) さらに, $F \subset A$ を仮定すると $\{x_n\}$ は F のある点 z に弱収束する.

定理 4.2 を用いて, 以下の 4 つの非拡大型非線形写像族の共通不動点への弱収束定理を得る.

系 4.3 ([5]). a, b を $a \leq b$ を満たす開区間 $(0,1)$ 上の実数とし, $\{a_n\}$ を閉区間 $[a,b]$ 上の数列とする. $\{c_j\}$ を条件 (s) を満たす数列とし, $\{c_{n,j}\}$ を条件 (ds) を満たす二重数列とする. C を H の閉凸部分集合とし, $\{T_j\}$ を C からそれ自身への条件 (N_2) を満たす写像族とする. $S_n := \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}T_j$ とする. 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: x_1 を C の任意の元とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$x_{n+1} = a_n x_n + (1 - a_n)S_n x_n$$

とする. このとき $\emptyset \neq F := \cap_{j\in\mathbb{N}} F(T_j)$ とすると, $\{x_n\}$ は F のある点 z に弱収束する.

系 4.4 ([5]). a, b を $a \leq b$ を満たす開区間 $(0,1)$ 上の実数とし, $\{a_n\}$ を閉区間 $[a,b]$ 上の数列とする. $\{c_j\}$ を条件 (s) を満たす数列とし, $\{c_{n,j}\}$ を条件 (ds) を満たす二重数列とする. C を H の閉凸部分集合とし, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. $\{T_j\}$ を C からそれ自身への λ-ハイブリッド写像族とする. $S_n := \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}T_j$ とする. 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: x_1 を C の任意の元とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$x_{n+1} = a_n x_n + (1 - a_n)S_n x_n$$

とする. このとき $\emptyset \neq F := \cap_{j\in\mathbb{N}} F(T_j)$ とすると, $\{x_n\}$ は F のある点 z に弱収束する.

系 4.5 ([5]). a, b を $a \leq b$ を満たす開区間 $(0,1)$ 上の実数とし, $\{a_n\}$ を閉区間 $[a,b]$ 上の数列とする. $\{c_j\}$ を条件 (s) を満たす数列とし, $\{c_{n,j}\}$ を条件 (ds) を満たす二重数列とする. C を H の閉凸部分集合とし, $\{T_j\}$ を C からそれ自身への非拡大写像族とする. $S_n := \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}T_j$ とする. 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: x_1 を C の任意の元とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$x_{n+1} = a_n x_n + (1 - a_n)S_n x_n$$

とする. このとき $\emptyset \neq F := \cap_{j\in\mathbb{N}} F(T_j)$ とすると, $\{x_n\}$ は F のある点 z に弱収束する.

系 4.6 ([5]). a, b を $a \leq b$ を満たす開区間 $(0,1)$ 上の実数とし, $\{a_n\}$ を閉区間 $[a,b]$ 上の数列とする. $\{c_j\}$ を条件 (s) を満たす数列とし, $\{c_{n,j}\}$ を条件 (ds) を満たす二重数列とする. C を H の閉凸部分集合とし, $\{T_j\}$ を C からそれ自身への疑非拡大写像族で, 各 $j \in \mathbb{N}$ に対して $I - T_j$ が 0 でデミ閉であるとする. $S_n := \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}T_j$ とする. 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: x_1 を C の任意の元とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$x_{n+1} = a_n x_n + (1 - a_n)S_n x_n$$

とする. このとき $\emptyset \neq F := \cap_{j\in\mathbb{N}} F(T_j)$ とすると, $\{x_n\}$ は F のある点 z に弱収束する.

4.2. **強収束定理.** 次に, 以下の非線形写像族に関する共通不動点への強収束定理を得る.

定理 4.7 ([5]). b を開区間 $(0,1)$ 上の実数とし, $\{a_n\}$ を開区間 $(0,1)$ 上の数列で

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

を満たすとする. $\{c_j\}$ を条件 (s) を満たす数列とし, $\{c_{n,j}\}$ を条件 (ds) を満たす二重数列とする. C を H の閉凸部分集合とし, $\{T_j\}$ を C からそれ自身への写像族で, 各 $j \in \mathbb{N}$ に対して $I - T_j$ が 0 でデミ閉であるとする. $A := \cap_{j\in N} A(T_j)$, $F := \cap_{j\in\mathbb{N}} F(T_j)$ とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $S_n := \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}T_j$, $U_n := bI + (1-b)S_n$ とおく. 点列 $\{u_n\}$ を次のように構成する: q, u_1 を C の任意の元とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$u_{n+1} = a_n q + (1 - a_n)U_n u_n$$

とする. $\emptyset \neq A$ 及び $F \subset A$ を満たすとき, 点列 $\{u_n\}$ は F の元 $v = P_A q = P_F q$ へ強収束する.

定理 4.7 より, 以下の 4 つの非拡大型非線形写像族の共通不動点への強収束定理を得る.

系 4.8 ([5]). b を開区間 $(0,1)$ 上の実数とし, $\{a_n\}$ を開区間 $(0,1)$ 上の数列で

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

を満たすとする. $\{c_j\}$ を条件 (s) を満たす数列とし, $\{c_{n,j}\}$ を条件 (ds) を満たす二重数列とする. C を H の閉凸部分集合とし, $\{T_j\}$ を C からそれ自身への条件 (N_2) を満たす写像族とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $S_n := \sum_{j=1}^{n} c_{n,j} T_j$, $U_n := bI + (1-b)S_n$ とおく. 点列 $\{u_n\}$ を次のように構成する: q, u_1 を C の任意の元とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$u_{n+1} = a_n q + (1-a_n) U_n u_n$$

とする. このとき $\emptyset \neq F := \cap_{j\in N} F(T_j)$ とすると, 点列 $\{u_n\}$ は F の元 $v = P_F q$ へ強収束する.

系 4.9 ([5]). b を開区間 $(0,1)$ 上の実数とし, $\{a_n\}$ を開区間 $(0,1)$ 上の数列で

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

を満たすとする. $\{c_j\}$ を条件 (s) を満たす数列とし, $\{c_{n,j}\}$ を条件 (ds) を満たす二重数列とする. C を H の閉凸部分集合とし, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. $\{T_j\}$ を C からそれ自身への λ-ハイブリッド写像族とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $S_n := \sum_{j=1}^{n} c_{n,j} T_j$, $U_n := bI + (1-b)S_n$ とおく. 点列 $\{u_n\}$ を次のように構成する: q, u_1 を C の任意の元とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$u_{n+1} = a_n q + (1-a_n) U_n u_n$$

とする. このとき $\emptyset \neq F := \cap_{j\in N} F(T_j)$ とすると, 点列 $\{u_n\}$ は F の元 $v = P_F q$ へ強収束する.

系 4.10 ([5]). b を開区間 $(0,1)$ 上の実数とし, $\{a_n\}$ を開区間 $(0,1)$ 上の数列で

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

を満たすとする. $\{c_j\}$ を条件 (s) を満たす数列とし, $\{c_{n,j}\}$ を条件 (ds) を満たす二重数列とする. C を H の閉凸部分集合とし, $\{T_j\}$ を C からそれ自身への非拡大写像族とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $S_n := \sum_{j=1}^{n} c_{n,j} T_j$, $U_n := bI + (1-b)S_n$ とおく. 点列 $\{u_n\}$ を次のように構成する: q, u_1 を C の任意の元とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$u_{n+1} = a_n q + (1-a_n) U_n u_n$$

とする. このとき $\emptyset \neq F := \cap_{j\in N} F(T_j)$ とすると, 点列 $\{u_n\}$ は F の元 $v = P_F q$ へ強収束する.

系 4.11 ([5]). b を開区間 $(0,1)$ 上の実数とし, $\{a_n\}$ を開区間 $(0,1)$ 上の数列で

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

を満たすとする. $\{c_j\}$ を条件 (s) を満たす数列とし, $\{c_{n,j}\}$ を条件 (ds) を満たす二重数列とする. C を H の閉凸部分集合とし, $\{T_j\}$ を C からそれ自身への疑非拡大写像族で, 各 $j \in \mathbb{N}$ に対して $I - T_j$ が 0 でデミ閉であるとする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $S_n := \sum_{j=1}^{n} c_{n,j} T_j$, $U_n := bI + (1-b)S_n$ とおく. 点列 $\{u_n\}$ を次のように構成する: q, u_1 を C の任意の元とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$u_{n+1} = a_n q + (1-a_n) U_n u_n$$

とする．このとき $\emptyset \neq F := \cap_{j\in N} F(T_j)$ とすると，点列 $\{u_n\}$ は F の元 $v = P_F q$ へ強収束する．

謝辞. 本研究は JSPS 科研費 19K03632 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Fixed point and ergodic theorems for λ-hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **11** (2010), 335–343.

[2] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach spaces*, Austral. Math. Soc., **57** (1998), 117–127.

[3] R. DeMarr, *Common fixed points for commuting contraction mappings*, Pacific J. Math., **13** (1963), 1139–1141.

[4] J. G. Falset, E. L. Fuster, and T. Suzuki, *Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **375** (2011), 185–195.

[5] T. Ibaraki and Y. Takeuchi, *New convergence theorems for common fixed points of a wide range of nonlinear mappings*, J. Nonlinear Anal. Optim., **9** (2018), 95–114.

[6] S. Ishikawa, *Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., **80** (1979), 493–501.

[7] S. Kitahara and W. Takahashi, *Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **2** (1993), 333–342.

[8] P. Kocourek, W. Takahashi and J.-C. Yao, *Fixed point theorems and weak convergence theorems for genelalized hybrid mappings in Hilbert spaces*, Taiwanese J. Math., **14** (2010), 2497–2511.

[9] R. Kubota, W. Takahashi, and Y. Takaeuchi, *Extensions of Browder's demiclosed principle and Reich's lemma and their applications*, Pure and Applied Functional Anal., **1** (2016), 63–84.

[10] R. Kubota and Y. Takaeuchi, *On Ishikawa's strong convergence theorem*, Banach and Function Spaces (Kitakyushu 2012), Yokohama Publishers, Yokohama, 2014, 377–389.

[11] P. K. F. Kuhfittig, *Common fixed points of nonexpansive mappings by iteration*, Pacific J. Math., **97** (1981), 137–139.

[12] J. Linhart, *Beiträge zur Fixpunkttheorie nichtexpandierender Operatoren*, Monatsh. Math., **76** (1972), 239–249 (German).

[13] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **211** (1997), 71–83.

[14] T. Suzuki, *Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces*, Fixed Point Theory and Applications, *2005* (2005), 103–123.

[15] T. Suzuki, *Convergence theorems to common fixed points for infinite families of nonexpansive mappings in strictly convex Banach spaces*, Nihonkai Math. J., **14** (2003), 43–54.

[16] T. Suzuki, *Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **340** (2008), 1088-1095.

[17] 竹内幸雄，「狭義凸 Banach 空間における写像の吸引点集合」京都大学数理解析研究所講究録 **2114** (2019), 144–151.

[18] W. Takahashi and T. Tamura, *Limit theorems of operators by convex combinations of nonexansive retractions in Banach spaces*, J. Approx. Theory, **91** (1997), 386–397.

[19] W. Takahashi and Y. Takeuchi, *Nonlinear ergodic theorem without convexity for generalized hybrid mappings in a Hilbert space*,J. Nonlinear Convex Anal., **12** (2011), 399–406.