A NEW TYPE OF FIXED POINT THEOREM AND SOME NONLINEAR EQUATIONS

新しい type の不動点定理と非線形方程式

高橋非線形解析研究所　竹内 幸雄 (Yukio Takeuchi)
Takahashi Institute for Nonlinear Analysisl

1. 主題

The Leray-Schauder theorem [5] は, 最初に Banach 空間で提示され Nagumo [8] によって局所凸空間に拡張されました. この証明には degree theory が使用されています; Lloyd [6] 等を参照. この定理は最も有用な定理の 1 つであり, 多くの応用を持ちます. 後に, Morales [7], Hirano [3], Kartsatos [4] 他は, m–増大作用素と関連する抽象的な非線形式の成立条件を, Leray-Schauder 型定理または関連する結果を用いて, Banach 空間で考察しました; 放物型偏微分方程式に応用を持ちます. しかし, この定理の取り扱いはやや複雑です. また, 学部生が degree theory を十分に理解することは容易ではないと思われます.

本稿では, Hirano [3] や Kartsatos [4] が考察した問題に, 従来とは異なるアプローチを採ります; 新しい type の不動点定理 3.4 を提示し, その応用として類似の結果を得ます. おそらく, 本稿の議論は学部生にとってより理解しやすく, 本稿で提示する境界条件は不動点理論の視点からはより自然です.

2. 準備

本稿に必要な事項と記号を簡単に説明します. C は常に非空集合を表します; 従って “非空” を省略します. E は実 Banach 空間を表します; “実” を省略します. $\|\cdot\|$ は E のノルム, E^* は E の共役空間です. $x \in E$ と $y^* \in E^*$ について, $\langle x, y^*\rangle$ は $y^*(x)$ の別表現です. J を E から 2^{E^*} への正規双対写像とします:

$$Jx = \{x^* \in E : \langle x, x^*\rangle = \|x\|\|x^*\|,\ \|x^*\| = \|x\|\} \quad \text{for} \quad x \in E.$$

C を E の部分集合とします. $\overline{C}$, ∂C, $\mathrm{Int}(C)$ は, それぞれ C の閉包, 境界, 内点集合を表します. また, $\mathrm{co}(C)$ と $\mathrm{cc}(C)$ は C の凸包と閉凸包です. Mazur の良く知られた定理から, C が compact ならば $\mathrm{cc}(C)$ も compact です. $B_r[x]$ は中心 $x \in E$, 半径 $r > 0$ の E の閉球です. $B_r[x]$ は有界な閉凸集合であり $\mathrm{Int}(B_r[x])$ は対応する開球 $B_r(x)$ です. 煩瑣なので, $B_r[0]$ の代わりに B_r を使用します.

S を C から E への, A を C から 2^E への写像とします. $D(A)$ と $R(A)$ はそれぞれ A の定義域と値域を表します. S についても同様です. 従って, $C = D(S)$, $S(C) = \{Sx : x \in C\} = R(S)$ です. $F(S)$ は S の不動点集合, 即ち, $F(S) = \{v \in C : Sv = v\}$ です. S が bounded とは, S が C の有界な部分集合を E の有界な部分集合に写すことです. S が compact とは, S が連続で C の有界な部分集合を E の相対 compact な部分集合に写すことです. C' が相対 compact とは $\overline{C'}$ が compact 集合であることです.

A が増大 (accretive) 作用素であるとは, $x, y \in C$ ごとに, 次の様な $j \in J(x-y)$ が存在することです: $\langle u - v, j\rangle \geq 0$ for $u \in Ax$, $v \in Ay$. 増大作用素 A と $a \in (0,\infty)$ について $R(I + aA)$ から $C = D(A)$ の上への Yosida resolvent J_a と $R(I + aA)$ から E への Yosida approximant A_a は次の様に定義されます.

$$J_a = (I + aA)^{-1}, \qquad A_a = \tfrac{1}{a}(I - J_a).$$

$D(J_a) = R(I + aA)$, $R(J_a) = D(A)$ です. J_a と A_a の典型的な性質をいくつか提示します:

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H14, 47H07, 47H11.
Key words and phrases. Leray-Schauder type theorem, m–accretive operator, fixed point theorem, nonlinear equation.

- $\|J_a x - J_a y\| \le \|x - y\|$ for $x, y \in D(J_a) = R(I + aA)$.
- $A_a x \in AJ_a x$ for $x \in R(I + aA)$.
- $\|J_a x - x\| = a\|A_a x\| \le a \inf\{\|y\| : y \in Ax\}$ for $x \in D(A) \cap R(I + aA)$.

A が m–増大 (m–accretive) 作用素であるとは, A が増大作用素であり, 次の条件を満たすことです:

$$R(I + aA) = E \qquad \text{for} \quad a \in (0, \infty).$$

3. いくつかの不動点定理

次の定理は Brouwer's fixed point theorem として著名です.

Theorem 3.1. *Let C be a compact convex subset of an Euclidean space. Let S be a continuous self–mapping on C. Then, there is $v \in C$ satisfying $Sv = v$.* ■

次の定理を, Nagumo [8] の平易なアイデアを使用して証明します.

Theorem 3.2. *Let C be a closed convex subset of E. Let T be a continuous self–mapping on C such that $T(C)$ is relatively compact. Then, there is $v \in T(C) \subset C$ satisfying $Tv = v$.* ■

Proof. $D = \overline{T(C)}$ とします; 仮定より, D は compact, $D \subset C$ です. 任意に $r > 0$ を固定します. このとき, $\{B_r(x)\}_{x \in D}$ は, compact 集合 D の開被覆なので, 有限部分開被覆 $\{B_r(x_i)\}_{i=1}^n$ を持ちます. $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ とします. 紛れはないので, $\{x_i\}_{i=1}^n$ を簡潔に $\{x_i\}$ と書きます. このとき, $\mathrm{co}(\{x_i\})$ は Euclid 空間の有界な閉凸集合とみなせます: L を $\{x_i\}$ から生成される有限次元線形空間とします. L を線形位相空間にする Hausdorff 位相は 1 つしか存在しません. 従って, L について, 慣れ親しんだ Euclid 位相と E の部分空間としての相対位相は一致しなければなりません. また, $\mathrm{co}(\{x_i\}) \subset C$ は明らかです.

$i \in I$ ごとに, E から $[0, r]$ への連続写像 d_i を定義します: $d_i(x) = \max\{0, r - \|x - x_i\|\}$ for $x \in E$. $x \in D$ ごとに, $\|x - x_i\| < r\,(d_i(x) > 0)$ となる $i \in I$ が存在します. 次の事実はほとんど自明です:

(1) For $x \in D$ and $i \in I$, $d_i(x) > 0$ if and only if $\|x - x_i\| < r$.

(2) For $x \in D$, $\frac{d_i(x)}{\sum_{i=1}^n d_i(x)} \in [0, 1]$ for $i \in I$, and $\sum_{i=1}^n (\frac{d_i(x)}{\sum_{i=1}^n d_i(x)}) = 1$.

従って, D から $\mathrm{co}(\{x_i\})$ への次の様な連続写像 T_r が考えられます:

(3) $T_r x = \sum_{i=1}^n \frac{d_i(x)}{\sum_{i=1}^n d_i(x)} x_i$ for $x \in D$.

$x \in D$ について, (1) より, $d_i(x)\|x - x_i\| \le d_i(x) r$ for $i \in I$. 従って, (2)–(3) より,

$$\|x - T_r x\| \le \sum_{i=1}^n \frac{d_i(x)}{\sum_{i=1}^n d_i(x)} \|x - x_i\| \le \frac{1}{\sum_{i=1}^n d_i(x)} \sum_{i=1}^n d_i(x) r = r \quad \text{for} \quad x \in D.$$

T と T_r の合成 $T_r T$ は, 部分空間 L の compact な凸集合 $\mathrm{co}(\{x_i\})$ 上の連続な自己写像です. Brouwer の定理より, $T_r T u = u$ を満たす $u \in \mathrm{co}(\{x_i\})$ が存在します. 従って, $Tu \in D$ より, $\|Tu - T_r Tu\| \le r$ です. 即ち, $\|Tu - u\| \le r$ を得ます. この議論は, 本質的には, Nagumo [8] に依ります.

ここまでの議論から, 次の様な C の点列 $\{u_m\}$ が存在します: $\|Tu_m - u_m\| \le 1/m$ for $m \in N$. D が compact と $\{Tu_m\} \subset D$ より, ある $v \in D \subset C$ に収束する, $\{Tu_m\}$ の部分列 $\{Tu_{m_j}\}$ が存在します. $\lim_m \|Tu_m - u_m\| = 0$ より, $\{u_{m_j}\}$ も v に収束します. 次のことを知っています:

$$\|v - Tv\| \le \|v - Tu_{m_j}\| + \|Tu_{m_j} - Tv\| \quad \text{for} \quad j \in N.$$

これらと T が連続より, $\|v - Tv\| = 0$, 即ち, $v = Tv$ を得ます. $v = Tv \in T(C)$ は自明です. □

定理 3.2 は, Schauder の定理 (Brouwer の定理の Banach 空間版) と Mazur の定理を使えば直ちに得られます. この意味で, 定理 3.2 は Schauder の定理の version です. ただし, Mazur の定理の証明は容易ではありません. ここでは, 定理 3.2 の証明に Brouwer の定理だけを使用しました; Schauder の定理, Mazur の定理, degree theory などは不要です. また, Brouwer の定理については, 最近平易な証明が発表

されています; 例えば, Takeuchi and Suzuki [13, 14] 参照. Bonsall [1] は, “Singbal が, 局所凸空間で, 定理 3.2 の主張の平易な証明を与えた” と述べます. Singbal はこの証明を論文や書籍に残さなかった様で, 彼の証明は Bonsall の [1. Appendix] に掲載されています; 手法は定理 3.2 の証明と同方向です.

次の trivial な補題を後の議論のために提示します; ほぼ自明なので証明は省き, この後, 断りなく (i)–(iii) を使用します. $\frac{1}{r}\|\cdot\|$ は B_r に付随する Minkowski functional であることを注意しておきます.

Lemma 3.3. *Let $r > 0$. Let f_r and M_r be mappings defined respectively by $f_r(y) = \frac{r}{\max\{r, \|y\|\}}$ and $M_r y = f_r(y)y$ for $y \in E$. Then, $R(f_r) \subset (0,1]$ and $R(M_r) \subset B_r$. Correctly, the following hold:*

(i) *$f_r(y) = 1$ and $M_r y = y \in B_r$ for $y \in B_r$.*

(ii) *$f_r(y) \in (0,1)$ and $M_r y = \frac{r}{\|y\|} y \in B_r$ for $y \notin B_r$.*

(iii) *f_r and M_r are continuous.* ■

定理 3.4 を補題 3.3 と定理 3.2 から導くことは容易です: 証明のテクニックも従来から知られていたものです. しかしながら, この定理はおそらく新しい type の不動点定理です; Remark 3.6 参照.

Theorem 3.4. *Let C be a subset of E with $0 \in Int(C)$. Let $r > 0$ satisfy $B_r \subset C$. Let T be a continuous mapping from C into E such that $T(B_r)$ is relatively compact. Define mappings f_r from E into $(0,1]$ and M_r from E into B_r respectively by $f_r(y) = \frac{r}{\max\{r, \|y\|\}}$ and $M_r y = f_r(y)y$ for $y \in E$. Define a self–mapping V_r on B_r by*

$$V_r y = M_r T y = f_r(Ty)Ty \in B_r \qquad \text{for} \quad y \in B_r.$$

Then, there is $y_r \in B_r \subset C$ satisfying $V_r y_r = y_r$. Also, the following hold:

(1) *$Ty_r = y_r$ if $Ty_r \in B_r$. In particular, $Ty_r = y_r$ if $y_r \in \partial B_r$ and $Ty_r \in B_r$.*

(2) *$Ty_r = y_r$ ($f_r(Ty_r) = 1$) if $y_r \in \mathrm{Int}(B_r) = B_r(0)$.* ■

Proof. $0 \in \mathrm{Int}(C)$ より, 条件を満たす $r > 0$ が存在します. (i)–(ii) より,

$$M_r(E) \subset B_r, \quad V_r(B_r) = M_r T(B_r) \subset M_r(\overline{T(B_r)}) \subset B_r.$$

仮定より, $\overline{T(B_r)}$ は compact です. 従って, (iii) も考慮すると, $V_r(B_r) \subset B_r$, V_r は連続, $V_r(B_r)$ は相対 compact です. 従って, 定理 3.2 より, $V_r y_r = M_r T y_r = y_r$ となる $y_r \in B_r$ が存在します.

(1) を示します. $Ty_r \in B_r$ を仮定すれば, (i) より, $Ty_r = M_r T y_r = y_r$. (2) を示します. (1) より, $Ty_r \in B_r$ を示せば十分です. 背理法で示すために, $Ty_r \notin B_r$ とします. $y_r \in \mathrm{Int}(B_r) = B_r(0)$, $Ty_r \notin B_r$ と (ii) より, 直ちに矛盾を得ます:

$$r > \|y_r\| = \|M_r T y_r\| = \|\tfrac{r}{\|Ty_r\|} T y_r\| = \tfrac{r}{\|Ty_r\|}\|Ty_r\| = r.$$

当然, $Ty_r \in B_r$ は $f_r(Ty_r) = 1$ を意味します. □

Theorem 3.4 は, ある意味で, 次の Rohte の不動点定理の精密化です.

Theorem 3.5. *Let $r > 0$ and let T be a compact mapping from B_r into E such that $T(\partial B_r) \subset B_r$. Then, there is $v \in B_r$ satisfying $Tv = v$.* ■

Proof. Theorem 3.4 で, $C = B_r$ とします. $T(\partial B_r) \subset B_r$ と Theorem 3.4 (1), (2) より結論を得ます. □

Remark 3.6. 定理 3.4 (2) は重要な役割を担います. (2) を考慮すると, V_r が ∂B_r 上 fixed point free ならば, $Ty_r = y_r$ を満たす $y_r \in B_r(0)$ が存在します. 従って, $F(T) \cap B_r \neq \emptyset$ を保証するための, $y_r \in F(V_r) \cap \partial B_r$ の動向に注目した, 次の境界条件が考えられます: $Ty_r \in B_r$ if $y_r \in \partial B_r$. これは Rohte の境界条件の精密化です. 定理 3.4 は, $Ty_r \notin B_r$ のときには y_r と $F(T)$ の関係に言及しません. ■

定理 3.4 の典型的な系として, Lloyd [6] の Theorem 6.3.2 と関連する次の定理を提示します.

Theorem 3.7. *Let C be a subset of E with $0 \in Int(C)$. Let $r > 0$ satisfy $B_r \subset C$. Let T be a continuous mapping from C into E such that $T(B_r)$ is relatively compact. Assume that $Ty \neq cy$ if $y \in \partial B_r$ and $c \in (1, \infty)$. Then, there is $y_r \in B_r \subset C$ satisfying $Ty_r = y_r$.* ■

Proof. 定理 3.4 の f_r, M_r, V_r を採れば, 次の様な $y_r \in B_r$ が存在します:

$$y_r = V_r y_r = M_r T y_r = f_r(Ty_r)Ty_r, \quad f_r(Ty_r) \in (0, 1].$$

従って, $c_r = 1/f_r(Ty_r) \in [1, \infty)$ とすれば, $Ty_r = c_r y_r$ です. $y_r \in B_r(0)$ ならば, 定理 3.4 (2) より, $y_r = Ty_r$ です. $y_r \in \partial B_r$ ならば, 仮定と $c_r \in [1, \infty)$ より, $c_r = 1$, 即ち, $Ty_r = y_r$ です. □

4. 抽象的非線形方程式への応用

4.1. 背景といくつかの結果.

E を Banach 空間, A を $D(A)$ から 2^E への m–増大作用素, S を $D(S)$ から E への $D(A) \subset D(S)$ を満たす写像とします. A が m–増大作用素より, $D(J_1) = E$, $R(J_1) \subset D(A)$ です. $p \in E$ とします. これ以降, U と W_n を E から E 自身への次の様な写像とします:

$$Uy = p + J_1 y - SJ_1 y \quad \text{for} \quad y \in E,$$
$$W_n y = p - SJ_n(ny) \quad \text{for} \quad y \in E, \quad n \in N.$$

Morales [7], Hirano [3], Kartsatos [4] の主題は, 次の抽象的な非線形式 (P) が成立する条件の考察です:

(P) $$p \in R(A + S), \qquad p \in \overline{R(A + S)}.$$

$p \in Ax + Sx$ を満たす $x \in D(A)$ を抽象的非線形方程式 $p \in R(A+S)$ の解といいます; $Ax+Sx \subset R(A+S)$.

いくつかの既に得られている結果を提示します.

Theorem 4.1. *Let A be an m-accretive operator from $D(A) \subset E$ into 2^E such that $J_1 = (I + A)^{-1}$ is compact. Let S be a bounded continuous mapping from $\overline{D(A)}$ into E.*

Let $p \in E$ and $b > 0$. Suppose the following:

($*$) *For every $x \in D(A)$ with $\|x\| \geq b$, there is $j \in Jx$ satisfying*

$$\langle u - p + Sx, j\rangle \geq 0 \qquad \text{for} \quad u \in Ax.$$

Then $p \in R(A + S)$. ■

Theorem 4.2. *Let A be an m-accretive operator from $D(A) \subset E$ into 2^E such that $J_1 = (I + A)^{-1}$ is compact. Let S be a bounded continuous mapping from $\overline{D(A)}$ into E.*

Let $p \in E$ and $b > 0$. Suppose $z \in B_b(0) \cap D(A)$ and the following hold:

($**$) *For every $x \in D(A)$ with $\|x\| \geq b$,*

$$\langle u - p + Sx, j\rangle \geq 0 \qquad \text{for} \quad u \in Ax, \ j \in J(x - z).$$

Then $p \in R(A + S)$. ■

Theorem 4.3. *Let A be an m-accretive operator from $D(A) \subset E$ into 2^E. Let S be a mapping from $\overline{D(A)}$ into E which is compact, and uniformly continuous on bounded sets.*

Let $p \in E$ and $b > 0$. Suppose the following holds:

($*$) *For every $x \in D(A)$ with $\|x\| \geq b$, there is $j \in Jx$ satisfying*

$$\langle u - p + Sx, j\rangle \geq 0 \qquad \text{for} \quad u \in Ax.$$

Then $p \in \overline{(A + S)(B_b(0) \cap D(A))}$. ■

定理 4.3 と 4.1 は Kartsatos [4] の Theorem 3 と Theorem 5 です．一方, 定理 4.2 は Hirano [3] の Theorem 2 です．これらの定理は, 次の大雑把な区分け (Cr) と (Cp) のどちらかに属します．(Cr) 型の主張と (Cp) 型の主張には隔たりがあり, その構造の違いから確認すべきことも異なってきます．定理 4.3 の S の定義域 $D(S)$ は, おそらく, $\overline{D(A)}$ を含む必要はなく $D(A)$ を含めば十分だと思います．

(Cr) J_1 is compact and S is continuous ($\overline{D(A)} \subset D(S)$): 定理 4.1, 定理 4.2. $F(U) \neq \emptyset$ を保証する条件を設定できれば, $p \in R(A+S)$ が保証されます．

(Cp) S is compact ($D(A) \subset D(S)$): 定理 4.3. $n \in N$ ごとに $w_n \in F(W_n)$ の存在と, $\{\frac{1}{n} J_n(nw_n)\}$ が 0 に収束することを保証する条件を設定できれば, $p \in \overline{R(A+S)}$ が保証されます．

紙数の制限から, これ以降は (Cr) 型のみを扱い, やや複雑な (Cp) 型については機会を待って議論します．

次の 2 つの補題は, この分野でよく知られたものです．

Lemma 4.4. *Let A be an m-accretive operator from $D(A) \subset E$ into 2^E. Let S be a mapping from $D(S) \subset E$ into E with $D(A) \subset D(S)$.*

Let $p \in E$. Suppose $u \in F(U)$. Then, $x = J_1 u \in D(A)$ and $p \in Ax + Sx \subset R(A+S)$. ■

Proof. J_1 と A_1 の性質と U の定義を思い出してください．$y \in E$ について, 次は同値です:

(a) $0 = A_1 y + SJ_1 y - p = (I - J_1)y + SJ_1 y - p$. (b) $y = p + J_1 y - SJ_1 y = Uy$.

$u \in F(U)$ とすれば, $x = J_1 u \in D(A)$, $p = A_1 u + SJ_1 u$. $A_1 u \in AJ_1 u$ より, $p \in Ax + Sx$ を得ます． □

Lemma 4.5. *Let A be an m-accretive operator from $D(A) \subset E$ into 2^E such that $J_1 = (I+A)^{-1}$ is compact. Let S be a continuous mapping from $D(S) \subset E$ into E with $\overline{D(A)} \subset D(S)$.*

Let $p \in E$. Then, U is continuous and $U(B_r)$ is relatively compact. ■

Proof. U の定義を確認してください．J_1 が compact と S が連続より, $J_1(B_r)$ が相対 compact と U が連続は明らかです．$\overline{J_1(B_r)}$ が compact, $\overline{J_1(B_r)} \subset \overline{D(A)} \subset D(S)$ と S が連続より, $S(\overline{J_1(B_r)})$ も compact です．従って, $S(J_1(B_r)) \subset S(\overline{J_1(B_r)})$ より, $SJ_1(B_r)$ と $U(B_r)$ は相対 compact です． □

次の定理は, ここでの設定に即した, 定理 3.4 の変形です．

Theorem 4.6. *Let A be an m-accretive operator from $D(A) \subset E$ into 2^E such that $J_1 = (I+A)^{-1}$ is compact. Let S be a continuous mapping from $D(S) \subset E$ into E with $\overline{D(A)} \subset D(S)$.*

Let $p \in E$ and $r > 0$. Then, there are $u \in B_r$ and $c \in [1, \infty)$ satisfying $cu = p + J_1 u - SJ_1 u$ and $c = \frac{\max\{r, \|p + J_1 u - SJ_1 u\|\}}{r}$. Suppose one of the following holds:

(1) *$u \in B_r(0)$.*

(2) *$\|p + J_1 u - SJ_1 u\| \leq r$.*

(3) *There is $j \in E^*$ satisfying $\langle u, j \rangle \neq 0$ and $\langle u, j \rangle \langle A_1 u - p + SJ_1 u, j \rangle \geq 0$.*

Then, $c = 1$. Furthermore, $c = 1$ and $u = p + J_1 u - SJ_1 u = Uu$ are equivalent. ■

Proof. 前半の主張を示します．仮定, U の定義と補題 4.5 より, U は連続, $U(B_r)$ は相対 compact です．f_r と V_r を次の様に定義します: $f_r(y) = \frac{r}{\max\{r, \|y\|\}}$ for $y \in E$, $V_r y = f_r(Uy)Uy \in B_r$ for $y \in B_r$. このとき, 定理 3.4 より, 次の様な $u \in B_r$ が存在します: $u = V_r u = f_r(Uu)Uu$.

ここで $c = \frac{1}{f_r(Uu)}$ とすれば, $f_r(Uu) \in (0, 1]$ より, $c = \frac{1}{f_r(Uu)} \in [1, \infty)$ です．即ち,

$$cu = Uu = p + J_1 u - SJ_1 u, \qquad c = \frac{1}{f_r(Uu)} = \frac{\max\{r, \|p + J_1 u - SJ_1 u\|\}}{r} \in [1, \infty). \tag{4.1}$$

(1) を仮定します．$u \in B_r(0)$ と定理 3.4 (2) より $f_r(Uu) = 1$, 即ち, $c = 1$ です．(2) を仮定します．このとき, $\|Uu\| = \|p + J_1 u - SJ_1 u\| \leq r$, 即ち $Uu \in B_r$ です．従って, $f_r(Uu) = 1$, 即ち, $c = 1$ です．

(3) を仮定します. 背理法を使って $c=1$ を示すために, $c>1$ とします. $A_1u=u-J_1u$ であり, (4.1) より, $cu=p+J_1u-SJ_1u$ です. (3) より, 次の様な $j\in E^*$ が存在します:

$$\langle u,j\rangle\neq 0,\qquad \langle u,j\rangle\langle u-J_1u-p+SJ_1u,j\rangle=\langle u,j\rangle\langle u-cu,j\rangle=(1-c)\langle u,j\rangle^2\geq 0$$

これは, $1-c<0$, $\langle u,j\rangle^2>0$ に矛盾します.

最後の主張を示します. $u\in B_r(0)$ ならば $c=1$ を既に確認しました. 従って, (4.1) より, $u=0$ の case を含めて, $c=1$ と $u=Uu=p+J_1u-SJ_1u$ は同値です. □

4.2. **(Cr) 型非線形方程式の解が存在するための十分条件.**

まず, 参考のために, Rothe の条件による次の結果を提示します.

Theorem 4.7. *Let A be an m-accretive operator from $D(A)\subset E$ into 2^E such that $J_1=(I+A)^{-1}$ is compact. Let S be a continuous mapping from $D(S)\subset E$ into E with $\overline{D(A)}\subset D(S)$.*

Let $p\in E$ and $r>0$. Assume the following:

(R) $\|p+J_1y-SJ_1y\|\leq r$ *for $y\in\partial B_r$,*

Then, there is $u\in B_r$ satisfying $x=J_1u\in D(A)$ and $p\in Ax+Sx\subset R(A+S)$. ■

Proof. 定理 4.6 より, $cu=p+J_1u-SJ_1u$, $c=\frac{\max\{r,\|p+J_1u-SJ_1u\|\}}{r}$ を満たす $u\in B_r$ と $c\in[1,\infty)$ が存在します. $u\in B_r(0)$ とすれば, 定理 4.6 (1) より $c=1$, $u\in F(U)$ です. $u\in\partial B_r$ とすれば, (R) より, $\|p+J_1u-SJ_1u\|\leq r$. 従って, 定理 4.6 (2) より $c=1$, $u\in F(U)$ です. 補題 4.4 より結論を得ます. □

Theorem 4.8. *Let A be an m-accretive operator from $D(A)\subset E$ into 2^E such that $J_1=(I+A)^{-1}$ is compact. Let S be a continuous mapping from $D(S)\subset E$ into E with $\overline{D(A)}\subset D(S)$.*

Let $p\in E$ and $r>0$. Assume the following:

($\diamond$) *For $y\in\partial B_r$, there is $j\in E^*$ satisfying $\langle y,j\rangle\neq 0$ and $\langle y,j\rangle\langle A_1y-p+SJ_1y,j\rangle\geq 0$.*

Then, there is $u\in B_r$ satisfying $x=J_1u\in D(A)$ and $p\in Ax+Sx\subset R(A+S)$. ■

Proof. 定理 4.6 より, $cu=p+J_1u-SJ_1u$, $c=\frac{\max\{r,\|p+J_1u-SJ_1u\|\}}{r}$ を満たす $u\in B_r$ と $c\in[1,\infty)$ が存在します. $u\in B_r(0)$ とします. このとき, 定理 4.6 (1) より $c=1$, $u\in F(U)$ です. $u\in\partial B_r$ とします. このとき, ($\diamond$) より, 次の様な $j\in E^*$ が存在します: $\langle u,j\rangle\neq 0$ and $\langle u,j\rangle\langle A_1u-p+SJ_1u,j\rangle\geq 0$. 従って定理 4.6 (3) より $c=1$, $u\in F(U)$ です. 補題 4.4 より結論を得ます. □

4.3. **補遺.**

定理 4.8 は, Kartsatos の定理 4.1, Hirano の定理 4.2 と類似の結果です. これらを直接比較することはできませんが, S を bounded とすれば, 定理 4.8 から定理 4.2 が導けます. 著者には, 定理 4.1 や定理 4.2 の複雑な境界条件が, 定理 4.8 の境界条件よりも優れていると考えるべき理由が見出せません.

この分野の従来の研究方法は, 考察を強引に Leray–Schauder 型定理に引き寄せているきらいがあると感じます. この定理が使える環境を整えるために境界条件や証明が複雑になり, この複雑さが問題の本質・構造を見えにくくしていると著者は思います. 一方, 定理 4.8 の証明は新しい type の不動点定理 3.4 の平易な応用であり, 境界条件も本論で解説した様に複雑なものではないと思います.

Kartsatos は, 定理 4.3 で S が有界集合上で一様連続とし, 証明に $0\in R(A)$ と Leray–Schauder 型定理を使用しました. $0\in R(A)$ ならば, $0\in Az$ となる $z\in D(A)$ が存在します; 即ち, $J_az=z$ for $a\in(0,\infty)$. 彼は一般性を失わずにこの条件を使用できると主張します; 著者は十分に確認をしていません. そして, 定理 4.3 (Cp) から定理 4.1 (Cr) を導いています; (Cp) 型と (Cr) 型はやや異質です. Hirano [3] は主に condensing 写像を扱い, 定理 4.2 の証明に Lloyd [6] の Theorem 6.3.2 を使用しました.

*****

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University. 東京工業大学 高橋 渉 先生には平素からの丁寧なご教示に感謝いたします. 島根大学 黒岩 大史 先生には, この論稿を発表する機会をいただいたことにお礼申し上げます.

References

[1] F. F. Bonsall, *Lectures on some fixed point theorems of functional analysis*, Tata Inst., Bombay (1962).
[2] F. E. Browder, *Problimès non-lineairés*, University of Montreal Press (1966).
[3] N. Hirano, *Some surjectivity theorems for compact perturbations of accretive operators*, Nonlinear Anal. TMA 8 (1984), 765-774.
[4] A. G. Kartsatos, *On compact perturbations and compact resolvents of nonlinear m-accretive operators in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 119 (1993), 1189-1198.
[5] J. Leray and J. Schauder, *Topologie et équations fonctionelles*, Ann. Sci. Norm. Sup. 51 (1934), 45–78.
[6] E. Lloyd, *Degree theory*, Cambridge Univ. Press, New York, 1978.
[7] C. Morales, *Remarks on compact perturbations of m-accretive operators*, Nonlinear Anal. TMA 16 (1991), 771–780.
[8] M. Nagumo, *Degree of a mapping in a convex linear space*, Ann. J. Math. 73 (1951), 497–510.
[9] A. J. B. Potter, *An elementary version of the Leray–Schuder theorem*, J. London Math. Soc. 5 (1972), 414–416.
[10] E. Rothe, *Zur Theorie der topologischen Ordnung und des Vecktorfeldes in Banachschen*, Rauman, Compos. Math. 5 (1937).
[11] H. Schaefer, *Über die Methode der a priori Schranken*, Math. Annalen. Bd. 129 (1955), 415–416.
[12] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama 2000.
[13] Y. Takeuchi and T. Suzuki, *An easily verifiable proof of the Brouwer fixed point theorem*, Bull. Kyushu Inst. Technol. 59 (2012), 1–5.
[14] Y. Takeuchi and T. Suzuki, *An elementary proof of the 2-dimensional version of the Brouwer fixed point theorem*, Bull. Kyushu Inst. Technol. 61 (2014), 1–6.