準凸計画問題に対する KKT 条件と制約想定

島根大学 総合理工学部 数理科学科 鈴木 聡
Satoshi Suzuki
Department of Mathematical Sciences, Shimane University

概要

本講究録では, 準凸計画問題に対する KKT 条件と制約想定について述べる. 特に近年筆者によって示された, essentially quasiconvex programming に対する GP 劣微分と生成集合を用いた最適性の必要十分条件, 一般の準凸計画問題に対する M 劣微分と生成集合を用いた最適性の必要十分条件について述べる. 特に既存の研究との関連や証明のアイディア等について詳細に述べる.

1 導入

本講究録では以下のような数理計画問題について考察する:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && f(x), \\ &\text{subject to} && x \in A = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in I, g_i(y) \leq 0\}. \end{aligned}$$

ただし, I : 添字集合, f, $g_i : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ とする. f はこの問題の目的関数, g_i は制約関数, A は制約集合と呼ばれる. 数理計画問題は関数や制約集合の種類によって分類されており, 本講究録では特に各関数が準凸関数であるような, 準凸計画問題について考察する.

数理計画問題においては様々な最適性条件が研究されている. 特に微分概念を用いた最適性条件は数理計画問題の研究における根幹的な役割をなしており, 様々な拡張が広くなされている. 凸計画問題に関するものとして [2, 4, 5, 10], 準凸計画問題に関するものとして [1, 8, 11, 12, 14–16, 18] 等がある.

〒690-8504 島根県松江市西川津町 1060.

本研究は JSPS 科研費 19K03620 の助成を受けたものです.

中でもよく知られているのが凸計画問題に対する以下のような最適性条件である.

定理 1. [4] g_i を実数値凸関数, $x_0 \in A$ とする. このとき, 次の二つの条件は同値である:

(i)
$$N_A(x_0) = \mathrm{coneco} \bigcup_{i \in I(x_0)} \partial g_i(x_0),$$

(ii) 任意の実数値凸関数 f に対して, x_0 が f の A における大域的最適解であることと次の条件は同値である:
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)} \text{ s.t. } 0 \in \partial f(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i \partial g_i(x_0).$$

ただし $\partial f(x_0)$ は f の x_0 における劣微分, $N_A(x_0)$ は A の x_0 における法線錐, $I(x_0) = \{i \in I \mid g_i(x_0) = 0\}$, $\mathbb{R}_+^{(I)} = \{\lambda \in \mathbb{R}^I \mid \forall i \in I, \lambda_i \geq 0, \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\} : \text{finite}\}$ である.

定理 1 においては大域解であることの必要十分条件が劣微分を用いて示されており, この条件は KKT 条件と呼ばれる. Lagrange 双対性とも関連するなど凸計画問題において非常に重要な条件である. また, 条件 (i) は KKT 条件が最適性条件となるための仮定であり, basic constraint qualification (BCQ) と呼ばれる制約想定の一つである. 上記定理において示された同値性から, BCQ は KKT 条件に対する必要十分な制約想定である.

本講究録では, 上記の凸計画問題における結果の拡張として, 我々が [12] において示した準凸計画問題に対する KKT 条件と制約想定について述べる.

2 準備

$A \subset \mathbb{R}^n$ に対して, A の $x \in A$ における法線錐 (normal cone) を次で定義する:
$$N_A(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in A, \langle v, y - x \rangle \leq 0\}.$$

f のエピグラフ (epigraph) を次のように定義する:
$$\mathrm{epi} f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\}.$$

このとき, f が凸関数であるとは $\mathrm{epi} f$ が凸集合であるときをいう. f の Fenchel 共役関数 f^* を次のように定義する:
$$f^*(v) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle v, x \rangle - f(x)\}, \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

また, f の $x \in \mathbb{R}^n$ における劣微分 (subdifferential) を次のように定義する:

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in \mathbb{R}^n, f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x \rangle\}.$$

このとき, f が準凸関数であるとは任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対してレベル集合

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \alpha\}$$

が凸集合であるときをいう. 任意の凸関数は準凸関数であるが, その逆は一般には成り立たない. f が essentially quasiconvex であるとは, f が準凸関数でありかつ任意の局所解が大域解であるときをいう. 一般に凸関数や微分可能な擬凸関数は essentially quasiconvex である.

[3] において Greenberg, Pierskalla は次のような劣微分を定義した:

$$\partial^{GP} f(x_0) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, x \rangle \geq \langle v, x_0 \rangle \text{ implies } f(x) \geq f(x_0)\}.$$

これを f の $x_0 \in \mathbb{R}^n$ における Greenberg-Pierskalla 劣微分 (GP 劣微分) という.

また, [6] において Martínez-Legaz は次の Martínez-Legaz 劣微分 (M 劣微分) を定義した:

$$\partial^M f(x_0) = \{(v, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \inf\{f(x) \mid \langle v, x \rangle \geq t\} \geq f(x_0), \langle v, x_0 \rangle \geq t\}.$$

特に M 劣微分は Moreau's generalized conjugation の特別な場合として知られている. 詳細は [7, 18] を参照のこと.

関数 f が準アフィンであるとは f, $-f$ が準凸関数であるときをいう. f が下半連続準アフィン関数であることと $k \in Q$, $w \in \mathbb{R}^n$ が存在して $f = k \circ w$ となることが同値であることが知られている. ただし, Q は以下の集合である.

$$Q = \{h : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} \mid h: \text{ 下半連続かつ非減少 }\}.$$

また f が下半連続準凸関数であることと, $\{(k_j, w_j) \mid j \in J\} \subset Q \times \mathbb{R}^n$ が存在して $f = \sup_{j \in J} k_j \circ w_j$ となることが同値である. この結果は, 準凸関数は準アフィン関数の上限として表される, ということを意味しており, 凸関数とアフィン関数の関係に非常によく対応している. $G = \{(k_j, w_j) \mid j \in J\} \subset Q \times \mathbb{R}^n$ が f の生成集合であるとは, $f = \sup_{j \in J} k_j \circ w_j$ が成り立つときをいう. 任意の下半連続準凸関数は生成集合を持つが, 特に下半連続真凸関数に対しては以下の生成集合が重要である:

$$\{(k_v, v) \mid v \in \mathrm{dom} f^*, k_v(t) = t - f^*(v), \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

この生成集合は "basic generator" と呼ばれ, 凸計画と準凸計画の比較の際に重要となる. 詳細は [6, 9, 13, 17] を参照のこと.

3 KKT 条件と制約想定

本章では [12] において示された, 準凸計画問題に対する KKT 条件と制約想定について述べる．本講究録を通じて, g_i を下半連続準凸関数, $\{(k_{(i,j)}, w_{(i,j)}) \mid j \in J_i\} \subset Q \times \mathbb{R}^n$ を g_i の生成集合, $T = \{t = (i,j) \mid i \in I, j \in J_i\}$, $T(x_0) = \{t \in T \mid \langle w_t, x_0 \rangle = k_t^{-1}(0)\}$ とし, 制約集合 A は空集合でないと仮定する．

定理 2. [12] $x_0 \in A$ とする．このとき, 次の二つの条件は同値である:

(i)
$$N_A(x_0) = \text{cone co} \bigcup_{t \in T(x_0)} \{w_t\},$$

(ii) 任意の上半連続 essentially quasiconvex 関数 f に対して, x_0 が f の A における大域的最適解であることと次の条件は同値である:
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \text{ s.t. } 0 \in \partial^{GP} f(x_0) + \sum_{t \in T(x_0)} \lambda_t w_t.$$

注意 1. 定理 2 においては essentially quasiconvex である目的関数を持つ準凸計画問題に対して, 最適性の必要条件を GP 劣微分及び生成集合を用いて示している．またこの KKT 条件が最適性条件となるための制約想定として条件 (i) が得られている．条件 (i) は Q-BCQ と呼ばれる準凸計画問題における制約想定であり, 別種の最適性条件や Lagrange 型双対性に対する必要十分な制約想定としても知られている．Q-BCQ の詳細については [14, 17] を参照のこと．

注意 2. 定理 2 においては目的関数が essentially quasiconvex であることを仮定しているが, この条件は準凸関数としては幾分強い条件である．より一般的な準凸計画問題に対する KKT 条件として以下のものがある．

定理 3. [12] 次の条件 (i) が成り立つとき, 条件 (ii) が成り立つ:

(i)
$$\text{cone co} \bigcup_{t \in T} \{(w_t, \delta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid k_t^{-1}(0) \le \delta\} + \{0\} \times [0, +\infty)$$

は閉集合である．

(ii) 任意の上半連続準凸関数 f と $x_0 \in A$ に対して, x_0 が f の A における大域的最適解であることと次の条件は同値である:

$$\exists\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \text{ and } r \geq 0 \text{ s.t. } 0 \in \partial^M f(x_0) + \sum_{t \in T} \lambda_t(w_t, k_t^{-1}(0)) + (0, r).$$

さらに, A がコンパクト集合であるとき (i) と (ii) は同値である.

注意 3. 定理 3 においては, より一般的な準凸計画問題に対して最適性の必要条件を M 劣微分及び生成集合を用いて示している. またこの KKT 条件が最適性条件となるための制約想定として条件 (i) が得られている. 条件 (i) は Q-CCCQ と呼ばれる準凸計画問題における制約想定であり Lagrange 型双対性に対する必要十分な制約想定としても知られている. Q-CCCQ の詳細については [13, 17] を参照のこと.

注意 4. 定理 3 において, 一般には Q-CCCQ は必要十分な制約想定ではない. 制約集合に追加的な仮定を加えることで必要十分性を示すことができる. より具体的には

$$\forall v \in \mathrm{dom}\delta_A^*, \exists x \in A \text{ s.t. } \delta_A^*(v) = \langle v, x \rangle$$

となるような仮定が必要であり, コンパクト集合のほか凸多面集合の場合にも Q-CCCQ の必要十分性を示すことができる.

注意 5. 一般的な数理計画問題では目的関数の下半連続性を仮定することが多いが, 定理 2 及び定理 3 においては目的関数の上半連続性を仮定している. この理由は, 証明中で制約集合 A とレベル集合 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < f(x_0)\}$ の間の分離定理を用いているからである. 上半連続性より上記レベル集合は開集合となるため, 以下のような分離不等式を得ることができる:

$$\langle v, y \rangle > \langle v, z \rangle \quad \forall y \in A, \forall z \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < f(x_0)\}.$$

注意 6. 一般的に, 目的関数と制約関数の微分概念を用いた最適性条件が KKT 条件と呼ばれる. 定理 1 においては目的関数と制約関数の劣微分, 定理 2 及び定理 3 においては目的関数の GP 及び M 劣微分と制約関数の生成集合を用いている. 実際生成集合は微分概念とも深く関係しているため本講究録ではこれらの条件を KKT 条件と呼んでいる. 一方で目的関数及び制約関数の GP 劣微分あるいは M 劣微分を用いた KKT 条件は, より定理 1 等の既存の KKT 条件と関連が深い. 詳細な研究が待たれるところである.

参考文献

[1] Avriel, M., Diewert, W. E., Schaible, S., Zang, I.: Generalized concavity. Math. Concepts Methods Sci. Engrg. Plenum Press, New York (1988)

[2] Boţ, R. I.: Conjugate Duality in Convex Optimization. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 637, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg (2010)

[3] Greenberg, H. J., Pierskalla, W. P.: Quasi-conjugate functions and surrogate duality. Cah. Cent. Étud. Rech. Opér. 15, 437-448 (1973)

[4] Li, C., Ng, K. F., Pong T. K.: Constraint qualifications for convex inequality systems with applications in constrained optimization. SIAM J. Optim. 19, 163-187 (2008)

[5] Mangasarian, O. L.: A simple characterization of solution sets of convex programs. Oper. Res. Lett. 7, 21-26 (1988)

[6] Martínez-Legaz, J. E.: Quasiconvex duality theory by generalized conjugation methods. Optimization. 19, 603-652 (1988)

[7] Moreau, J. J.: Inf-convolution, sous-additivité, convexité des fonctions numériques. J. Math. Pures Appl. 49, 109-154 (1970)

[8] Penot, J. P.: Characterization of solution sets of quasiconvex programs. J. Optim. Theory Appl. 117, 627-636 (2003)

[9] Penot, J. P., Volle, M.: On quasi-convex duality. Math. Oper. Res. 15, 597-625 (1990)

[10] Rockafellar, R. T.: Convex analysis. Princeton University Press, Princeton (1970)

[11] Suzuki, S.: Duality theorems for quasiconvex programming with a reverse quasiconvex constraint. Taiwanese J. Math. 21, 489-503 (2017)

[12] Suzuki, S.: Optimality Conditions and Constraint Qualifications for Quasiconvex Programming. J. Optim. Theory Appl. to appear. DOI:10.1007/s10957-019-01534-7

[13] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: On set containment characterization and constraint qualification for quasiconvex programming. J. Optim. Theory Appl. 149, 554–563 (2011)

[14] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Optimality conditions and the basic constraint qualifi-

cation for quasiconvex programming. Nonlinear Anal. 74, 1279–1285 (2011)

[15] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Subdifferential calculus for a quasiconvex function with generator. J. Math. Anal. Appl. 384, 677-682 (2011)

[16] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Characterizations of the solution set for quasiconvex programming in terms of Greenberg-Pierskalla subdifferential. J. Global Optim. 62, 431-441 (2015)

[17] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Generators and constraint qualifications for quasiconvex inequality systems. J. Nonlinear Convex Anal. 18, 2101-2121 (2017)

[18] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Characterizations of the solution set for non-essentially quasiconvex programming. Optim. Lett. 11, 1699-1712 (2017)