測地距離空間における写像の凸結合と共通不動点近似

東邦大学・理学部 木村泰紀
Yasunori Kimura
Department of Information Science
Faculty of Science
Toho University

1 序論

距離空間 X 上の写像 $T\colon X \to X$ は, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(Tx, Ty) \le d(x, y)$$

をみたすとき, 非拡大写像と呼ばれる. ヒルベルト空間における非拡大写像の不動点近似は, さまざまな手法が提案されており, それらの多くは非拡大写像族の共通不動点近似へと一般化されている. また, 近年は完備な測地距離空間の一種で, ヒルベルト空間の一般化にもなっているアダマール空間上の共通不動点近似へと拡張され, 精力的な研究が進んでいる.

本稿では, いわゆる Browder 型の共通不動点近似をアダマール空間上で考え, [3] で提案された有限個の写像の凸結合に対応する概念を用いて点列の収束性を示した.

2 準備

距離空間 X の 2 点 $x, y \in X$ に対し, $\gamma\colon [0, d(x, y)] \to X$ が $\gamma(0) = x$, $\gamma(d(x, y)) = y$ をみたす等長写像のとき, γ を x, y を端点とする測地線という. 任意の $x, y \in X$ に対し, これらを端点とする測地線がつねに存在するとき, X を測地距離空間という. 本稿では, 各端点 $x, y \in X$ に対して測地線が一意に存在することを仮定し, 端点 $x, y \in X$ の測地線 γ の像を $[x, y]$ であらわす. また, $t \in [0, 1]$ に対して, $[x, y]$ 上の点 $\gamma((1 - t)d(x, y))$ を

$tx \oplus (1-t)y$ とあらわし, x と y の凸結合という. これによって, X 上の凸集合の概念が自然に定められる.

測地距離空間上の 3 点 $x, y, z \in X$ によって定義される測地三角形 $\triangle(x, y, z) = [y, z] \cup [z, x] \cup [x, y]$ に対して, その比較三角形 $\triangle(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = [\overline{y}, \overline{z}] \cup [\overline{z}, \overline{x}] \cup [\overline{x}, \overline{y}] \subset \mathbb{R}^2$ は

$$d(y, z) = \|\overline{y} - \overline{z}\|, d(z, x) = \|\overline{z} - \overline{x}\|, d(x, y) = \|\overline{x} - \overline{y}\|$$

をみたすものとして定義される. またこのとき, $p \in \triangle(x, y, z)$ の比較点 $\overline{p} \in \triangle(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ も自然に定義され, 任意の $x, y, z \in X$ と任意の $p, q \in \triangle(x, y, z)$ に対して, p, q の比較点 $\overline{p}, \overline{q} \in \triangle(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ が

$$d(p, q) \leq \|\overline{p} - \overline{q}\|$$

をみたすとき, X は CAT(0) 空間と呼ばれる. また完備な CAT(0) 空間をアダマール空間と呼ぶ.

アダマール空間では次の不等式が成り立つことが知られている. 任意の $x, y, z \in X$ と $t \in [0, 1]$ に対して

$$d(z, tx \oplus (1-t)y)^2 \leq td(z, x)^2 + (1-t)d(z, y)^2 - t(1-t)d(x, y)^2.$$

また, $u, v, x, y \in X$ に対して

$$d(x, u)^2 - d(x, v)^2 + d(y, v)^2 - d(y, u)^2 \leq 2d(x, y)d(u, v).$$

アダマール空間 X の有界点列 $\{x_n\}$ に対して

$$r(\{x_n\}) = \inf_{y \in X} \limsup_{n \to \infty} d(x_n, y)$$

で定義する. また, $v \in X$ が $\{x_n\}$ の漸近的中心であるとは,

$$r(\{x_n\}) = \limsup_{n \to \infty} d(x_n, v)$$

が成り立つことをいう. アダマール空間においては, 有界点列の漸近的中心は一意に定まることが知られている. さらに, $x_0 \in X$ が $\{x_n\}$ の任意の部分列 $\{x_{n_i}\}$ の漸近的中心であるとき, $\{x_n\}$ は x_0 に Δ 収束するという.

次の補題は [7] において X が完備 CAT(1) 空間のときに成り立つことが示されているが, アダマール空間においても証明は本質的に同様である.

補題 1 (Kimura-Satô [7]). X をアダマール空間とし, $x \in X$ とするとき, X 上の有界点列 $\{x_n\}$ とその漸近的中心 $v \in X$ に対して $d(x, v) \leq \limsup_{n \to \infty} d(x, x_n)$ が成り立つ.

さらに $\{x_n\}$ が Δ 収束するときには次が成り立つ.

補題 2 (He-Fang-López-Li [4])**.** X をアダマール空間とし, $x \in X$ とするとき, X 上の点列 $\{x_n\}$ が $v \in X$ に Δ 収束するならば $d(x, v) \leq \liminf_{n\to\infty} d(x, x_n)$ が成り立つ.

補題 3 (Kimura [5])**.** アダマール空間 X の点列 $\{x_n\}$ が $v \in X$ に Δ 収束すると仮定する. このとき, ある $p \in X$ に対して $\{d(x_n, p)\}$ が $d(v, p)$ に収束するならば $\{x_n\}$ は v に収束する.

写像 $T\colon X \to X$ の不動点全体を $\operatorname{Fix} T$ であらわす. すなわち, $\operatorname{Fix} T = \{z \in X \mid z = Tz\}$. 写像 T がアダマール空間上の非拡大写像のとき $\operatorname{Fix} T$ は閉凸集合となることが知られている.

X の空でない閉凸集合 C と $x \in X$ に対し, $d(x, p_x) = \inf_{y\in C} d(x, y)$ をみたす $p_x \in C$ が一意に存在する. この p_x を用いて, 写像 $P\colon X \to C$ を $P(x) = p_x$ で定義し, C 上への距離射影とよぶ.

アダマール空間および空間上で定義されたさまざまな写像の基本的性質については [1, 2] を参照せよ.

アダマール空間においては, 2 点の凸結合が自然に定義されており, 3 点以上の有限個の点に対する凸結合については, 2 点の凸結合を繰り返し用いることで定義される. しかし, そのような定義は凸結合を取る点の順序に依存したものとなり, さまざまな計算において支障が生じる場合がある. 次の定理は, 有限個の写像の凸結合で新たな写像を定義する際に, 凸結合の順序に依存しない方法を提案したものであり, 本稿の主結果でも重要な役割を担っている.

定理 1 (Hasegawa-Kimura [3])**.** X をアダマール空間とし, 各 $k = 1, 2, \dots, N$ に対して $T_k\colon X \to X$ を非拡大写像とする. $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ を $\sum_{k=0}^{N} \alpha_k = 1$ をみたす正の実数とする. $x \in X$ に対して,

$$U(x) = \operatorname*{argmin}_{y\in X} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k d(T_k x, y)^2$$

と定義すると, 次が成り立つ.

(i) $U(x)$ は一点集合であり, したがって $U\colon X \to X$ は一価写像として定義される;
(ii) U は非拡大写像である;
(iii) $\bigcap_{k=1}^{N} \operatorname{Fix} T_k$ が空でないならば $\operatorname{Fix} U = \bigcap_{k=1}^{N} \operatorname{Fix} T_k$.

3　非拡大写像族の不動点近似

本節では, 有限個の非拡大写像族に対する共通不動点の近似定理を証明する. まず初めに, 近似点列の生成で使用される手法において, 点列が一意に定められることを示しておこう.

定理 2. $\{T_1, T_2, \ldots, T_N\}$ をアダマール空間 X 上で定義された非拡大写像の有限族とする. $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N\} \subset]0,1[$ を $\sum_{k=0}^{N} \alpha_k = 1$ をみたす数列とし, $u \in X$ とする. このとき,

$$x \in \operatorname*{argmin}_{y \in X} \left(\alpha_0 d(u,y)^2 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k d(T_k x, y)^2 \right)$$

をみたす $x \in X$ が一意に存在する.

この定理の証明は [6] にその本質的な部分が示されている. ここでは完全を期するため, 証明を以下に示す.

証明. 写像 $U \colon X \to X$ を $x \in X$ に対して

$$Ux = \operatorname*{argmin}_{y \in X} \left(\alpha_0 d(u,y)^2 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k d(T_k x, y)^2 \right)$$

で定義する. このとき, 定理 1 より U は一価写像であり, さらに, 縮小写像であることがわかる. 実際, $x, x' \in X$ と $t \in]0,1[$ に対して

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 d(u,Ux)^2 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k d(T_k x, Ux)^2 \\
&\le \alpha_0 d(u, tUx \oplus (1-t)Ux')^2 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k d(T_k x, tUx \oplus (1-t)Ux')^2 \\
&\le \alpha_0 \left(td(u,Ux)^2 + (1-t)d(u,Ux')^2 - t(1-t)d(Ux,Ux')^2 \right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left(td(T_k x, Ux)^2 + (1-t)d(T_k x, Ux')^2 - t(1-t)d(Ux,Ux')^2 \right) \\
&\le t \left(\alpha_0 d(u,Ux)^2 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k d(T_k x, Ux)^2 \right) \\
&\quad + (1-t) \left(\alpha_0 d(u,Ux')^2 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k d(T_k x, Ux')^2 \right) - t(1-t)d(Ux,Ux')^2
\end{aligned}$$

となり, よって

$$
\begin{aligned}
t(1-t)d(Ux,Ux')^2 \le (1-t)\alpha_0 \left(d(u,Ux')^2 - d(u,Ux)^2\right) \\
+ (1-t)\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left(d(T_k x, Ux')^2 - d(T_k x, Ux)^2\right).
\end{aligned}
$$

両辺を $1-t$ で除して $t \to 1$ とすると

$$
\begin{aligned}
d(Ux,Ux')^2 \le \alpha_0 \left(d(u,Ux')^2 - d(u,Ux)^2\right) \\
+ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left(d(T_k x, Ux')^2 - d(T_k x, Ux)^2\right)
\end{aligned}
$$

が得られる. さらに, 同様の計算で

$$
\begin{aligned}
d(Ux',Ux)^2 \le \alpha_0 \left(d(u,Ux)^2 - d(u,Ux')^2\right) \\
+ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left(d(T_k x', Ux)^2 - d(T_k x', Ux')^2\right)
\end{aligned}
$$

も得られる. これらの不等式より

$$
\begin{aligned}
&2d(Ux,Ux')^2 \\
&\le \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left(d(T_k x, Ux')^2 - d(T_k x, Ux)^2 + d(T_k x', Ux)^2 - d(T_k x', Ux')^2\right) \\
&\le \sum_{k=1}^{N} 2\alpha_k d(T_k x, T_k x') d(Ux,Ux') \le 2\sum_{k=1}^{N} \alpha_k d(x,x') d(Ux,Ux') \\
&\le 2(1-\alpha_0) d(x,x') d(Ux,Ux')
\end{aligned}
$$

となり, したがって

$$
d(Ux,Ux') \le (1-\alpha_0) d(x,x')
$$

を得る. $1-\alpha_0 < 1$ であるから U は縮小写像であり, よって不動点 $x = Ux \in X$ が一意に存在する. このとき, U の定義より

$$
x \in \operatorname*{argmin}_{y \in X} \left(\alpha_0 d(u,y)^2 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k d(T_k x, y)^2\right)
$$

である. $\square$

この定理を用いて, 以下に示す Browder 型の不動点近似定理を示すことができる.

定理 3. $\{T_1, T_2, \ldots, T_N\}$ をアダマール空間 X 上で定義された非拡大写像の有限族とし, $F = \bigcap_{k=1}^{N} \operatorname{Fix} T_k \neq \emptyset$ を仮定する. 各 $k = 0, 1, 2, \ldots, N$ に対し, $\{\alpha_n^k\}$ を正の実数列とし, 次を仮定する:

- 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sum_{k=0}^{N} \alpha_n^k = 1$;
- $\lim_{n\to\infty} \alpha_n^0 = 0$;
- ある $a, b \in]0,1[$ が存在して, 各 $n \in \mathbb{N}$ と $k = 1, 2, \ldots, N$ に対して $a \leq \alpha_n^k \leq b$.

$u \in X$ とし, 点列 $\{x_n\}$ を各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_n \in \operatorname*{argmin}_{y \in X} \left(\alpha_n^0 d(u, y)^2 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_n^k d(T_k x_n, y)^2 \right)$$

によって定義する. このとき, $\{x_n\}$ はある $P_F u$ に収束する. ただし, P_F は X から F 上への距離射影である.

証明. 点列 $\{x_n\}$ が一意に定められることは定理 2 よりわかる. 各 $n \in \mathbb{N}$ と $t \in]0,1[$ に対して, x_n の定義より

$$\begin{aligned}
&\alpha_n^0 d(u, x_n)^2 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_n^k d(T_k x_n, x_n)^2 \\
&\leq \alpha_n^0 d(u, t x_n \oplus (1-t) P_F u)^2 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_n^k d(T_k x_n, t x_n \oplus (1-t) P_F u)^2 \\
&\leq t \left(\alpha_n^0 d(u, x_n)^2 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_n^k d(T_k x_n, x_n)^2 \right) \\
&\quad + (1-t) \left(\alpha_n^0 d(u, P_F u)^2 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_n^k d(T_k x_n, P_F u)^2 \right) \\
&\quad - t(1-t) d(x_n, P_F u)^2 \\
&\leq t \left(\alpha_n^0 d(u, x_n)^2 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_n^k d(T_k x_n, x_n)^2 \right) \\
&\quad + (1-t) \left(\alpha_n^0 d(u, P_F u)^2 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_n^k d(x_n, P_F u)^2 \right) \\
&\quad - t(1-t) d(x_n, P_F u)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\le t\left(\alpha_n^0 d(u,x_n)^2+\sum_{k=1}^N \alpha_n^k d(T_k x_n,x_n)^2\right)\\&\quad+(1-t)\left(\alpha_n^0 d(u,P_F u)^2+(1-\alpha_n^0)d(x_n,P_F u)^2\right)\\&\quad-t(1-t)d(x_n,P_F u)^2\end{aligned}$$

となり, この式より

$$(*)\qquad \alpha_n^0 d(u,x_n)^2+\sum_{k=1}^N \alpha_n^k d(T_k x_n,x_n)^2 \le \alpha_n^0\left(d(u,P_F u)^2-d(x_n,P_F u)^2\right)$$

が得られる. さらにこの式から

$$0\le \alpha_n^0\left(d(u,P_F u)^2-d(x_n,P_F u)^2\right)$$

となり, $d(x_n,P_F u)\le d(u,P_F u)$ が任意の $n\in\mathbb{N}$ で成り立つことがわかるので, $\{x_n\}$ は有界点列である.

仮定より $\lim_{n\to\infty}\alpha_n^0=0$ であることを用いると, 各 $k=1,2,\ldots,N$ に対して, $(*)$ から

$$0\le \alpha_n^k d(T_k x_n,x_n)^2\le \alpha_n^0\left(d(u,P_F u)^2-d(x_n,P_F u)^2\right)\to 0$$

となり, さらに $0<a\le\alpha_n^k$ であることから, 任意の $k=1,2,\ldots,N$ に対して $\lim_{n\to\infty}d(T_k x_n,x_n)=0$ が得られる. ここで, $\{x_n\}$ の任意の部分列 $\{x_{n_i}\}$ に対して, $\{x_{n_i}\}$ の漸近的中心 v が $F=\bigcap_{k=1}^N \operatorname{Fix}T_k$ に属することを示そう. $\{d(x_{n_i},T_k x_{n_i})\}$ は 0 に収束するので, 漸近的中心の定義より $k=1,2,\ldots,N$ に対して

$$\begin{aligned}r(\{x_{n_i}\})&=\limsup_{i\to\infty}d(x_{n_i},v)\\&\le\limsup_{i\to\infty}d(x_{n_i},T_k v)\\&\le\limsup_{i\to\infty}(d(x_{n_i},T_k x_{n_i})+d(T_k x_{n_i},T_k v))\\&=\limsup_{i\to\infty}d(T_k x_{n_i},T_k v)\\&\le\limsup_{i\to\infty}d(x_{n_i},v)=r(\{x_{n_i}\})\end{aligned}$$

を得る. よって $T_k v$ も $\{x_{n_i}\}$ の漸近的中心となり, その一意性より $v=T_k v$ が成り立つ. よって $v\in F$ である.

再び $(*)$ より,

$$\alpha_n^0 d(u,x_n)^2\le\alpha_n^0\left(d(u,P_F u)^2-d(x_n,P_F u)^2\right)\le\alpha_n^0 d(u,P_F u)^2$$

であることから $d(u, x_n) \leq d(u, P_F u)$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ. $v \in F$ であることと補題 1 より

$$d(u, P_F u) \leq d(u, v) \leq \liminf_{i \to \infty} d(u, x_{n_i}) \leq d(u, P_F u),$$

すなわち $d(u, P_F u) = d(u, v)$ となるので, $v = P_F u$ が得られる. $\{x_{n_i}\}$ は $\{x_n\}$ の任意の部分列だったので, 定義より $\{x_n\}$ は $P_F u$ に Δ 収束することがわかった. さらに上記と同様にして, 補題 2 を用いると

$$d(u, P_F u) \leq \liminf_{n \to \infty} d(u, x_n) \leq \limsup_{n \to \infty} d(u, x_n) \leq d(u, P_F u)$$

から $d(u, P_F u) = \lim_{n \to \infty} d(u, x_n)$ が得られ, 補題 3 より $\{x_n\}$ は $P_F u$ に収束することが示された. □

参考文献

[1] M. Bačák, *Convex analysis and optimization in Hadamard spaces*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 22, De Gruyter, Berlin, 2014.

[2] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[3] T. Hasegawa and Y. Kimura, *Convergence to a fixed point of a balanced mapping by the Mann algorithm in a Hadamard space*, Linear Nonlinear Anal. **4** (2018), 405–412.

[4] J. S. He, D. H. Fang, G. López, and C. Li, *Mann's algorithm for nonexpansive mappings in* CAT(κ) *spaces*, Nonlinear Anal. **75** (2012), 445–452.

[5] Y. Kimura, *Convergence of a sequence of sets in a Hadamard space and the shrinking projection method for a real Hilbert ball*, Abstr. Appl. Anal. (2010), Art. ID 582475, 11.

[6] Y. Kimura, *Explicit and implicit iterative schemes with balanced mappings in Hadamard spaces*, submitted.

[7] Y. Kimura and K. Satô, *Convergence of subsets of a complete geodesic space with curvature bounded above*, Nonlinear Anal. **75** (2012), 5079–5085.