Semi-tridiagonal Programming

— Complementary Approach —

岩本誠一（九州大学·名誉教授）
Seiichi Iwamoto
Professor emeritus, Kyushu University

木村寛（秋田県立大学 システム科学技術学部）
Yutaka Kimura
Department of Management Science and Engineering
Faculty of Systems Science and Technology
Akita Prefectural University

概 要

本報告では、最小化問題と最大化問題の制約式が三重対角行列（tridiagonal matrix）をなす 2 次計画問題 (quadratic programming problem) を考え、相補的アプローチにより互いに双対であることを示す。さらに、三重対角行列が特別な場合には主問題と双対問題の間にフィボナッチ一致双対性 (Fibonacci identical duality) が成り立ち、両問題の最適点がともにダ・ヴィンチ・コードになっていることを紹介する。

1 Semi-tridiagonal Programming

まず、8 変数の条件付き最小化問題

$$
(\mathrm{P})\quad
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_8^2 - 2(b_1y_1 + b_3y_3 + b_5y_5 + b_7y_7) \\
\text{subject to} & \text{(i)}\ \ py_1 + y_2 - qy_3 = b_2 \\
 & \text{(ii)}\ \ ry_3 + y_4 - sy_5 = b_4 \\
 & \text{(iii)}\ \ ty_5 + y_6 - uy_7 = b_6 \\
 & \text{(iv)}\ \ vy_7 + y_8 = b_8 \\
 & \text{(v)}\ \ y \in R^8
\end{array}
$$

と、8 変数の条件付き最大化問題

$$
(\mathrm{D})\quad
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_8^2) + 2(b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6 + b_8\mu_8) \\
\text{subject to} & \text{(i)}'\ \ \mu_1 - p\mu_2 = b_1 \\
 & \text{(ii)}'\ \ q\mu_2 + \mu_3 - r\mu_4 = b_3 \\
 & \text{(iii)}'\ \ s\mu_4 + \mu_5 - t\mu_6 = b_5 \\
 & \text{(iv)}'\ \ u\mu_6 + \mu_7 - v\mu_8 = b_7 \\
 & \text{(v)}'\ \ \mu \in R^8
\end{array}
$$

を考える。ただし $(b_1, b_2, \dots, b_8) \in R^8$, $(p, q, r, s, t, u, v) \in R^7$ とする。

補題 1 (Complementarity) $(y_1,\, y_2,\, \dots,\, y_8)$ と $(\mu_1,\, \mu_2,\, \dots,\, \mu_8)$ が条件 (i)〜(iv) と (i)$'$〜(iv)$'$

$$\begin{aligned} py_1 + y_2 - qy_3 \;&=\; b_2 & \mu_1 - p\mu_2 \;&=\; b_1 \\ ry_3 + y_4 - sy_5 \;&=\; b_4 & q\mu_2 + \mu_3 - r\mu_4 \;&=\; b_3 \\ ty_5 + y_6 - uy_7 \;&=\; b_6 & s\mu_4 + \mu_5 - t\mu_6 \;&=\; b_5 \\ vy_7 + y_8 \;&=\; b_8 & u\mu_6 + \mu_7 - v\mu_8 \;&=\; b_7 \end{aligned}$$

をそれぞれ満たすとき、次の関係式が成り立つ：

$$\sum_{k=1}^{8} y_k \mu_k \;=\; (b_1y_1 + b_3y_3 + b_5y_5 + b_7y_7) + (b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6 + b_8\mu_8). \tag{1}$$

補題 2 (Nonhomogeneous tridiagonal (NT) equation) 8 元 8 連立線形方程式

$$\text{(NT)} \qquad \begin{aligned} y_1 - py_2 \;&=\; b_1 & py_1 + y_2 - qy_3 \;&=\; b_2 \\ qy_2 + y_3 - ry_4 \;&=\; b_3 & ry_3 + y_4 - sy_5 \;&=\; b_4 \\ sy_4 + y_5 - ty_6 \;&=\; b_5 & ty_5 + y_6 - uy_7 \;&=\; b_6 \\ uy_6 + y_7 - vy_8 \;&=\; b_7 & vy_7 + y_8 \;&=\; b_8 \end{aligned}$$

は、唯一の解 $y = A^{-1}b$ をもつ。ただし、A, y, b はそれぞれ以下であり、A^{-1} は行列 A の逆行列を表す：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 1 & -q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 & -s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & 1 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & 1 & -u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 1 & -v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_8 \end{pmatrix}.$$

Proof. A_k を $k \times k$ 主小行列とすると、

$$\begin{aligned} |A_8| \;&=\; |A_7| + v^2|A_6|, \qquad |A_7| \;=\; |A_6| + u^2|A_5| \\ |A_6| \;&=\; |A_5| + t^2|A_4|, \qquad |A_5| \;=\; |A_4| + s^2|A_3| \\ |A_4| \;&=\; |A_3| + r^2|A_2|, \qquad |A_3| \;=\; |A_2| + q^2|A_1| \\ |A_2| \;&=\; 1 + p^2, \quad |A_1| \;=\; 1. \end{aligned}$$

したがって、$|A| = |A_8| \geq 1$ になり、A は正則である。 $\square$

今、(P) と (D) の目的関数をそれぞれ以下で表す：

$$
\begin{aligned}
f(y) &= y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_8^2 - 2(b_1y_1 + b_3y_3 + b_5y_5 + b_7y_7) \\
g(\mu) &= -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_8^2) + 2(b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6 + b_8\mu_8).
\end{aligned}
$$

このとき、次の補題と定理を得る。

補題 3

(i) (Inequality)　(P), (D) の実行可能解 (y, μ) に対して不等式 $g(\mu) \leq f(y)$ が成り立つ。

(ii) (Equality)　等号が成り立つのは $y = \mu$ のときのみである。

(iii) (Linearity)　さらにこのとき、

$$
\begin{aligned}
f(y) &= -(b_1y_1 + b_3y_3 + b_5y_5 + b_7y_7) + (b_2y_2 + b_4y_4 + b_6y_6 + b_8y_8) && (2) \\
g(\mu) &= -(b_1\mu_1 + b_3\mu_3 + b_5\mu_5 + b_7\mu_7) + (b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6 + b_8\mu_8) && (3)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

Proof.　(i) まず任意の $(x, \lambda) \in R^2$ に対して

$$2x\lambda \leq x^2 + \lambda^2 \tag{4}$$

が成り立つ。等号は $x = \lambda$ のときに限り成り立つ。今、$y = (y_1, y_2, \ldots, y_8) \in R^8$ を (P) の実行可能解、$\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_8) \in R^8$ を (D) の実行可能解とする。すなわち、y と μ は次を満たしているとする。

$$
\begin{array}{llll}
\text{(i)} & py_1 + y_2 - qy_3 = b_2 & \text{(i)}' & \mu_1 - p\mu_2 = b_1 \\
\text{(ii)} & ry_3 + y_4 - sy_5 = b_4 & \text{(ii)}' & q\mu_2 + \mu_3 - r\mu_4 = b_3 \\
\text{(iii)} & ty_5 + y_6 - uy_7 = b_6 & \text{(iii)}' & s\mu_4 + \mu_5 - t\mu_6 = b_5 \\
\text{(iv)} & vy_7 + y_8 = b_8 & \text{(iv)}' & u\mu_6 + \mu_7 - v\mu_8 = b_7.
\end{array}
$$

ここで、不等式 (4) を y_k, μ_k $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ として用いて、辺々加えると

$$2\sum_{k=1}^{8} y_k\mu_k \leq \sum_{k=1}^{8} y_k^2 + \sum_{k=1}^{8} \mu_k^2 \qquad 1 \leq k \leq 8 \tag{5}$$

が得られる。等号は

$$\text{(e)} \quad y_k = \mu_k \qquad 1 \leq k \leq 8$$

のときのみ成立する。他方、補題 1 より

$$2\sum_{k=1}^{8} y_k\mu_k = 2(b_1y_1 + b_3y_3 + b_5y_5 + b_7y_7) + 2(b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6 + b_8\mu_8) \tag{6}$$

である、したがって、(5),(6) より、(i)〜(iv) を満たす y と (i)$'$〜(iv)$'$ を満たす μ に対して、不等式

$$-\sum_{k=1}^{8}\mu_k^2 + 2(b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6 + b_8\mu_8) \le \sum_{k=1}^{8} y_k^2 - 2(b_1y_1 + b_3y_3 + b_5y_5 + b_7y_7) \quad (7)$$

が成り立つ。等号は条件 (i)〜(iv), (e), (i)$'$〜(iv)$'$ が成り立つときのみ成立する：

$$\begin{array}{llll}
\text{(i)} & py_1 + y_2 - qy_3 = b_2 & \text{(i)}' & \mu_1 - p\mu_2 = b_1 \\
\text{(ii)} & ry_3 + y_4 - sy_5 = b_4 & \text{(ii)}' & q\mu_2 + \mu_3 - r\mu_4 = b_3 \\
\text{(iii)} & ty_5 + y_6 - uy_7 = b_6 & \text{(iii)}' & s\mu_4 + \mu_5 - t\mu_6 = b_5 \\
\text{(iv)} & vy_7 + y_8 = b_8 & \text{(iv)}' & u\mu_6 + \mu_7 - v\mu_8 = b_7
\end{array}$$

$$\text{(e)} \quad y_k = \mu_k \qquad 1 \le k \le 8.$$

ゆえに、任意の実行可能解 (y, λ) に対して $g(\mu) \le f(y)$ が成り立つ。

(ii) 実行可能解 (y, μ) に対して、等号は以下の条件が成り立つときのみ成立する：

$$\text{(e)} \quad y_k = \mu_k \quad 1 \le k \le 8.$$

よって (P) と (D) は互いに双対である。

(iii) さらに (ii) であるとき, 相補性 (1) は

$$\sum_{k=1}^{8} y_k^2 = \sum_{k=1}^{8}\mu_k^2 = (b_1y_1 + b_3y_3 + b_5y_5 + b_7y_7) + (b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6 + b_8\mu_8) \qquad (8)$$

となる。よって、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
f(y) &= y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_8^2 - 2(b_1y_1 + b_3y_3 + b_5y_5 + b_7y_7) \\
&= (b_1y_1 + b_3y_3 + b_5y_5 + b_7y_7) + (b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6 + b_8\mu_8) \\
&\qquad - 2(b_1y_1 + b_3y_3 + b_5y_5 + b_7y_7) \\
&= -(b_1y_1 + b_3y_3 + b_5y_5 + b_7y_7) + (b_2y_2 + b_4y_4 + b_6y_6 + b_8y_8) \\
g(\mu) &= -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_8^2) + 2(b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6 + b_8\mu_8) \\
&= -(b_1y_1 + b_3y_3 + b_5y_5 + b_7y_7) - (b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6 + b_8\mu_8) \\
&\qquad + 2(b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6 + b_8\mu_8) \\
&= -(b_1\mu_1 + b_3\mu_3 + b_5\mu_5 + b_7\mu_7) + (b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6 + b_8\mu_8).
\end{aligned}$$

したがって、任意の実行可能解 (y, μ) に対して

$$g(\mu) \le f(y)$$

であり、等号 $g(\mu) = f(y)$ は (i)〜(iv), (e), (i)′〜(iv)′:

$$\text{(EC)}\qquad \begin{aligned} py_1 + y_2 - qy_3 &= b_2 & \mu_1 - p\mu_2 &= b_1 \\ ry_3 + y_4 - sy_5 &= b_4 & q\mu_2 + \mu_3 - r\mu_4 &= b_3 \\ ty_5 + y_6 - uy_7 &= b_6 & s\mu_4 + \mu_5 - t\mu_6 &= b_5 \\ vy_7 + y_8 &= b_8 & u\mu_6 + \mu_7 - v\mu_8 &= b_7 \end{aligned}$$
$$y_k = \mu_k \quad 1 \le k \le 8$$

を満たすときのみに限る。よって、(EC) は以下の 16 元 16 連立方程式系に同値となり、

$$\begin{aligned} y_1 - py_2 &= b_1 & py_1 + y_2 - qy_3 &= b_2 \\ qy_2 + y_3 - ry_4 &= b_3 & ry_3 + y_4 - sy_5 &= b_4 \\ sy_4 + y_5 - ty_6 &= b_5 & ty_5 + y_6 - uy_7 &= b_6 \\ uy_6 + y_7 - vy_8 &= b_7 & y_7 + vy_8 &= b_8 \end{aligned}$$
$$\mu_k = y_k \quad 1 \le k \le 8.$$

補題 2 より (EC) は唯一の解

$$(\hat{y}_1,\ \hat{y}_2,\ \ldots,\ \hat{y}_8) = (\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \ldots,\ \mu_8^*)$$

をもつ。 □

定理 1 (Duality Theorem)
(i) (Weak Duality) (P), (D) の実行可能解 (y, μ) に対して $g(\mu) \le f(y)$ が成り立つ。
(ii) (Strong Duality) $f(\hat{y}) = g(\mu^*)$ を満たす実行可能解 $(\hat{y}, \mu^*)$ が存在する。
(iii) (Optimal Solution) $\hat{y}$ は (P) の最小点であり μ^* は (D) の最大点である。

Proof. 補題 3 より (i) と (ii) が示される。また (ii) ならば (iii) である。 □

2 $2n$ 変数問題

一般形として、次の $2n$ 変数の条件付き最小化問題

$$\text{(P)}'\qquad \begin{aligned} &\text{minimize} \quad y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{2n}^2 - 2(b_1y_1 + b_3y_3 + \cdots + b_{2n-1}y_{2n-1}) \\ &\text{subject to} \quad (1)\ \ p_1y_1 + y_2 - p_2y_3 = b_2 \\ &\qquad\qquad\quad\ (2)\ \ p_3y_3 + y_4 - p_4y_5 = b_4 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ &\qquad\qquad (\mathrm{n}-1)\ \ p_{2n-3}y_{2n-3} + y_{2n-2} - p_{2n-2}y_{2n-1} = b_{2n-2} \\ &\qquad\qquad\quad\ (\mathrm{n})\ \ p_{2n-1}y_{2n-1} + y_{2n} = b_{2n} \\ &\qquad\qquad (\mathrm{n}+1)\ \ y \in R^{2n} \end{aligned}$$

と、$2n$ 変数の条件付き最大化問題

$$
(\mathrm{D})' \quad
\begin{array}{lrl}
\text{Maximize} & & -(\mu_1^2+\mu_2^2+\cdots+\mu_{2n}^2)+2(b_2\mu_2+b_4\mu_4+\cdots+b_{2n}\mu_{2n}) \\
\text{subject to} & (1)' & \mu_1-p_1\mu_2 = b_1 \\
 & (2)' & p_2\mu_2+\mu_3-p_3\mu_4 = b_3 \\
 & (3)' & p_4\mu_4+\mu_5-p_5\mu_6 = b_5 \\
 & & \vdots \\
 & (\mathrm{n})' & p_{2n-2}\mu_{2n-2}+\mu_{2n-1}-p_{2n-1}\mu_{2n} = b_{2n-1} \\
 & (\mathrm{n}+1)' & \mu \in R^{2n}
\end{array}
$$

を考える。ただし、$b = (b_1, b_2, \ldots, b_{2n}) \in R^{2n}$, $(p_1, p_2, \ldots, p_{2n-1}) \in R^{2n-1}$ は定数である。

まず、$(\mathrm{P})'$ と $(\mathrm{D})'$ の目的関数をそれぞれ以下で表す：

$$
\begin{aligned}
f(y) &= y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{2n}^2-2(b_1y_1+b_3y_3+\cdots+b_{2n-1}y_{2n-1}) \\
g(\mu) &= -(\mu_1^2+\mu_2^2+\cdots+\mu_{2n}^2)+2(b_2\mu_2+b_4\mu_4+\cdots+b_{2n}\mu_{2n}).
\end{aligned}
$$

このとき、次の補題と定理を得る。

補題 4 (Complementarity) $(y_1, y_2, \ldots, y_{2n})$ と $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n})$ が条件 (i)〜(n) と (i)′〜(n)′ をそれぞれ満たすとき、次の関係式が成り立つ：

$$
\sum_{k=1}^{2n} y_k\mu_k = (b_1y_1+b_3y_3+\cdots+b_{2n-1}y_{2n-1})+(b_2\mu_2+b_4\mu_4+\cdots+b_{2n}\mu_{2n}). \tag{9}
$$

補題 5

(i) (Inequality)　$(\mathrm{P})'$, $(\mathrm{D})'$ の実行可能解 (y, μ) に対して不等式 $g(\mu) \leq f(y)$ が成り立つ。

(ii) (Equality)　等号が成り立つのは $y = \mu$ のときのみである。

(iii) (Linearity)　さらにこのとき、

$$
\begin{aligned}
f(y) &= -(b_1y_1+b_3y_3+\cdots+b_{2n-1}y_{2n-1})+(b_2y_2+b_4y_4+\cdots+b_{2n}y_{2n}) \quad (10) \\
g(\mu) &= -(b_1\mu_1+b_3\mu_3+\cdots+b_{2n-1}\mu_{2n-1})+(b_2\mu_2+b_4\mu_4+\cdots+b_{2n}\mu_{2n}) \quad (11)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

補題 6　次の $2n$ 元 $2n$ 連立線形方程式系 $(\mathrm{NF})'$ は唯一の解をもつ。

$$
(\mathrm{NF})' \quad
\begin{aligned}
y_1-p_1y_2 &= b_1 \\
p_1y_1+y_2-p_2y_3 &= b_2 \\
p_2y_2+y_3-p_3y_4 &= b_3 \\
&\vdots \\
p_{2n-2}y_{2n-2}+y_{2n-1}-p_{2n-1}y_{2n} &= b_{2n-1} \\
p_{2n-1}y_{2n-1}+y_{2n} &= b_{2n}.
\end{aligned}
$$

定理 2 (Duality Theorem)
(i) (Weak Duality)　$(\mathrm{P})'$, $(\mathrm{D})'$ の実行可能解 (y, μ) に対して $g(\mu) \le f(y)$ が成り立つ。
(ii) (Strong Duality)　$f(\hat{y}) = g(\mu^*)$ を満たす実行可能解 $(\hat{y}, \mu^*)$ が存在する。
(iii) (Optimal Solution)　$\hat{y}$ は $(\mathrm{P})'$ の最小点であり μ^* は $(\mathrm{D})'$ の最大点である。

3　フィボナッチ対

(P) と (D) に対して、

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_7 = 0,\ b_8 = c;\ \ p = q = \cdots = v = 1$$

とした最小化と最大化のそれぞれの問題 $(\overline{\mathrm{P}})$ と $(\overline{\mathrm{D}})$ を考える。このとき、$(\overline{\mathrm{P}})$ と $(\overline{\mathrm{D}})$ の間には **Fibonacci identical duality** (ID) が成り立つ：

1. (duality)　$(\overline{\mathrm{P}})$ と $(\overline{\mathrm{D}})$ は互いに双対である。
2. (identical)　$(\overline{\mathrm{P}})$ と $(\overline{\mathrm{D}})$ のそれぞれの最適点と最適値は共に一致する。
3. (Fibonacci)　$(\overline{\mathrm{P}})$ は

$$y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) = \frac{c}{F_9}(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_8) \tag{12}$$

のとき、最小値 $m = \dfrac{F_8}{F_9}c^2$ をもつ。$(\overline{\mathrm{D}})$ も

$$\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) = \frac{c}{F_9}(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_8) \tag{13}$$

のとき、最大値 $M = \dfrac{F_8}{F_9}c^2$ をもつ。

特に、$c = F_9$ のときは、最小点と最大点は共にダ・ヴィンチ・コード [7, 8, 9, 10, 11, 12] になり、最小値と最大値は $m = M = F_8F_9$ になる。

ここに $F_1, F_2, \ldots, F_9$ はフィボナッチ数列の第 1 項から第 9 項である（表 1）。両問題の最適解（点と値）は共にフィボナッチ数列で表されている。一般に、**フィボナッチ数列** (Fibonacci sequence) は 2 階線形差分方程式（3 項間漸化式）

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \qquad x_1 = 1,\ x_0 = 0 \tag{14}$$

の解として定義される（表 1）.

表 1　フィボナッチ数列 $\{F_n\}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

なお、本問題の由来は [3, 4, 6] などに遡り、アプローチと方法は一部 [1, 2, 5, 13, 14] に拠る。

参考文献

[1] E.F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities,* 3rd revised printing, Springer, New York, 1971.

[2] R.E. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).

[3] A. Beutelspacher and B. Petri, *Der Goldene Schnitt 2., überarbeitete und erweiterte Auflange*, ELSEVIER GmbH, Spectrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996.

[4] R.A. Dunlap, *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 1977.

[5] G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities,* 2nd ed., Cambridge Univ. Press, London and New York, 1952.

[6] 岩本 誠一, 動的計画論, 九大出版会, 1987.

[7] 岩本 誠一, ダ・ヴィンチ・コードは最適か？, 数理経済学研究センター会報, 第 37 号, 平成 21(2009) 年 9 月, pp.1–9.

[8] 岩本 誠一・吉良 知文・植野 貴之, ダ・ヴィンチ・コード, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 巻 (2009 年 10 月) 2・3 号, pp.1–21.

[9] 岩本 誠一, 最適化の数理 II — ベルマン方程式 — (Mathematics for Optimization I I – Bellman Equation –)、数理経済学研究センター「数理経済学叢書 5」, 知泉書館, 2013 年 10 月, pp.449.

[10] 岩本 誠一・木村 寛, セミフィボナッチ計画法 — 不等式アプローチ — , RIMS 研究集会「確率的環境下における数理モデルの理論と応用」, 京大数理研講究録, Vol.2044, pp.112–119, 2017.

[11] 岩本 誠一・木村 寛, Nonhomogeneous Semi-Fibonacci Programming, 第 21 回 情報・統計科学シンポジウム（BIC2016）, 九州大学, 2016 年 12 月, preprint.

[12] 岩本 誠一・木村 寛, Nonhomogeneous Semi-Fibonacci Programming – Identical Duality –, RIMS 研究集会「不確実性の下での意思決定理論とその応用：計画数学の展開」, 京大数理研講究録, Vol.2078, pp.121–126, 2018.

[13] S.Iwamoto, Y.Kimura, T.Fujita, Complementary versus Shift Dualities, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Vol.17, No.8, pp.1547–1555, 2016.

[14] Y.Kimura, T.Ueno, S. Iwamoto, Two duals of one prime, Bulletin of Informatics and Cybernetics, Vol.48, pp.63–82, 2016.