標準DC最適化問題のラグランジュ双対性に対する考察

島根大学大学院自然科学研究科 岡野倖治（**Koji Okano**）
Graduate School of Natural Science and Technology, Shimane University
島根大学総合理工学部 黒岩大史（**Daishi Kuroiwa**）
Major in Interdisciplinary Science and Engineering, Shimane University

1 はじめに

本講究録では次のような標準 DC 最適化問題に対する結果を紹介する:

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{minimize} & \langle a, x\rangle \\ & \text{subject to} & f(x) \leq 0,\ g(x) \geq 0, \end{array}$$

ただし, $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は凸関数, $a \in \mathbb{R}^n$ とする。問題 (P) は, 次の一般的な DC 最適化問題 (Q)(ただし, 制約関数 f_i, g_i が実数値関数のとき) を同値変形して得られることが知られている。

$$\begin{array}{lll} \text{(Q)} & \text{minimize} & f_0(x) - g_0(x) \\ & \text{subject to} & f_i(x) - g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m, \end{array}$$

ただし, $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は凸関数 $(i = 0, \ldots, m)$ とする。標準 DC 問題は一般的には凸最適化問題ではない。しかし, 問題 (P) は次のような凸最適化問題 $(\mathrm{P}_y)(y \in \mathrm{dom} g^*)$ に分解して考察することができる (g^* や $\mathrm{dom} g^*$ の定義については後述する)。

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{P}_y) & \text{minimize} & \langle a, x\rangle \\ & \text{subject to} & f(x) \leq 0,\ \langle -y, x\rangle + g^*(y) \leq 0. \end{array}$$

このとき, 標準 DC 最適化問題のラグランジュ双対性

$$\inf_{x \in S} \langle a, x\rangle = \inf_{y \in A} \sup_{\lambda, \mu \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle a, x\rangle + \lambda f(x) + \mu(\langle -y, x\rangle + g^*(y))\}$$

について観察する。本講究録では, ラグランジュ双対性を成立させるための条件として既存の結果 [5] で仮定されている制約想定よりも弱い制約想定について紹介する。

2 準備

まずは準備として，関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対して必要な概念を定義する。

$$\mathrm{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$$

$$\mathrm{epi} f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in \mathrm{dom} f, f(x) \leq r\},$$

を f の実行定義域, f のエピグラフといい，f のエピグラフ epi$f$ が凸集合，閉集合，非空のとき，関数 f はそれぞれ凸，閉，真であるという。関数 f の共役関数を

$$f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{\langle x, y\rangle - f(x)\}$$

と定義する。このとき, f が真凸ならば $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ は閉真凸であることが知られており, また f が閉真凸ならば

$$f = f^{**}$$

が成立する。次に, 以下の凸最適化問題に関する先行研究をいくつか紹介する。

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{minimize} & f(x) \\ & \text{subject to} & g_i(x) \le 0, \forall i \in I, \end{array}$$

ただし，I は任意の空でない添字集合とし，$f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ は凸関数とする。

定理 2.1 (J.E. Martínez-Legaz, Michel Volle, [1]) I を有限集合とする。$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ $(i \in I)$ を凸関数, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \le 0,\ \forall i \in I\} \ne \emptyset$ とし，Slater 条件

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ such that } g_i(x_0) < 0 \text{ for all } i \in I$$

が成り立つとする。このとき，任意の凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対してラグランジュ双対性が成り立つ。すなわち

$$\inf_{x\in S} f(x) = \max_{\lambda_i\in\mathbb{R}_+} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \sum_{i\in I} \lambda_i g_i(x) \right\}.$$

ただし，$0\cdot(+\infty) = +\infty$ とする。

ラグランジュ双対性成立について, Slater 条件はあくまでも十分条件である。すなわち，任意の凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対してラグランジュ双対性が成立しても，Slater 条件が成立していない場合がある。一方で，次の定理ではラグランジュ双対性成立に対する必要十分制約想定が述べられている。

定理 2.2 (M.A. Goberna, V. Jeyakumar, M.A. López, [2]) I を任意の集合，$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ $(i \in I)$ を閉真凸関数, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \le 0,\ \forall i \in I\} \ne \emptyset$ とし，任意の $i \in I$ に対して g_i が連続となる S の元が存在すると仮定する。このとき次の二つは同値である:

(1) FM(Farkas Minkowski Property) が成立。すなわち，次の集合が閉集合:

$$\text{cone}\,\text{co} \bigcup_{i\in I} \text{epi} g_i^* + \{0\} \times [0, +\infty)$$

(2) 任意の凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対してラグランジュ双対性が成り立つ。すなわち，

$$\inf_{x\in S} f(x) = \max_{\lambda\in\mathbb{R}_+^{(I)}} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \sum_{i\in I} \lambda_i g_i(x) \right\}.$$

ただし，$0 \cdot (+\infty) = 0$ とする。

定理 2.1, 定理 2.2 では, Lagrange 双対性において, 等式の右辺の値を実現するための $\lambda_i (i \in I)$ の存在性が保証されているときの制約想定が述べられている。 次の定理では, 必ずしも $\lambda_i (i \in I)$ の存在性が保証されていないときの制約想定が述べられている。ここでは簡単のため, I が有限集合 $(I = \{1, 2, \ldots, m\})$ のときを取り扱う。

定理 2.3 (V. Jeyakumar, G. Y. Li [4]) $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を閉真凸関数 $(i = 1, \ldots, m)$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\} \neq \emptyset, \mathrm{int}\,\mathrm{dom} g \neq \emptyset$ とする．このとき, 次は同値である。

(i) $h^\diamond$ は閉関数である,

(ii) 任意の凸関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して, 次の等式が成り立つ:

$$\inf_{x \in S} f(x) = \sup_{\lambda_i \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \right\},$$

ただし, $\forall z \in \mathbb{R}^n$, $h^\diamond(z) = \inf_{\lambda_i \geq 0} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i \right)^* (z)$, $0 \cdot (+\infty) = +\infty$ とする。

次に, 本研究に関連する先行研究を紹介する。

定理 2.4 (Y. Fujiwara, D. Kuroiwa [5]) $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を凸関数, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0, g(x) \geq 0\} \neq \emptyset$, $\cup_{x \in S} \partial g(x) \subseteq A$ とする。$\{f \leq 0\} \cap \{\langle -z, \cdot \rangle + g^*(z) \leq 0\} \neq \emptyset$ を満たす任意の $z \in A \cap \mathrm{dom} g^*$ に対して $\mathrm{cone}\,\mathrm{co}\,(\mathrm{epi} f^* \cup \{-z\} \times [-g^*(z), +\infty) \cup \{0\} \times [0, +\infty))$ が閉集合ならば, 任意の $a \in \mathbb{R}^n$ に対して次の等式が成り立つ :

$$\inf_{x \in S} \langle a, x \rangle = \inf_{y \in A} \sup_{\lambda, \mu \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle a, x \rangle + \lambda f(x) + \mu (\langle -y, x \rangle) + g^*(y)) \} \tag{1}$$

しかし, 定理 2.4 の仮定の $\mathrm{cone}\,\mathrm{co}\,(\mathrm{epi} f^* \cup \{-z\} \times [-g^*(z), +\infty) \cup \{0\} \times [0, +\infty))$ が閉ではないが, (1) の等式が成立するような場合がある。

例 2.1

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-2x} & x \leq 0 \\ +\infty & x > 0 \end{cases}, \ g(x) = 0$$

とおく。このとき,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}, \ g^*(y) = \delta_{\{0\}}(y), \ A \cap \mathrm{dom} g^* = \{0\}$$

より,

$$\begin{aligned} &\mathrm{cone}\,\mathrm{co}\,(\mathrm{epi} f^* \cup \{-z\} \times [-g^*(z), +\infty) \cup \{0\} \times [0, +\infty)) \\ &= \mathrm{cone}\,\mathrm{co}\,(\mathrm{epi} f^* \cup \{0\} \times [0, +\infty)). \end{aligned}$$

よって $\mathrm{cone\,co}\,(\mathrm{epi}f^* \cup \{0\} \times [0, +\infty))$ は閉集合ではない。しかしながら (1) の等号は成立する。実際, $a = 1$ のとき

$$\inf_{x \in S} \langle a, x \rangle = \inf_{x \in S} -x = 0,$$

$$\begin{aligned}
&\inf_{y \in A} \sup_{\lambda, \mu \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle a, x \rangle + \lambda f(x) + \mu(\langle -y, x \rangle) + g^*(y))\} \\
&= \inf_{y \in A} \sup_{\lambda, \mu \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{-x - \lambda\sqrt{-2x} + \mu(-xy + \delta_{\{0\}}(y))\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3 主結果

定理 3.1 $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を閉真凸関数 , $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0, g(x) \geq 0\} \neq \emptyset$, $\cup_{x \in S} \partial g(x) \subseteq A$ とする。任意の $y \in A$ に対して $h_y^\diamond$ が閉関数ならば, 任意の $a \in \mathbb{R}^n$ に対して次の等式が成り立つ。

$$\inf_{x \in S} \langle a, x \rangle = \inf_{y \in A} \sup_{\lambda, \mu \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle a, x \rangle + \lambda f(x) + \mu(\langle -y, x \rangle + g^*(y))\}.$$

ただし, $\forall z \in \mathbb{R}^n$, $h_y^\diamond(z) = \inf\limits_{\lambda, \mu \geq 0} \left\{(\lambda f + \mu(\langle -y, \cdot \rangle + g^*(y)))^* (z)\right\}$, $0 \cdot (+\infty) = +\infty$ とする.

定理 3.1 の仮定は定理 2.4 の仮定よりも弱いが, その逆は一般的に成立しない。例 2.1 で考えると,

$$f^*(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y} & y > 0 \\ +\infty & y \leq 0 \end{cases}, \ g^*(y) = \delta_{\{0\}}(y), \ A \cap \mathrm{dom} g^* = \{0\}$$

より,

$$h_y^\diamond(z) = \inf_{\lambda \geq 0} (\lambda f)^*(z) = \begin{cases} 0 & y \geq 0 \\ +\infty & y < 0 \end{cases}.$$

故に $h_y^\diamond(z)$ は閉関数である。つまり, 定理 2.4 の仮定では成立しない例が, 定理 3.1 の仮定においては成立する。

系 3.1 問題 (P) の制約関数において, $f = \langle b, \cdot \rangle + c\,(b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R})$ のとき, 定理 3.1 の仮定の $h_y^\diamond$ は閉関数であることが必ず成立する。

$$\begin{aligned}
h_y^\diamond(z) &= \inf_{\lambda, \mu \geq 0} \left\{(\lambda\,(\langle b, \cdot \rangle + c) + \mu(\langle -y, \cdot \rangle + g^*(y)))^* (z)\right\} \\
&= \inf_{\lambda, \mu \geq 0} \left\{(\langle \lambda b - \mu y, \cdot \rangle + \lambda c + \mu g^*(y))^* (z)\right\}
\end{aligned}$$

(i) $y \in \mathrm{dom} g^*$, $y \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
h_y^\diamond(z) &= \inf_{\lambda \geq 0, \mu \geq 0} \left\{\delta_{\{\lambda b - \mu y\}}(z) - \lambda c - \mu g^*(y)\right\} \\
&= \begin{cases} 0 & z \in \mathrm{cone\,co}\,\{b, -y\},\ c \leq 0, g^*(y) \leq 0 \\ -\infty & z \in \mathrm{cone\,co}\,\{b, -y\},\ c > 0 \text{ または } g^*(y) > 0 \\ +\infty & z \notin \mathrm{cone\,co}\,\{b, -y\} \end{cases}
\end{aligned}$$

従って,

$$\mathrm{epi} h_y^\diamond = \begin{cases} \mathrm{cone}\,\mathrm{co}\,\{b, -y\} \times [0, +\infty] & c \leq 0, g^*(y) \leq 0 \\ \mathrm{cone}\,\mathrm{co}\,\{b, -y\} \times \mathbb{R} & c > 0 \text{ または } g^*(y) > 0 \end{cases}$$

となる。任意の集合の凸錐包は閉集合より, $\mathrm{epi} h_y^\diamond$ は閉集合である。

(ii) $y \notin \mathrm{dom} g^*$ のとき

$$\begin{aligned} h_y^\diamond(z) &= \inf_{\lambda,\mu \geq 0} \{(\langle \lambda b - \mu y, \cdot \rangle + \lambda c + \infty)^* (z)\} \\ &= \inf_{\lambda,\mu \geq 0} \{-\infty\} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

従って, $\mathrm{epi} h_y^\diamond = \mathbb{R}^{n+1}$ となり, 閉集合である。(i), (ii) より, $h_y^\diamond$ は閉関数である。即ち, 問題 (P) の制約関数が $f = \langle b, \cdot \rangle + c$ の場合は必ず (1) の等式が成立することが分かる。

例 3.1

$$f(x) = -x,\ g(x) = x^2 - 1$$

とおく。このとき, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ となる。ここでは $A = \mathbb{R}$ とおくと, 明らかに $\cup_{x \in S} \partial g(x) \subseteq A$ は成立する。また, f の定め方から上で述べた系 3.1 を用いると, 任意の $y \in A$ に対して $h_y^\diamond$ は閉関数である。次に定理 3.1 における等号が成立することを確認していく。

$$\inf_{x \in S} \langle a, x \rangle = \inf_{x \in S} ax = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -\infty & a < 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\inf_{y \in A} \sup_{\lambda,\mu \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}} \{\langle a, x \rangle + \lambda f(x) + \mu(\langle -y, x \rangle + g^*(y))\} \\ &= \inf_{y \in A} \sup_{\lambda,\mu \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}} \left\{ ax - \lambda x + \mu \left(-xy + \frac{y^2}{4} + 1 \right) \right\} \\ &= \inf_{y \in A} \sup_{\lambda,\mu \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}} \left\{ (a - \lambda - \mu y)x + \mu \left(\frac{y^2}{4} + 1 \right) \right\} \\ &= \inf_{y \in A} \sup_{\substack{\mu \geq 0 \\ a - \lambda - \mu y = 0}} \mu \left(\frac{y^2}{4} + 1 \right) \\ &= \inf_{y \in A} \sup_{\substack{\mu \geq 0 \\ a \geq \mu y}} \mu \left(\frac{y^2}{4} + 1 \right) \\ &= \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -\infty & a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

故に

$$\inf_{x \in S} \langle a, x \rangle = \inf_{y \in A} \sup_{\lambda,\mu \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}} \{\langle a, x \rangle + \lambda f(x) + \mu(\langle -y, x \rangle + g^*(y))\}.$$

参考文献

[1] J. E. Martínez-Legaz, Michel Volle. Duality in D.C. Programming: The Case of Several D.C. Constraints. J. Math. Anal. Appl. 237 657-671 (1999)

[2] M. A.Goberna, V. Jeyakumar, M. A. López. Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities. Nonlinear Anal. 68 1184-1194 (2008)

[3] R. Harada, D. Kuroiwa. Lagrange-type duality in DC programming. J. Math. Anal. Appl. 418 (2014)

[4] V. Jeyakumar, G.Y. Li. Stable zero duality gaps in convex programming: Complete dual characterisations with applications to semidefinite programs. J. Math. Anal. Appl. 360 (2009)

[5] Y. Fujiwara, D. Kuroiwa. Lagrange duality in canonical DC programming. J. Math. Anal. Appl. 408 (2013)

[6] D. Kuroiwa, K. Okano. Observation for Lagrange-duality of canonical DC optimization problems, preprint.