最適化問題におけるBCQとMCVの観察

島根大学大学院自然科学研究科 石橋航貴（Koki Ishibashi）
Graduate School of Natural Science and Technology, Shimane University
島根大学総合理工学部 黒岩大史（Daishi Kuroiwa）
Major in Interdisciplinary Science and Engineering, Shimane University

1　はじめに

本講究録では次のような凸最適化問題に対する [7] における結果を紹介する:

$$\begin{array}{lll}(\mathrm{P}) & \text{minimize} & f(x)\\ & \text{subject to} & g_i(x) \leqq 0, \forall i \in I,\end{array}$$

ただし，I は任意の空でない添字集合とし，$f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(i \in I)$ は凸関数とする。問題 (P) における KKT 最適性条件に対する制約想定として最も重要なものの 1 つが BCQ(the basic constraint qualification) である。Slater 条件など, KKT 最適性条件に対する制約想定は他にもあるが, BCQ は問題 (P) の解が KKT 条件を満たすための必要十分な制約想定になっている。本講究録では, BCQ と conical EHP(conical epigraph hull property) との関係を紹介し, MCV(minimum of convex) 関数で制約される最適化問題における結果を示す。

2　準備

まずは準備として，集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ と関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対して必要な概念を定義する。

$$\mathrm{epi} f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\}$$

を f のエピグラフといい，f のエピグラフ epi$f$ が凸集合，閉集合，非空のとき，関数 f はそれぞれ凸，閉，真であるという。関数 f の共役関数を

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, y \rangle - f(x)\}$$

と定義する。また、

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid f(x) + \langle v, y - x \rangle \leq f(y),\ \forall y \in \mathbb{R}^n\}$$

を f の点 x における劣微分という。

$$\mathrm{co}\, A = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \,\middle|\, m \in \mathbb{N},\ a_i \in A,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}$$

を A の凸包といい,

$$\mathrm{cone}\, A = \{\alpha x \mid \alpha \geq 0,\ x \in A\}$$

を A の錐包という。以降では，I は任意の空でない添字集合とし, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(i \in I)$ は凸関数とする。また制約集合

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leqq 0, \forall i \in I\}$$

は空でないと仮定する。ここで本研究に関連する先行研究を二つ紹介する。

定理 2.1 (M. L. Slater, [1]) $I = \{1, \cdots, m\}$ とする。$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ (i \in I)$ を凸関数とし，$\bar{x} \in S$ とする。また、Slater 条件

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ such that } g_i(x_0) < 0,\ \forall i \in I$$

が成り立つとする。このとき、任意の凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned}
&f(\bar{x}) \leq f(x),\ \forall x \in S \\
&\iff \exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0\ s.t. \\
&\qquad\qquad \begin{cases} 0 \in \partial f(\bar{x}) + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial g_i(\bar{x}) \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0,\ \forall i \in I \end{cases}
\end{aligned}$$

Slater 条件は問題 (P) の解が KKT 条件を満たすための十分条件である。しかしながら，任意の凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して問題 (P) の解が KKT 条件を満たしても，Slater 条件が成立していない場合がある。一方で，次の定理では問題 (P) の解が KKT 条件を満たすということに対する必要十分制約想定が述べられている。ただし, ここでは簡単のため I を有限集合と仮定して定理を述べる。

定理 2.2 (M. A. Goberna, V. Jeyakumar, M. A. López, [5]) $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ (i \in I)$ を凸関数とし，$\bar{x} \in S$ とする。このとき、次の二つは同値:

(i) $\bar{x}$ において BCQ が成り立つ。すなわち,

$$N_S(\bar{x}) = \operatorname{cone} \operatorname{co} \bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial g_i(\bar{x})$$

ただし, $I(\bar{x}) = \{i \in I \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$, $N_S(\bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, y - \bar{x} \rangle \leq 0,\ \forall y \in S\}$.

(ii) 任意の凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned}
&f(\bar{x}) \leq f(x),\ \forall x \in S \\
&\iff \exists\ I' \subseteq I,\ \exists\ \lambda_i \geq 0 (i \in I')\ s.t. \\
&\qquad\qquad \begin{cases} 0 \in \partial f(\bar{x}) + \displaystyle\sum_{i \in I'} \lambda_i \partial g_i(\bar{x}) \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0,\ \forall i \in I' \end{cases}
\end{aligned}$$

ここで、BCQ がどの点で成り立っているかに関して次の例を考える。

例 2.1 $I=\{1,2,3\}$ とし, $g_1(x)=x-1,\ g_2(x)=0,\ g_3(x)=-x-1$ とする。このとき、$S=[-1,1]$ であり,

$$\forall \bar{x}\in S,\ I(\bar{x})=\begin{cases}\{1,2\} & \bar{x}=1\\ \{2,3\} & \bar{x}=-1\\ \{2\} & \bar{x}\in(-1,1)\end{cases}$$

であるので、$I(\bar{x})$ の集合によって場合分けをして考える。$\bar{x}=1$ のとき,

$$I(\bar{x})=\{1,2\},\ N_S(\bar{x})=[0,+\infty),\ \partial g_1(\bar{x})=\{1\},\ \partial g_2(\bar{x})=\{0\}$$

であり,

$$\bigcup_{i\in I(\bar{x})}\partial g_i(\bar{x})=\{0,1\}\ \text{より},\ \mathrm{cone\,co}\bigcup_{i\in I(\bar{x})}\partial g_i(\bar{x})=[0,+\infty)$$

$\therefore N_S(\bar{x})=\mathrm{cone\,co}\bigcup_{i\in I(\bar{x})}\partial g_i(\bar{x})$ より, $\bar{x}=1$ において BCQ は成り立つ。

$\bar{x}=-1,\ \bar{x}\in(-1,1)$ のときも同様に考えると BCQ が成り立つ。よって, S の任意の点において BCQ が成り立つ。

例 2.1 のように, S の任意の点において BCQ が成り立つかどうかを調べるのは容易ではないため, 定義の代わりに BCQ が成り立っていることを調べるための定理を述べる。

定理 2.3 (D. Kuroiwa, S. Suzuki, S. Yamamoto, [7]) I を任意の空でない添字集合, $g_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\ (i\in I)$ を凸関数とし, $\bar{x}\in S$ とする。このとき, 次の二つは同値:
(i) $\bar{x}$ において BCQ が成り立つ。
(ii) 次の等式が成り立つ:

$$\{v\in\mathbb{R}^n\mid(v,\langle v,\bar{x}\rangle)\in\mathrm{clcone\,co}\bigcup_{i\in I}\mathrm{epi}g_i^*\}=\{v\in\mathbb{R}^n\mid(v,\langle v,\bar{x}\rangle)\in\mathrm{cone\,co}\bigcup_{i\in I}\mathrm{epi}g_i^*\}$$

定理 2.4 (S. Yamamoto, [6]) I を任意の空でない添字集合, $g_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\ (i\in I)$ を凸関数とする。また, conical EHP が成り立つ, すなわち,

$$\mathrm{cone\,co}\bigcup_{i\in I}\mathrm{epi}g_i^*:\text{閉}$$

とする。このとき, S の任意の点 $\bar{x}$ において BCQ は成り立つ。

これらの定理は $\bar{x}$ に依存しない集合に対する条件を考えることで, より容易に BCQ の成立を調べることができるということを示している。ここで再び例 2.1 を考え, このことを確認する。

$$g_1(x)=x-1,\ g_2(x)=0,\ g_3(x)=-x-1$$

より

$$\begin{aligned}
g_1^*(y)&=\delta_{\{1\}}(y)+1, & \mathrm{epi}g_1^*&=\{(1,\beta)\mid\beta\geq1\}\\
g_2^*(y)&=\delta_{\{0\}}(y), & \mathrm{epi}g_2^*&=\{(0,\beta)\mid\beta\geq0\}\\
g_3^*(y)&=\delta_{\{-1\}}(y)+1, & \mathrm{epi}g_3^*&=\{(-1,\beta)\mid\beta\geq1\}
\end{aligned}$$

このとき,

$$\operatorname{cone}\operatorname{co}\bigcup_{i\in I}\operatorname{epi}g_i^* = \{(x,\alpha) \mid |x| \le \alpha\}$$

は明らかに閉であるのでy, conical EHPが成り立つ。したがって, 定理2.4よりSの任意の点においてBCQが成り立つ。

3　MCVの観察

関数$g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$に対して

$$g = \min\{g_1, g_2, \cdots, g_l\}$$

をみたすような凸関数$g_1, g_2, \cdots, g_l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$が存在するとき, gをMCV(minimum of convex)関数という。この章では, $I = \{1,2,\cdots,m\}$, $J = \{1,2,\cdots,l\}$, $f, g_{i,j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i \in I, j \in J)$を凸関数とし,

$$g_i = \min\{g_{i,1}, g_{i,2}, \cdots, g_{i,l}\}$$

と定められるMCV関数g_iに対して, 制約集合$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \le 0,\ \forall i \in I\}$における次のような最適化問題を考える:

$$\begin{array}{lll}(\mathrm{P}) & \text{minimize} & f(x) \\ & \text{subject to} & x \in S\end{array}$$

また

$$\begin{aligned} K &= \{k : I \to J \mid \exists\, x \in \mathbb{R}^n\ s.t.\ g_{i,k(i)}(x) \le 0,\ \forall i \in I\} \\ S_k &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_{i,k(i)}(x) \le 0,\ \forall i \in I\} \end{aligned}$$

とし, 任意の$k \in K$に対して次の最適化問題を提示する:

$$\begin{array}{lll}(\mathrm{P}_k) & \text{minimize} & f(x) \\ & \text{subject to} & x \in S_k\end{array}$$

定理 3.1 (D. Kuroiwa, K. Ishibashi, [8]**)**

$$\inf_{x\in S} f(x) = \min_{k\in K}\inf_{x\in S_k} f(x)$$

問題(P)は, 有限個の問題(P_k) $(k \in K)$の中で最も小さい値を見つけることで解くことができる。ここで次の例を考える。

例 3.1 $g_{1,1}(x) = \dfrac{1}{2}(|x+1|+|x-1|)-1,\ g_{1,2}(x) = (x+1)^2,\ g_{1,3}(x) = (x-1)^2,\ g_{2,1}(x) = 2x,\ g_{2,2}(x) = -2x+2,\ g_{2,3}(x) = -\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}$とし,

$$g_1 = \min\{g_{1,1},\ g_{1,2},\ g_{1,3}\},\ g_2 = \min\{g_{2,1},\ g_{2,2},\ g_{2,3}\}$$

とする. また, $I = \{1,2\}$, $J = \{1,2,3\}$とし, $i \in I,\ j \in J$に対して

$$k_{(i,j)} : I \to J,\ k_{(i,j)}(1) = i,\ k_{(i,j)}(2) = j$$

とおく。このとき,

$$S = [-1, 0] \cup \{1\},\ K = \{k_{(1,1)}, k_{(1,2)}, k_{(2,1)}, k_{(3,2)}\}$$
$$S_{k_{(1,1)}} = [-1, 0],\ S_{k_{(1,2)}} = \{1\},\ S_{k_{(2,1)}} = \{-1\}, S_{k_{(3,2)}} = \{1\}$$

となる。$k_{(1,1)}$ に対して

$$\operatorname{cone}\operatorname{co}(\operatorname{epi}g_{1,1}^* \cup \operatorname{epi}g_{2,1}^*) = \{(x, \alpha) \mid x < 0,\ \alpha \geq -x\} \cup [0, +\infty)^2$$

$k_{(1,2)}$ に対して

$$\operatorname{cone}\operatorname{co}(\operatorname{epi}g_{1,1}^* \cup \operatorname{epi}g_{2,2}^*) = \{(x, \alpha) \mid \alpha \geq x\}$$

$k_{(2,1)}$ に対して

$$\operatorname{cone}\operatorname{co}(\operatorname{epi}g_{1,2}^* \cup \operatorname{epi}g_{2,1}^*) = \{(x, \alpha) \mid \alpha > -x\}$$

$k_{(3,2)}$ に対して

$$\operatorname{cone}\operatorname{co}(\operatorname{epi}g_{1,3}^* \cup \operatorname{epi}g_{2,2}^*) = \{(x, \alpha) \mid \alpha > x\}$$

である。このことから, $\bar{x} \in S_{k_{(i,j)}}$ $(i \in I, j \in J)$ とすると, $k_{(1,1)}, k_{(1,2)}$ を観察した時にBCQ が成り立たない点はないが, $k_{(2,1)}$ では $\bar{x} = -1$, $k_{(3,2)}$ では $\bar{x} = 1$ において BCQ が成り立たないことが定理 2.3 よりわかる。このとき $k_{(3,2)}$ に注目すると, 定理 2.2 から問題 $(\mathrm{P}_{k_{(3,2)}})$ の解が KKT 条件を満たさないような凸関数 f が存在する。実際, $f(x) = -x$ とし次のような問題を考える:

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{P}_{k_{(3,2)}}) & \text{minimize} & f(x) \\ & \text{subject to} & x \in S_{k_{(3,2)}} \end{array}$$

$\bar{x} = 1$ は $(\mathrm{P}_{k_{(3,2)}})$ の解である。しかし $\partial f(\bar{x}) = \{-1\}$, $\partial g_{1,3}(\bar{x}) = \{0\}$, $\partial g_{2,2}(\bar{x}) = \{-2\}$ より

$$\begin{cases} 0 \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I'} \lambda_i \partial g_{i,k(i)}(\bar{x}) \\ \lambda_i g_{i,k(i)}(\bar{x}) = 0,\ \forall i \in I' \end{cases}$$

をみたす $I' \subseteq I$, $\lambda_i \geq 0$ は存在しない。

参考文献

[1] M. L. Slater. Cowles Commission Discussion Paper No. 403. Lagrange Multipliers (1950).

[2] V. Jeyakumar, A. M. Rubinov, B. M. Glover, Y. Ishizuka. Inequality Systems and Global Optimization. J. Math. Anal. Appl. 202 (1996), no. 3, 900919.

[3] J. M. Borwein, A. S. Lewis. Convex analysis and nonlinear optimization. Theory and examples. Springer, New York (2006).

[4] V. Jeyakumar. Constraint Qualifications Characterizing Lagrangian Duality in Convex Optimization. J. Optim. Theory Appl. 136 (2008), no. 1, 3141.

[5] M. A.Goberna, V. Jeyakumar, M. A. López. Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities. Nonlinear Anal. 68 1184-1194 (2008).

[6] S. Yamomoto. Constraint qualifications and characterizations of solutions in convex optimization, submitted (2016).

[7] D. Kuroiwa, S. Suzuki, S. Yamomoto. Characterizations of the basic constraint qualification and its applications, submitted.

[8] D. Kuroiwa, K. Ishibashi. CQ for MCV system, preprint.