二次凸最適化問題における制約想定の観察

島根大学大学院自然科学研究科 西田覚（Satoru Nishida ）
Graduate School of Natural Science and Technology, Shimane University
島根大学総合理工学部 黒岩大史（Daishi Kuroiwa）
Major in Interdisciplinary Science and Engineering, Shimane University

1 はじめに

本講究録では次のような実数値凸最適化問題に対する [6] における結果を紹介する:

$$\begin{array}{lll}(\mathrm{P}) & \text{minimize} & f(x) \\ & \text{subject to} & g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\end{array}$$

ただし I は任意の空でない添字集合とし，$f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は凸関数とする．特に I が有限集合，関数 g_i が二次凸関数

$$g_i(x) = \frac{1}{2}\langle x, A_i x\rangle + \langle b_i, x\rangle + c_i$$

であるとき制約想定 BCQ(the basic constraint qualification) の成立・不成立について観察する．

2 準備

まずは準備として，関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対して必要な概念を定義する．

$$\mathrm{epi} f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in \mathrm{dom} f, f(x) \leq r\},$$

$$\mathrm{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$$

を f のエピグラフ，f の実行定義域といい，f のエピグラフ $\mathrm{epi} f$ が凸集合のとき，関数 f は凸であるという．関数 f の共役関数を

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, y\rangle - f(x)\}$$

と定義する．$n \times n$ 実対称行列全体の集合を

$$S^n := \{A \mid A : n \times n \text{ 実対称行列 }\}$$

とする．$A \in S^n$ に対して，

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \langle x, Ax\rangle \geq 0$$

をみたすとき，A が半正定値であるといい，半正定値全体の集合を

$$S^n_+ := \{A \in S^n \mid \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \langle x, Ax\rangle \geq 0\}$$

とする．また $A \in S^n$ に対して，

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ \langle x, Ax \rangle > 0$$

をみたすとき，A が正定値であるといい，正定値全体の集合を

$$S^n_{++} := \{A \in S^n \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \langle x, Ax \rangle > 0\}$$

とする．全ての二次関数 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は $A \in S^n$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ を用いて

$$g(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle + c$$

と表される．また，

$$g(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle + c \text{ が凸関数} \iff A \in S^n_{+}$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle + c \text{ が狭義凸関数} \iff A \in S^n_{++}$$

ということがよく知られている．

定理 2.1. ([6]) 関数 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$g(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle + c$$

とする．ただし $A \in S^n_{+}, b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ とする．このとき，関数 g の共役関数は

$$g^*(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left\langle y - b, A^{-1}(y - b) \right\rangle - c, & y \in R(A) + b \\ +\infty, & y \notin R(A) + b \end{cases}$$

である．ただし， $A^{-1}(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = y\}$，$R(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ とする．

系 2.1. 関数 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$g(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle + c$$

とする．ただし $A \in S^n_{++}, b \in \mathbb{R}^n$， $c \in \mathbb{R}$ とする．このとき，関数 g の共役関数は

$$g^*(y) = \frac{1}{2} \left\langle y - b, A^{-1}(y - b) \right\rangle - c$$

である．

ここで本研究に関連する先行研究を紹介する．

定理 2.2 (Kuroiwa, Suzuki, Yamamoto, [5])**.** I を任意の集合，$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$ を凸関数とし，$\bar{x} \in S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$ と仮定する．このとき次の二つは同値である:

(1) $\bar{x}$ において BCQ が成り立つ．すなわち，

$$N_S(\bar{x}) = \operatorname{cone}\operatorname{co} \bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial g_i(\bar{x})$$

ただし，$N_S(\bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, y - \bar{x} \rangle \leq 0,\ \forall y \in S\}$,
$\operatorname{cone}\operatorname{co} A = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \ \middle|\ m \in \mathbb{N},\ a_i \in A,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}$,
$I(\bar{x}) = \{i \in I \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$

(2) 次の等式が成り立つ:

$$\{v \in \mathbb{R}^n \mid (v, \langle v, \bar{x} \rangle) \in \operatorname{cl}\operatorname{cone}\operatorname{co} \bigcup_{i \in I} \operatorname{epi} g_i^*\} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (v, \langle v, \bar{x} \rangle) \in \operatorname{cone}\operatorname{co} \bigcup_{i \in I} \operatorname{epi} g_i^*\}$$

定理 2.3. I を有限集合，$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$ を凸関数とし，$\bar{x} \in S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$ と仮定するまた，Slater 条件

$$\exists \hat{x} \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } g_i(\hat{x}) < 0,\ \forall i \in I$$

が成り立つとする．このとき $\bar{x}$ において BCQ が成り立つ.

3　主結果

この章では次の実数値凸最適化問題を考察する:

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{minimize} & f(x) \\ & \text{subject to} & g_i(x) \leq 0, \forall i \in I \end{array}$$

ただし I は有限集合，$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$ を

$$g_i(x) = \frac{1}{2} \langle x, A_i x \rangle + \langle b_i, x \rangle + c_i$$

で定義される二次凸関数とし，$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$ を空でないとする．このとき BCQ の成立・不成立を観察するため，次の二つの場合に分けて考える.

(1) $\max_{i \in I} g_i \not\geq 0$

(2) $\max_{i \in I} g_i \geq 0$

定理 3.1 (Kuroiwa, Nishida [6]). もし

$$\max_{i \in I} g_i \not\geq 0$$

ならば任意の S の元において BCQ が成り立つ.

証明.

$$\max_{i\in I} g_i \ngeq 0 \iff \exists x_0 \text{ s.t. } \max_{i\in I} g_i(x_0) < 0$$
$$\iff \exists x_0 \text{ s.t. } g_i(x_0) < 0,\ \forall i \in I$$

□

となり，定理 2.3 より任意の S の元において BCQ が成り立つ．

このように (1) の場合は定理 3.1 より常に BCQ が成り立つことが分かるが，(2) の場合は単純ではない．この場合をもう少し詳しく観察していく．ここで $I_0 = \{i \in I \mid g_i \geq 0\}$ とおく．

定理 3.2 (Kuroiwa, Nishida [6])**.** $\max_{i\in I} g_i \geq 0$ かつ $I_0 \neq \emptyset$ とする．$\bar{x} \in S$ に対して，もし

$$\text{(1)} \quad \sum_{i\in I_0} R(A_i) = \sum_{i\in I\setminus I_0} R(A_i)$$

$$\text{(2)} \quad \exists\{\bar{y_j}|\ j \in I\setminus I_0\} \subseteq \sum_{i\in I_0} R(A_i),\ \exists r > 0 \text{ s.t.}$$

$$\begin{cases} \langle \bar{y_j}, \bar{x}\rangle = g_j^*(\bar{y_j}),\ \forall j \in I\setminus I_0 \\ B(0,r) \cap \sum_{i\in I_0} R(A_i) \subseteq \operatorname{co}\{\bar{y_j}|\ j \in I\setminus I_0\} \end{cases}$$

ならば $\bar{x}$ において BCQ が成り立つ．ただし $\sum_{j\in J} R(A_j) = \left\{ \sum_{j\in J} m_j \,\middle|\, m_j \in M_j,\ j \in J \right\}$ であり，$\sum \emptyset = \{0\}$ とする．

例 3.1. $I = \{1,2,3\}$ とし，$g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$g_1(x_1,x_2) = x_1^2,\ g_2(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1,\ g_3(x_1,x_2) = x_1^2 - x_1$$

とする．このとき

$$S = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 \leq 0,\ x_1^2 + x_1 \leq 0,\ x_1^2 - x_1 \leq 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}$$

$$\max_{i\in\{1,2,3\}} g_i(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1(x_1-1), & x_1 \leq 0, x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1(x_1+1), & x_1 > 0, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

より $\max_{i\in\{1,2,3\}} g_i \geq 0$ をみたし，$g_1(x_1,x_2) = x_1^2 \geq 0$ である．g_i の共役関数は定理 2.1 から

$$g_1^*(y_1,y_2) = \begin{cases} \frac{1}{4}y_1^2, & y_1 \in \mathbb{R}, y_2 = 0 \\ +\infty, & y_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$g_2^*(y_1,y_2) = \begin{cases} \frac{1}{4}(y_1-1)^2, & y_1 \in \mathbb{R}, y_2 = 0 \\ +\infty, & y_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$g_3^*(y_1,y_2) = \begin{cases} \frac{1}{4}(y_1+1)^2, & y_1 \in \mathbb{R}, y_2 = 0 \\ +\infty, & y_2 \neq 0 \end{cases}$$

より，$I_0 = \{1\},\ |I \backslash I_0| = 2$ である．明らかに $A_1 = A_2 = A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるので $R(A_1) = R(A_2) + R(A_3) = \mathbb{R} \times \{0\}$ となる．ここで $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in S$ とすると，$\bar{x}_1 = 0$ である．

$$\bar{y}_2 = (1, 0),\ \bar{y}_3 = (-1, 0),\ r = \frac{1}{2}$$

とおくと，

$$\langle \bar{y}_2, \bar{x} \rangle = 0,\ g_2^*(\bar{y}_2) = 0,\ \langle \bar{y}_3, \bar{x} \rangle = 0,\ g_3^*(\bar{y}_3) = 0$$

$$B\left((0,0), \frac{1}{2}\right) \cap R(A_1) \subseteq \mathrm{co}\left\{\left(\frac{-1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right)\right\} \subseteq \mathrm{co}\,\{(-1,0),(1,0)\} = \mathrm{co}\,\{\bar{y}_2, \bar{y}_3\}$$

となるので定理 3.2 より $\bar{x}$ において BCQ が成り立つ．

定理 3.3 (Kuroiwa, Nishida [6])**.** $\max_{i \in I} g_i \geq 0$ かつ $I_0 \neq \emptyset$ とする．もし，

$$|I \backslash I_0| \leq \dim \sum_{i \in I_0} R(A_i)$$

ならば全ての S の元において BCQ は不成立である．

例 3.2. $I = \{1, 2\}$ とし，$g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$g_1(x_1, x_2) = x_1^2,\ g_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1$$

とする．このとき

$$I_0 = \{1\},\ |I \backslash I_0| = 1$$

かつ

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 \leq 0,\ x_1^2 - x_1 \leq 0\} = \{0\} \times \mathbb{R},\ A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるので

$$R(A_1) = \mathbb{R} \times \{0\}$$

より，$\dim R(A_1) = 1$ となるので定理 3.3 より任意の S の元において BCQ が成り立たない．

定理 3.4 (Kuroiwa, Nishida [6])**.** $\max_{i \in I} g_i \geq 0$ かつ $I_0 = \emptyset$ とする．もし，

$$\exists a \in S\ s.t.\ g_i^* > \langle a, \cdot \rangle,\ \forall i \in I$$

ならば BCQ が成り立つ．

参考文献

[1] V. Jeyakumar, A. M. Rubinov, B. M. Glover, Y. Ishizuka. Inequality Systems and Global Optimization.J. Math. Anal. Appl. 202 (1996), no. 3, 900919.

[2] J. M. Borwein, A. S. Lewis. Convex analysis and nonlinear optimization. Theory and examples. Springer, New York (2006).

[3] V. Jeyakumar. Constraint Qualifications Characterizing Lagrangian Duality in Convex Optimization. J. Optim. Theory Appl. 136 (2008), no. 1, 3141.

[4] M. A.Goberna, V. Jeyakumar, M. A. López. Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities. Nonlinear Anal. 68 1184-1194 (2008)

[5] D. Kuroiwa, S. Suzuki, Y. Yamamoto. Characterizations of the basic constraint qualification and its applications, submitted.

[6] D. Kuroiwa, S. Nishida. Observation on constraint qualifications in a class of convex optimization, preprint.