

# Ordering of reference vectors in self-organizing maps with dot product type learning process

## 点乗積型学習写像をもつ自己組織化マップの整列化について

星野満博<sup>1</sup>, 高橋勇人<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 秋田県立大学システム科学技術学部

<sup>2</sup> 秋田県立大学大学院システム科学技術研究科

Mitsuhiro Hoshino<sup>1</sup> and Hayato Takahashi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Faculty of Systems Science and Technology,

Akita Prefectural University

<sup>2</sup>Graduate School of Systems Science and Technolog,

Akita Prefectural University

### 1. 点乗積型学習写像を有する自己組織化マップモデル

本報告は Kohonen 型アルゴリズム [5] として知られている自己組織化マップの学習プロセスとしての数理モデルについて扱う。応用的観点では、自己組織化マップ・アルゴリズムは、クラスタリング、2次元可視化等の特性により広範囲な領域において、分析ツールとして利用されている。

自己組織化マップの学習プロセスにおいて、各ノードからノード値への写像としてのモデル関数の学習過程下におけるふるまいについて論ずる。多くの応用において用いられている凸結合型学習写像をもつ自己組織化マップにおける数学的性質については、基本的かつ比較的単純な構造をもつ場合において議論がなされている ([1] 等, 参照)。本報告では、点乗積型学習写像をもつ自己組織化マップを扱い、学習過程におけるモデル関数の推移について考察する。

本報告で扱う点乗積型学習写像をもつ自己組織化マップモデルはノード、ノードの値、インプット、学習プロセスの4つの要素によって、以下の様に特徴付けできる。

$$(\{1, 2, \dots, N\}, V \subset \mathbb{R}^n, \{x_k\}_{k=0}^{\infty}, \{m_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty})$$

- (i)  $I$  をすべてのノードから成る集合とする。  $I$  は有限で距離付けされた要素から成るものと仮定する。

$$I = \{1, 2, \dots, N\} \subset \mathbb{N}$$

$$d(i, j) = |i - j|$$

とする。

- (ii) 各ノードは、それぞれ1つの値をもつ。ノードの値全体から成る集合を  $V$  とし、ここでは、 $V \subset \mathbb{R}^n$  の場合を扱う。ノードとノード値との対応として定義される関数  $m : I \rightarrow V$  をモデル関数と呼ぶ。また、

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

に対して、点乗積  $\langle a, b \rangle$  を

$$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

によって定義する。

- (iii)  $X \subset V$  を入力集合とし、入力列  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset X$  を考える。  
 (iv) 学習プロセスは次のように定義される。与えられた初期モデル関数  $m_0$  と入力列  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  に対して、モデル関数の列  $\{m_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$  は以下のように定義される。

- (a) 学習範囲: 各  $m_k, x_k$  に対して

$$I(m_k, x_k) = \left\{ i^* \in I \mid i^* = \operatorname{argmax}_{i \in I} \langle m_k(i), x_k \rangle \right\}, \quad (1)$$

$$N_1(i) = \{j \in I \mid |j - i| \leq 1\} \quad (i \in I). \quad (2)$$

- (b) 学習率:  $\alpha > 0$ .

- (c) 更新後の値:

$$m_{k+1}(i) = \begin{cases} \frac{m_k(i) + \alpha x_k}{\|m_k(i) + \alpha x_k\|} & (i \in \bigcup_{i^* \in I(m_k, x_k)} N_1(i^*) \text{ のとき}) \\ m_k(i) & (i \notin \bigcup_{i^* \in I(m_k, x_k)} N_1(i^*) \text{ のとき}) \end{cases} \quad (3)$$

## 2. 基本 SOM における状態クラスの保存性

第1節で導入した点乗積型学習写像をもつ自己組織化マップに対して、以下で定義される凸結合型学習写像をもつ自己組織化マップ（基本 SOM）においては、学習プロセス下でモデル関数について、状態保存性に関する幾つかの特性があることが知られている。特に、1次元入力型に関しては、最も基本的であり、以下の性質が知られている。

**定理 1** 1次元入力型自己組織化マップ

$$(\{1, 2, \dots, N\}, V \subset \mathbb{R}, \{x_k\}_{k=0}^{\infty}, \{m_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty})$$

において、次の学習プロセスを仮定する。

学習プロセス  $L_A$  (1次元配列,  $\mathbb{R}$ -値ノード)

(a) 学習範囲: 各  $m_k, x_k$  に対して

$$I(m_k, x_k) = \left\{ i^* \in I \mid i^* = \underset{i \in I}{\operatorname{argmin}} |m_k(i) - x_k| \right\},$$

$$N_1(i) = \{j \in I \mid |j - i| \leq 1\} \quad (i \in I)$$

とする.

(b) 学習率:  $0 < \alpha < 1$ .

(c) 更新後の値: 各  $k = 0, 1, 2, \dots$  に対して,  $m_{k+1}$  を次のように定義する.

$$m_{k+1}(i) = \begin{cases} (1 - \alpha)m_k(i) + \alpha x_k & (i \in \bigcup_{i^* \in I(m_k, x_k)} N_1(i^*) \text{ のとき}) \\ m_k(i) & (i \notin \bigcup_{i^* \in I(m_k, x_k)} N_1(i^*) \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, モデル関数  $m_k$  と入力  $x$  による  $m_k$  の更新後のモデル関数  $m_{k+1}$  に対して, 以下の性質が成り立つ.

(i) 任意の  $x$  に対して,

$$m_k(i) \leq m_k(i + 1), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

であるならば,

$$m_{k+1}(i) \leq m_{k+1}(i + 1), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

(ii) 任意の  $x$  に対して,

$$m_k(i) \geq m_k(i + 1), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

であるならば,

$$m_{k+1}(i) \geq m_{k+1}(i + 1), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

(iii) 任意の  $x$  に対して,

$$m_k(i) < m_k(i + 1), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

であるならば,

$$m_{k+1}(i) < m_{k+1}(i + 1), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

(iv) 任意の  $x$  に対して,

$$m_k(i) > m_k(i + 1), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

であるならば,

$$m_{k+1}(i) > m_{k+1}(i + 1), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

凸結合型学習写像をもつ1次元入力自己組織化マップにおいては, モデル関数の更新の前後において単調性が保存されるが, 同様にモデル関数が一度その状態になると, その状態が保存されるという場合, このような状態のクラスを自己組織化マップの学習プロセスにおける閉じた状態クラスと呼ぶ. 閉状態クラスやそれに準ずるクラスの存在性および性質については, [2] 等で言及されている.

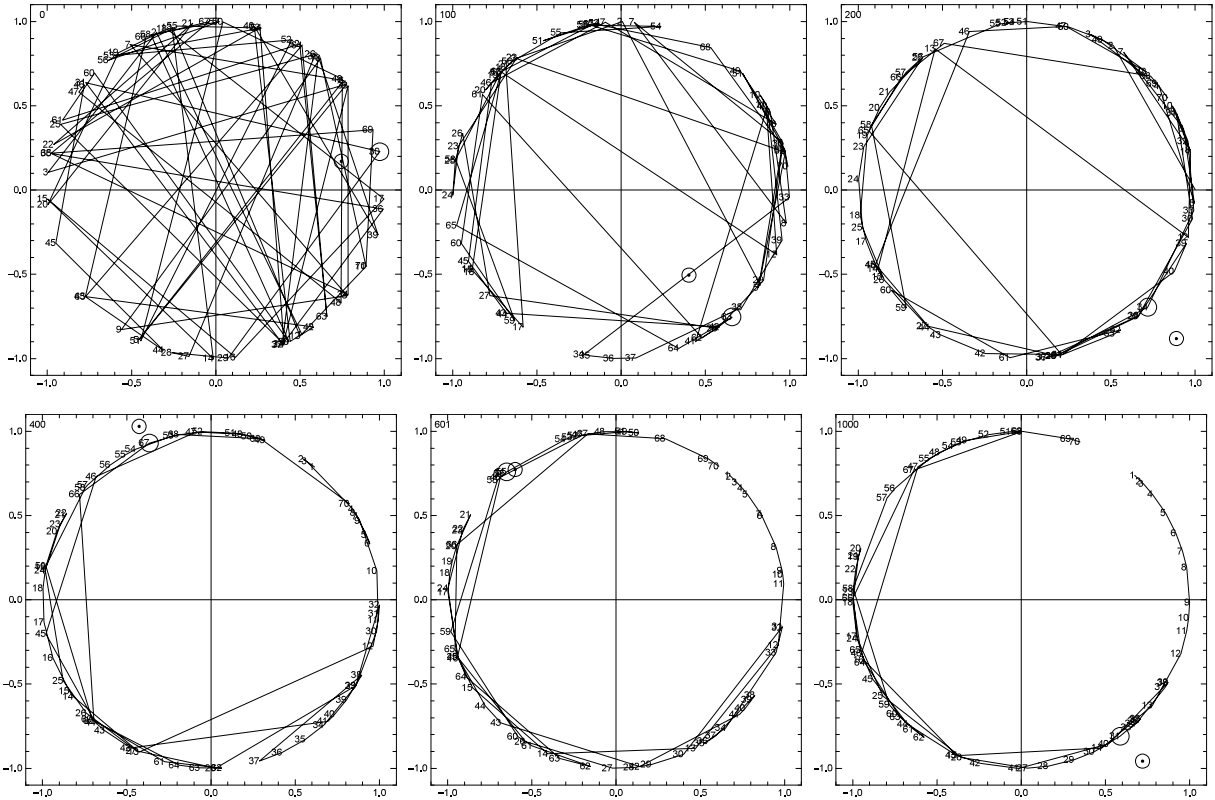


図 1:  $m_k$  の推移：各図の左上の数字は更新回数である。

3. 点乗積型学習写像をもつ場合におけるモデル関数の局所的な挙動について  
点乗積型学習写像による自己組織化マップの例を与える。

**数値計算 1** 第 1 節の学習プロセス (iv)(1)(2)(3) を用いた点乗積型学習写像をもつ 70 ノード, 2次元入力自己組織化マップ

$$(\{1, 2, \dots, 70\}, V \subset \mathbb{R}^2, \{x_k\}_{k=0}^{\infty}, \{m_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty})$$

を考える。各ノードに対する初期値  $m_0(i)$  を

$$m_0(i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 70$$

とし,  $\theta_i$  は  $[0, 2\pi]$  上の一様分布より生成する。また, 入力  $x$  は  $[-1.05, 1.05] \times [-1.05, 1.05]$  上の一様分布より生成する。内積として点乗積を用いる。図 1 は, 1000 回の更新による  $m_k$  の推移である。学習が進むと徐々に整列化することが観測できる。□

点乗積型学習写像をもつ場合において, 学習による更新の前後におけるモデル関数の挙動に注目する。この議論の一部として, 特別な状況下におけるモデル関数の性質を与える

次の結果が得られた。以下では、ノード値の集合を  $\mathbb{R}^n$  内に限定せず、内積空間の場合を仮定する。モデル関数の整列化形成の局所的な挙動に関するひとつの視点が得られる。

**定理 2** 内積型学習写像をもつ自己組織化マップ

$$(\{1, 2, \dots, N\}, V, \{x_k\}_{k=0}^{\infty}, \{m_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty})$$

を考える。ここで、 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  を内積空間と仮定する。第1節の学習プロセス (iv)(1)(2)(3) を用いる。ある回数の更新後のモデル関数  $m$  に対して、入力  $x$  からの学習による  $m$  の更新後のモデル関数を  $m'$  とする。このとき、以下が成り立つ。

$m, x, \alpha$  に対して

$$\|m(i)\| = \|m(i+1)\| = \|m(i+2)\| = 1, \quad (4)$$

$$\langle m(i), x \rangle < \langle m(i+1), x \rangle, \quad (5)$$

$$\langle m(i+2), x \rangle < \langle m(i+1), x \rangle, \quad (6)$$

$$\langle m(i) - m(i+1), m(i+2) - m(i+1) \rangle \leq 0 \quad (7)$$

であるならば

$$\langle m'(i) - m'(i+1), m'(i+2) - m'(i+1) \rangle \leq 0 \quad (8)$$

が成り立つ。

証明 任意の  $\alpha > 0$  と (5), (6) を満たす入力  $x$  に対して、(7) により

$$\begin{aligned} & \langle m'(i) - m'(i+1), m'(i+2) - m'(i+1) \rangle \\ &= \left\langle \frac{m(i) + \alpha x}{\|m(i) + \alpha x\|} - \frac{m(i+1) + \alpha x}{\|m(i+1) + \alpha x\|}, \frac{m(i+2) + \alpha x}{\|m(i+2) + \alpha x\|} - \frac{m(i+1) + \alpha x}{\|m(i+1) + \alpha x\|} \right\rangle \\ &\leq -\frac{1}{2\|m(i) + \alpha x\| \|m(i+1) + \alpha x\| \|m(i+2) + \alpha x\|} \\ &\quad \times \left\{ \|m(i) - m(i+1)\|^2 (\|m(i+1) + \alpha x\| - \|m(i+2) + \alpha x\|) \right. \\ &\quad + \|m(i+2) - m(i+1)\|^2 (\|m(i+1) + \alpha x\| - \|m(i) + \alpha x\|) \\ &\quad \left. + (\|m(i+1) + \alpha x\| - \|m(i) + \alpha x\|) (\|m(i+1) + \alpha x\| - \|m(i+2) + \alpha x\|) \right. \\ &\quad \left. \times (\|m(i) + \alpha x\| + \|m(i+2) + \alpha x\|) \right\} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、(8) が成り立つ。  $\square$

#### 参考文献

- [1] M. Cottrell, M. Olteanu, F. Rossi and N. Villa-Vialaneix, *Theoretical and applied aspects of the self-organizing maps*, Proceedings of the 11th international workshop WSOM 2016, pp. 3–26.

- [2] M. Hoshino and Y. Kimura, *Ordered states and probabilistic behavior of self-organizing maps*, proceedings of Asian conferece on nonlinear analysis and optimization 2008, pp. 31–44.
- [3] M. Hoshino, *On state preserving property and nonexpansivity in self-organizing maps*, J. Nonlinear Convex Anal. Vol. 16 Num. 11 (2015) pp. 2255–2261.
- [4] M. Hoshino, *Local behavior of node with extreme value of model function in learning processes of basic self-organizing maps*, Linear and Nonlinear Anal., Vol. 6, Num. 1 (2020) pp. 65–72.
- [5] T. Kohonen, *Self-Organizing Maps, Third Edition*, Springer, 2001.