# 強擬非拡大性をもつ写像列

千葉大学・社会科学研究院 青山耕治
Koji Aoyama
Graduate School of Social Sciences,
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47H10, 41A65.
*Keywords and phrases.* 強擬非拡大性, 強擬非拡大写像, 共通不動点。

## 1 はじめに

不動点理論の研究において, 強非拡大性をもつ写像が重要な役割を演ずることがある。強非拡大性をもつ写像は, Bruck と Reich [26] が導入した強非拡大 (strongly nonexpansive) 写像に始まり, その後, 様々な研究成果が報告されている。例えば, Reich [30] は, 漸近的不動点 (第 2 節参照) および Bregman 距離で表される写像を扱った。また, 著者ら [20–22] は, 滑らかな Banach 空間 $E$ でノルムではなく 2 変数関数

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2$$

で表される写像を扱った (ここで, $J$ は $E$ の双対写像である)。この他に, 強非拡大性をもつ写像を扱った文献としては, [6, 16, 17, 19, 29, 32, 34, 37] がある。

また, 不動点近似理論においては, 強非拡大性をもつ写像だけでなく, 強非拡大性をもつ写像列に注目することにより, 見通しよく問題解決できることがある。このような立場から, 強非拡大性をもつ写像列を扱った文献としては, [3, 7, 9, 12–15, 21, 23, 24, 31, 33, 35, 36] などがある。

本稿では, 強非拡大性をもつ Banach 空間上の擬非拡大写像の列に関する研究成果 [21] について解説する。ただし, すべての結果を Hilbert 空間に限定した形で紹介する。

## 2 準備

本稿では, $H$ を実 Hilbert 空間, $\|\cdot\|$ を $H$ のノルム, $I$ を $H$ 上の恒等写像, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合とする。$H$ の点列 $\{x_n\}$ が $z$ に強収束するとき $x_n \to z$, 弱収束するとき $x_n \rightharpoonup z$ と表す。

$D$ を $H$ の空でない閉凸部分集合とする。$H$ から $D$ の上への距離射影 (metric projection) を $P_D$ と表す。つまり, $x \in H$ のとき, $P_D(x)$ は

$$\|x - P_D(x)\| = \min\{\|x - y\| : y \in D\}$$

を満たす唯一の $D$ の点である。$x \in H$, $z \in D$ のとき,

$$\|x - P_D(x)\|^2 \leq \|x - z\|^2 - \|P_D(x) - z\|^2 \tag{2.1}$$

が成り立つことが知られている [38]。

$C$ を $H$ の空でない部分集合, $T$ を $C$ から $H$ への写像とする。写像 $T$ の不動点の集合を $\mathrm{F}(T)$ と表す。つまり, $\mathrm{F}(T) = \{z \in C \colon z = Tz\}$ である。写像 $T$ が擬非拡大 (quasinonexpansive) であるとは, $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$, かつ, すべての $x \in C$ と $p \in \mathrm{F}(T)$ に対して $\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$ が成り立つときをいう。(2.1) より, $H$ 上の距離射影は擬非拡大であることがわかる。写像 $T$ が狭義擬非拡大 (strictly quasinonexpansive) であるとは, $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$, かつ, すべての $x \in C \setminus \mathrm{F}(T)$ と $p \in \mathrm{F}(T)$ に対して $\|Tx - p\| < \|x - p\|$ が成り立つときをいう。写像 $T$ が強擬非拡大 (strongly quasinonexpansive) であるとは, 次の 2 条件が成り立つときをいう [6, 8, 12, 15, 16, 20–22, 25, 30]。

- $T$ が擬非拡大であり,
- $\{x_n\}$ が $C$ の有界点列, $p \in \mathrm{F}(T)$, $\|x_n - p\| - \|Tx_n - p\| \to 0$ ならば, $x_n - Tx_n \to 0$ である。

定義より, 強擬非拡大写像は狭義擬非拡大であり, 狭義擬非拡大写像は擬非拡大であることがわかる。また, 擬非拡大写像の不動点集合は閉凸であることが知られている [28, Theorem 1]。

**註 1.** 文献 [12, 15, 20, 21] で扱った Banach 空間上の (sr) 型写像を Hilbert 空間に限定すると, 本節の強擬非拡大写像となる [16, Remark 2.5]。

擬非拡大写像の合成の不動点集合について次のことが知られている [6, Lemma 3.5]。

**補助定理 2.1.** $C$ および $D$ を $H$ の空でない部分集合, $S \colon C \to H$ および $T \colon D \to H$ を擬非拡大写像とし, $T(D) \subset C$, $\mathrm{F}(S) \cap \mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ であり, さらに, $S$ または $T$ のどちらかが狭義擬非拡大であるとする。このとき, $\mathrm{F}(S) \cap \mathrm{F}(T) = \mathrm{F}(ST)$ であり, $ST$ は擬非拡大である。

**註 2.** 距離空間 (または一般化された距離空間) 上の擬非拡大写像についても, 補助定理 2.1 と同様な結果が知られている。例えば, [20, Lemma 3.2, Theorem 3.4], [25, Theorems

4.9, 5.5] および [18, Lemma 4.4] を参照されたい。また, Hilbert 空間または Banach 空間上の非拡大写像については, [26, Lemma 2.1], [13, Corollary 3.9] および [14, Corollary 3.6] などが知られている。

強擬非拡大写像は合成において閉じていることが知られている [20, Lemma 3.3]。

**補助定理 2.2.** $C$ および $D$ を $H$ の空でない部分集合, $S\colon C \to H$ および $T\colon D \to H$ を強擬非拡大写像とし, $T(D) \subset C$, $\mathrm{F}(S) \cap \mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ であるとする。このとき, $ST$ も強擬非拡大である。

**註 3.** 距離空間 (または一般化された距離空間) 上の強擬非拡大写像についても, 補助定理 2.2 と同様な結果が知られている。例えば, [20, Lemma 3.3, Theorem 3.4], [6, Theorem 3.6], [25, Theorems 4.9, 5.5] および [18, Theorems 3.8, 4.5] を参照されたい。また, これらの先行研究として, Banach 空間上の強非拡大写像に関する結果 [26, Proposition 1.1] が知られている。

[27, Lemma 3] の証明と同様にして次の補助定理が得られる。

**補助定理 2.3.** $C$ を $H$ の空でない部分集合, $S\colon C \to H$ および $T\colon C \to H$ を擬非拡大写像, $\lambda \in (0,1)$ とし, 写像 $U\colon C \to H$ を $U = \lambda S + (1-\lambda)T$ で定義し, $\mathrm{F}(S) \cap \mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ を仮定する。このとき, $\mathrm{F}(U) = \mathrm{F}(S) \cap \mathrm{F}(T)$ であり, $U$ は擬非拡大である。

**註 4.** より一般的な仮定のもとで, 補助定理 2.3 と同じ結論が得られることが知られている。詳しくは, [6, Lemma 4.2], [14, Corollary 3.13] および [20, Lemma 3.5] を参照されたい。

強擬非拡大写像と擬非拡大写像の凸結合に関して, 次の結果が知られている [20, Theorem 3.7]。

**補助定理 2.4.** $C$ を $H$ の空でない部分集合, $S\colon C \to H$ を強擬非拡大写像, $T\colon C \to H$ を擬非拡大写像, $\lambda \in (0,1)$ とし, 写像 $U\colon C \to H$ を $U = \lambda S + (1-\lambda)T$ で定義し, $\mathrm{F}(S) \cap \mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ を仮定する。このとき, $\mathrm{F}(U) = \mathrm{F}(S) \cap \mathrm{F}(T)$ であり, $U$ は強擬非拡大である。

**註 5.** より一般的な仮定のもとで, 補助定理 2.4 と同じ結論が得られることが知られている。詳しくは, [22, Theorem 3.3] および [6, Theorem 4.3] を参照されたい。また, これらの先行研究として, Banach 空間上の強非拡大写像に関する結果 [26, Proposition 1.3] が

知られている。

$C$ を $H$ の空でない部分集合, $T$ を $C$ から $H$ への写像とする。点 $z \in C$ が $T$ の漸近的不動点 (asymptotic fixed point) であるとは, $C$ の点列 $\{x_n\}$ が存在して, $x_n - Tx_n \to 0$ および $x_n \rightharpoonup z$ が成り立つときをいう [30]。写像 $T$ の漸近的不動点の集合を $\hat{\mathrm{F}}(T)$ と表す。定義より, $\mathrm{F}(T) \subset \hat{\mathrm{F}}(T)$ が成り立つことがわかる。

**註 6.** 文献 [30] における漸近的不動点の定義は, 上記と少し異なる.

漸近的不動点について次の結果が知られている [20, Theorem 3.4]。

**補助定理 2.5.** $C$ および $D$ を $H$ の空でない部分集合, $S\colon C \to H$ および $T\colon D \to H$ を擬非拡大写像とし, $T(D) \subset C$, $\mathrm{F}(S) \cap \mathrm{F}(T) \neq \emptyset$, $\hat{\mathrm{F}}(S) = \mathrm{F}(S)$, $\hat{\mathrm{F}}(T) = \mathrm{F}(T)$ であり, さらに, $S$ または $T$ が強擬非拡大であるとする。このとき, $\hat{\mathrm{F}}(ST) = \mathrm{F}(ST) = \mathrm{F}(S) \cap \mathrm{F}(T)$ が成り立つ。

**註 7.** 補助定理 2.5 に関連する結果として, [30, Lemma 1] および [18, Lemma 4.4] などがある。

$C$ を $H$ の空でない部分集合, $\{T_n\}$ を $C$ から $H$ への写像の列, $F = \bigcap_n \mathrm{F}(T_n)$ とし, $F$ は空ではないと仮定する。点 $z \in C$ が $\{T_n\}$ の漸近的不動点 (asymptotic fixed point) であるとは, $C$ の点列 $\{x_n\}$ と $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ が存在し, $x_n - T_n x_n \to 0$ および $x_{n_i} \rightharpoonup z$ が成り立つときをいう [3]。$\{T_n\}$ の漸近的不動点の集合を $\hat{\mathrm{F}}(\{T_n\})$ と表す。定義より, $F \subset \hat{\mathrm{F}}(\{T_n\})$ が成り立つことがわかる。写像列 $\{T_n\}$ が条件 (Z) を満たすとは, 以下の条件が成り立つときをいう [1–5, 9–12, 15, 16, 19, 21]。

> $\{x_n\}$ が $C$ の有界点列で $x_n - T_n x_n \to 0$ ならば, $\{x_n\}$ のすべての弱収積点は $F$ に属する。

条件 (Z) を満たす写像列の例については, [21], [16, Example 4.5] および [9, 13] を参照されたい。

写像列の漸近的不動点について, 次のことが知られている [3, Proposition 6]。

**補助定理 2.6.** $C$ を $H$ の空でない閉凸部分集合, $\{T_n\}$ を $C$ から $H$ への写像の列, $F = \bigcap_n \mathrm{F}(T_n)$ とし, $F$ は空ではないと仮定する。このとき, 以下が成り立つ。

(1) $z \in \hat{\mathrm{F}}(\{T_n\})$ ならば, $C$ の<u>有界</u>点列 $\{x_n\}$ と $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ が存在し, $x_n - T_n x_n \to 0$ および $x_{n_i} \rightharpoonup z$ が成り立つ。

(2) $F = \hat{\mathrm{F}}(\{T_n\})$ であることと, $\{T_n\}$ が条件 (Z) を満たすことは同値である。

**註 8.** 補助定理 2.6 (1) は, [3, Proposition 6] の証明の中で示されている。これについては, 文献 [39] も参照されたい。

# 3　強擬非拡大性をもつ写像列

この節では, 強擬非拡大性をもつ写像列の定義およびその基本性質を述べる。以下簡単のため, すべての結果を Hilbert 空間上の写像 (列) に限定して説明するが, 一部のものについては, Banach 空間や距離空間のもとで同様な結論を導くことができる。

$H$ を Hilbert 空間, $C$ を $H$ の空でない部分集合, $\{S_n\}$ を $C$ から $H$ への写像の列, $F = \bigcap_n \mathrm{F}(S_n)$ とし, $F$ は空ではないと仮定する。このとき, $\{S_n\}$ が**強擬非拡大型** (*strongly quasinonexpansive type*) または**強擬非拡大列**であるとは, 次の 2 条件が成り立つときをいう [3, 7, 8, 12, 15, 16, 21, 35, 36]。

- 各 $S_n$ が擬非拡大であり,
- $\{x_n\}$ が $C$ の有界点列, $p \in F$, $\|x_n - p\| - \|T_n x_n - p\| \to 0$ ならば, $x_n - T_n x_n \to 0$ である。

**例 3.1.** $S\colon C \to H$ を強擬非拡大写像とし, $S_n \equiv S$ とする. このとき, $\{S_n\}$ は強擬非拡大型である。

**例 3.2.** $\{C_n\}$ を $H$ の閉凸部分集合の列とし, $\bigcap_n C_n \neq \emptyset$ とする. このとき, 距離射影の列 $\{P_{C_n}\}$ は強擬非拡大型である。実際, $p \in \bigcap_n \mathrm{F}(P_{C_n}) = \bigcap_n C_n$, $\{x_n\}$ を $H$ の有界点列とし, $\|p - x_n\| - \|p - P_{C_n} x_n\| \to 0$ を仮定するとき, (2.1) と $P_{C_n}$ が擬非拡大であることより,

$$\begin{aligned}
\|P_{C_n}(x_n) - x_n\|^2 &= \|x_n - p\|^2 - \|P_{C_n}(x_n) - p\|^2 \\
&= \big(\|x_n - p\| + \|P_{C_n}(x_n) - p\|\big)\big(\|x_n - p\| - \|P_{C_n}(x_n) - p\|\big) \\
&\leq 2\,\|x_n - p\|\,\big(\|x_n - p\| - \|P_{C_n}(x_n) - p\|\big) \to 0
\end{aligned}$$

である。

この他の強擬非拡大列の例については, [21], [16, Example 4.5] および [9, 13] を参照されたい。

**註 9.** 文献 [3, 12, 15, 21] で扱った Banach 空間上の写像列 “strongly relatively nonexpansive sequence" を Hilbert 空間に限定すると, 本節の強擬非拡大型となる [16, Remark 2.5]。

共通不動点をもつ二つの強擬非拡大写像の合成は強擬非拡大であるが (補助定理 2.2), 強擬非拡大列もそれと似た性質をもつ。

**定理 3.3.** *$C$ と $D$ を Hilbert 空間 $H$ の空でない部分集合, $\{S_n\}$ を $C$ から $H$ への写像の列, $\{T_n\}$ を $D$ から $H$ への写像の列とし, $F = \bigcap_n \mathrm{F}(S_n) \cap \bigcap_n \mathrm{F}(T_n) \neq \emptyset$, $\{S_n\}$ および $\{T_n\}$ は強擬非拡大型であり, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $T_n(D) \subset C$ であり, $S_n$ または $T_n$ は狭義擬非拡大であるとする。このとき, $\{S_n T_n\}$ は強擬非拡大型である。*

**証明**. 補助定理 2.1 より, $\mathrm{F}(S_n T_n) = \mathrm{F}(S_n) \cap \mathrm{F}(T_n)$ であり, $S_n T_n$ は擬非拡大である。よって,

$$\bigcap_n \mathrm{F}(S_n T_n) = \bigcap_n \bigl(\mathrm{F}(S_n) \cap \mathrm{F}(T_n)\bigr) = F \neq \emptyset$$

であることがわかる。いま, $\{x_n\}$ を $D$ の有界点列, $p \in \bigcap_n \mathrm{F}(S_n T_n)$,

$$\|x_n - p\| - \|S_n T_n x_n - p\| \to 0$$

とする。補助定理 2.1 より, $p \in \mathrm{F}(S_n T_n) = \mathrm{F}(S_n) \cap \mathrm{F}(T_n)$ であり, $S_n$ と $T_n$ は擬非拡大だから,

$$0 \leq \|x_n - p\| - \|T_n x_n - p\| \leq \|x_n - p\| - \|S_n T_n x_n - p\| \to 0$$

である。また, $\{T_n\}$ は強擬非拡大型だから

$$x_n - T_n x_n \to 0 \tag{3.1}$$

を得る。同様に

$$0 \leq \|T_n x_n - p\| - \|S_n T_n x_n - p\| \leq \|x_n - p\| - \|S_n T_n x_n - p\| \to 0$$

である。さらに, $\{T_n x_n\}$ は有界であり, $\{S_n\}$ は強擬非拡大型だから

$$T_n x_n - S_n T_n x_n \to 0 \tag{3.2}$$

を得る。したがって, (3.1) および (3.2) より

$$x_n - S_n T_n x_n = x_n - T_n x_n + T_n x_n - S_n T_n x_n \to 0$$

が成り立つ。ゆえに, $\{S_n T_n\}$ は強擬非拡大型である。 □

**註 10.** 定理 3.3 は, [21, Theorem 3.4] と関連している。定理 3.3 の仮定「$S_n$ または $T_n$ が狭義擬非拡大」を「$S_n$ または $T_n$ が強擬非拡大」に強めると, [21, Theorem 3.4] の系となる。

次に, 強擬非拡大列と漸近的不動点の関係を述べる。[21, Lemma 3.6] より, 次の補助定理が得られる。

**補助定理 3.4.** $C$ と $D$ を Hilbert 空間 $H$ の空でない部分集合, $\{S_n\}$ を $C$ から $H$ への擬非拡大写像の列, $\{T_n\}$ を $D$ から $H$ への擬非拡大写像の列とし, $F = \bigcap_n \mathrm{F}(S_n) \cap \bigcap_n \mathrm{F}(T_n) \neq \emptyset$ であり, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $T_n(D) \subset C$ であり, $\{S_n\}$ または $\{T_n\}$ のどちらかが強擬非拡大型であるとする。このとき, $\{z_n\}$ が $z_n - S_n T_n z_n \to 0$ となる $C$ の有界点列ならば, $z_n - T_n z_n \to 0$ および $T_n z_n - S_n T_n z_n \to 0$ である。

補助定理 3.4 を使って, 補助定理 2.5 と似た次の定理が得られることを示そう。

**定理 3.5.** 補助定理 3.4 のもとでさらに $C$ は閉凸であり, $\hat{\mathrm{F}}(\{S_n\}) = \bigcap_n \mathrm{F}(S_n)$ および $\hat{\mathrm{F}}(\{T_n\}) = \bigcap_n \mathrm{F}(T_n)$ とする。このとき, $\hat{\mathrm{F}}(\{S_n T_n\}) = \bigcap_n \mathrm{F}(S_n T_n)$ である。

**証明.** 仮定より

$$\hat{\mathrm{F}}(\{S_n T_n\}) \supset \bigcap_n \mathrm{F}(S_n T_n) \supset \bigcap_n \mathrm{F}(S_n) \cap \bigcap_n \mathrm{F}(T_n) = \hat{\mathrm{F}}(\{S_n\}) \cap \hat{\mathrm{F}}(\{T_n\})$$

が成り立つから, $\hat{\mathrm{F}}(\{S_n T_n\}) \subset \hat{\mathrm{F}}(\{S_n\}) \cap \hat{\mathrm{F}}(\{T_n\})$ を示せばよい。$z \in \hat{\mathrm{F}}(\{S_n T_n\})$ とする。このとき, $z \in D$ であり, 補助定理 2.6 より, $D$ の有界点列 $\{x_n\}$ と $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ が存在し, $x_n - S_n T_n x_n \to 0$, $x_{n_i} \rightharpoonup z$ が成り立つ。よって, 補助定理 3.4 より, $x_n - T_n x_n \to 0$, $T_n x_n - S_n T_n x_n \to 0$ を得る。したがって, $z \in \hat{\mathrm{F}}(\{T_n\})$ である。また, $\{T_{n_i} x_{n_i}\}$ は $\{T_n x_n\}$ の部分列で, $T_{n_i} x_{n_i} = (T_{n_i} x_{n_i} - x_{n_i}) + x_{n_i} \rightharpoonup z$ であり, $C$ は閉凸だから, $z \in C$, つまり, $z \in \hat{\mathrm{F}}(\{S_n\})$ である。 □

**註 11.** 定理 3.5 の Banach 空間版の一つが [3, Proposition 3] である。その証明については, [39] も参照されたい。

次に, 補助定理 2.4 と似た写像列の凸結合に関する定理を示そう。

**定理 3.6.** $C$ を Hilbert 空間 $H$ の空でない部分集合, $\{S_n\}$ を $C$ から $H$ への写像の列, $\{T_n\}$ を $C$ から $H$ への擬非拡大写像の列, $\{\lambda_n\}$ を $(0,1)$ の数列とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して写像 $U_n \colon C \to H$ を $U_n = \lambda_n S_n + (1-\lambda_n) T_n$ で定義し, $\{S_n\}$ は強擬非拡大型であり, $F = \bigcap_n \mathrm{F}(S_n) \cap \bigcap_n \mathrm{F}(T_n) \neq \emptyset$ および $\inf_n \lambda_n > 0$ を仮定する。このとき,

$F = \bigcap_n \mathrm{F}(U_n)$ であり, $\{U_n\}$ は強擬非拡大型である。

**証明**. 補助定理 2.3 より, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\mathrm{F}(U_n) = \mathrm{F}(S_n) \cap \mathrm{F}(T_n)$ が成り立つ。したがって,

$$F = \bigcap_n \bigl(\mathrm{F}(S_n) \cap \mathrm{F}(T_n)\bigr) = \bigcap_n \mathrm{F}(U_n)$$

を得る。次に, $\{x_n\}$ を $C$ の有界点列, $z \in \bigcap_n \mathrm{F}(U_n)$ とし

$$\|x_n - z\| - \|U_n x_n - z\| \to 0 \tag{3.3}$$

を仮定する。各 $S_n$ および $T_n$ は擬非拡大で, $z \in \mathrm{F}(S_n) \cap \mathrm{F}(T_n)$ だから

$$\begin{aligned}\|U_n x_n - z\| &\le \lambda_n \|S_n x_n - z\| + (1-\lambda_n) \|T_n x_n - z\| \\ &\le \lambda_n \|S_n x_n - z\| + (1-\lambda_n) \|x_n - z\| \\ &\le \|x_n - z\|\end{aligned}$$

が成り立つ。これより, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$0 \le \lambda_n \bigl(\|x_n - z\| - \|S_n x_n - z\|\bigr) \le \|x_n - z\| - \|U_n x_n - z\|$$

が成り立つ。ゆえに, $\inf_n \lambda_n > 0$ および (3.3) より

$$\|x_n - z\| - \|S_n x_n - z\| \to 0 \tag{3.4}$$

となる。よって, $\{S_n\}$ は強擬非拡大型だから,

$$S_n x_n - x_n \to 0 \tag{3.5}$$

である。ここで, $\{x_n\}$, $\{S_n x_n\}$ および $\{U_n x_n\}$ が有界であることに注意すると, (3.3) および (3.4) より,

$$\begin{aligned}&\lambda_n (1-\lambda_n) \|S_n x_n - T_n x_n\|^2 \\ &\quad = \lambda_n \|S_n x_n - z\|^2 + (1-\lambda_n) \|T_n x_n - z\|^2 - \|U_n x_n - z\|^2 \\ &\quad \le \lambda_n \|S_n x_n - z\|^2 + (1-\lambda_n) \|x_n - z\|^2 - \|U_n x_n - z\|^2 \\ &\quad = \lambda_n \left(\|S_n x_n - z\|^2 - \|x_n - z\|^2\right) + \|x_n - z\|^2 - \|U_n x_n - z\|^2 \to 0\end{aligned}$$

を得る。よって, $\inf_n \lambda_n > 0$ より

$$\lim_n (1-\lambda_n) \|S_n x_n - T_n x_n\| = 0$$

である。これと (3.5) より

$$\begin{aligned}\|x_n - U_n x_n\| &= \|x_n - S_n x_n + (1-\lambda_n)(Sx_n - T_n x_n)\| \\ &\le \|x_n - S_n x_n\| + (1-\lambda_n)\|S_n x_n - T_n x_n\| \to 0\end{aligned}$$

であるから, $\{U_n\}$ が強非拡大型であることが示せた。 □

定理 3.6 で $S_n \equiv I$ とすると, $\mathrm{F}\big(\lambda_n I + (1-\lambda_n)T_n\big) = \mathrm{F}(T_n)$ であるから, 次の系が直ちに得られる。これにより, 共通不動点をもつ擬非拡大写像の列から, 共通不動点が一致する強擬非拡大列を生成することができる。

**定理 3.7.** $C$ を Hilbert 空間 $H$ の空でない部分集合, $\{T_n\}$ を $C$ から $H$ への擬非拡大写像の列, $\{\lambda_n\}$ を $(0,1)$ の数列とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して写像 $V_n\colon C \to H$ を $V_n = \lambda_n I + (1-\lambda_n)T_n$ で定義し, $F = \bigcap_n \mathrm{F}(T_n) \neq \emptyset$ および $\inf_n \lambda_n > 0$ を仮定する。このとき, $F = \bigcap_n \mathrm{F}(V_n)$ であり, $\{V_n\}$ は強擬非拡大型である。

**註 12.** 系 3.7 の Banach 空間版の一つが [21, Theorem 3.8] である。

# 4 強擬非拡大列に関する収束定理

最後に, 強擬非拡大列に関する収束定理を一つ紹介する。[21, Theorem 4.1] および補助定理 2.6 より, 次の定理が得られる。

**定理 4.1.** $C$ を $H$ の空でない部分集合, $\{S_n\}$ を $C$ から $C$ への写像の列, $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$ および任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_{n+1} = S_n x_n$ で定義される点列とし, $\{S_n\}$ は強擬非拡大型であり, $F = \bigcap_n \mathrm{F}(S_n) = \hat{\mathrm{F}}(\{S_n\}) \neq \emptyset$ であるとする。このとき, $\{x_n\}$ は $\lim_n P_F(x_n)$ に弱収束する。

定理 4.1 の応用例については, 文献 [21] の第 5 節および第 6 節を参照されたい。

# 参考文献


[1] K. Aoyama, *An iterative method for a variational inequality problem over the common fixed point set of nonexpansive mappings*, Nonlinear analysis and convex analysis, 2010, pp. 21–28.

[2] ———, *An iterative method for fixed point problems for sequences of nonexpansive mappings*, Fixed point theory and its applications, 2010, pp. 1–7.

[3] ———, *Asymptotic fixed points of sequences of quasi-nonexpansive type mappings*, Banach and function spaces III (ISBFS 2009), 2011, pp. 343–350.

[4] ———, *Halpern's iteration for a sequence of quasinonexpansive type mappings*, Nonlinear mathematics for uncertainty and its applications, 2011, pp. 387–394.

[5] ———, *Approximations to solutions of the variational inequality problem for inverse-strongly-monotone mappings*, Nonlinear analysis and convex analysis -I-, 2013, pp. 1–9.

[6] ———, *Strongly quasinonexpansive mappings*, Nonlinear analysis and convex analysis, 2016, pp. 19–27.

[7] ———, *Viscosity approximation method for quasinonexpansive mappings with contraction-like mappings*, Nihonkai Math. J. **27** (2016), 168–180.

[8] ———, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings and quasinonexpansive mappings in a Hilbert space*, Nonlinear analysis and convex analysis, 2019, pp. 1–10.

[9] K. Aoyama and Y. Kimura, *Strong convergence theorems for strongly nonexpansive sequences*, Appl. Math. Comput. **217** (2011), 7537–7545.

[10] ———, *A note on the hybrid steepest descent methods*, Fixed point theory and its applications, 2013, pp. 73–80.

[11] ———, *Viscosity approximation methods with a sequence of contractions*, Cubo **16** (2014), 9–20.

[12] K. Aoyama, Y. Kimura, and F. Kohsaka, *Strong convergence theorems for strongly relatively nonexpansive sequences and applications*, J. Nonlinear Anal. Optim. **3** (2012), 67–77.

[13] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *On a strongly nonexpansive sequence in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 471–489.

[14] ———, *Strongly nonexpansive sequences and their applications in Banach spaces*, Fixed point theory and its applications, 2008, pp. 1–18.

[15] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:95, 13.

[16] ———, *Viscosity approximation process for a sequence of quasinonexpansive mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:17, 11.

[17] ———, *Cutter mappings and subgradient projections in Banach spaces*, Linear Nonlinear Anal. **3** (2017), 457–473.

[18] ———, *Strongly quasinonexpansive mappings, III*, Linear Nonlinear Anal. **6** (2020), 1–12.

[19] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Shrinking projection methods for firmly nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. **71** (2009), e1626–e1632.

[20] ———, *Strong convergence theorems by shrinking and hybrid projection methods for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear analysis and convex analysis, 2009, pp. 7–26.

[21] ———, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–224.

[22] K. Aoyama and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory **8** (2007), 143–160.

[23] K. Aoyama and M. Toyoda, *Approximation of zeros of accretive operators in a Banach space*, Israel J. Math. **220** (2017), 803–816.

[24] ———, *Approximation of common fixed points of strongly nonexpansive sequences in a Banach space*, J. Fixed Point Theory Appl. **21** (2019), Art. 35, 16.

[25] K. Aoyama and K. Zembayashi, *Strongly quasinonexpansive mappings, II*, J. Nonlinear Convex Anal. **19** (2018), 1655–1663.

[26] R. E. Bruck and S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 459–470.

[27] R. E. Bruck Jr., *Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **179** (1973), 251–262.

[28] W. G. Dotson Jr., *Fixed points of quasi-nonexpansive mappings*, J. Austral. Math. Soc. **13** (1972), 167–170.

[29] F. Kohsaka and W. Takahashi, *The set of common fixed points of an infinite family of relatively nonexpansive mappings*, Banach and function spaces II, 2008, pp. 361–373.

[30] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, 1996, pp. 313–318.

[31] 青山耕治, 強非拡大写像列について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1667** (2009), 28–38.

[32] ———, 擬非拡大写像列の共通不動点問題に関する収束定理, 京都大学数理解析研究所講究録 **1819** (2012), 1–8.

[33] ———, 一様非拡大性をもつ写像列, 実解析学シンポジウム 2015 報告集 **47** (2015), 101–106.

[34] ———, 強擬非拡大写像について, 京都大学数理解析研究所講究録 **2011** (2016), 36–41.

[35] ———, *An iterative method for generalized split feasibility problems*, 京都大学数理解析研究所講究録 **2065** (2018), 19–29.

[36] ———, Hilbert 空間における非拡大写像と擬非拡大写像の不動点近似について, 京都大学数理解析研究所講究録 **2114** (2019), 29–35.

[37] 青山耕治, 高橋渉, 擬非拡大写像の族に関する強収束定理, 京都大学数理解析研究所講究録 **1570** (2007), 14–25.

[38] 高橋渉, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書, 2005.

[39] 青山耕治, 文献 [3] について. `http://bm.skr.jp/math/2011isbfs.pdf`.