エルミート・アダマール不等式の精密化とその応用

城西大学・理学部　　柳　研二郎

Kenjiro Yanagi
Department of Mathematics
Faculty of Science
Josai University

1 Introduction

重み付き平均のうち, いくつかの平均は次で定義される．$0 \le v \le 1$, $a, b > 0$ とする．このとき重み付き算術平均 (weighted arithmetic mean) は $a \nabla_v b = (1-v)a + vb$, 重み付き幾何平均 (weighted geometric mean) は $a \sharp_v b = a^{1-v}b^v$, 重み付き調和平均 (weighted harminic mean) は $a!_v b = ((1-v)a^{-1} + vb^{-1})^{-1}$ である．最近 Pal-Singh-Moslehian-Aujla ([10]) によって重み付き対数平均 (weighted logarithmic mean) と他の重み付き平均との間の関係を示した．

$$a \sharp_v b \le L_v(a, b) \le a \nabla_v b, \tag{1}$$

ただし重み付き対数平均 (weighted logarithmic mean) は次で定義される．

$$L_v(a, b) = \frac{1}{\log a - \log b}\left(\frac{1-v}{v}(a - a^{1-v}b^v) + \frac{v}{1-v}(a^{1-v}b^v - b)\right) \tag{2}$$

通常の対数平均は $v = \frac{1}{2}$ のときで $L_{1/2}(a, b) = \dfrac{a-b}{\log a - \log b}$, $(a \ne b)$ である．また次の性質をもつ．$L_{1/2}(a, a) = a$, $\lim_{v \to 0} L_v(a, b) = a$, $\lim_{v \to 1} L_v(a, b) = b$. (1) によって与えられる不等式はよく知られている次の関係を recover している．

$$\sqrt{ab} \le \frac{a-b}{\log a - \log b} \le \frac{a+b}{2}, \quad (a, b > 0).$$

Pal-Singh-Moslehian-Aujla ([10]) は重み $v \in [0, 1]$ をもつエルミート・アダマール不等式を一般化して次の結果を得た．

$$f(a \nabla_v b) \le C_{f,v}(a, b) \le f(a) \nabla_v f(b), \tag{3}$$

ただし convex Riemann integrable function f, $a, b > 0$, $v \in [0, 1]$ に対して

$$\begin{aligned} & C_{f,v}(a, b) \\ = \;& \left(\int_0^1 f(a \nabla_{vt} b)dt\right) \nabla_v \left(\int_0^1 f((1-v)(b-a)t + a \nabla_v b)dt\right) \end{aligned} \tag{4}$$

初等的計算より (3) で与えられた不等式は次のような標準的エルミート・アダマール不等式を recover する．

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{5}$$

最近, Furuichi-Minculete [7] は精密化されたエルミート・アダマール不等式を用いて重み付き対数平均に対する拡張された不等式を与えた．この論文ではさらなる精密化エルミート・アダマール不等式を導き, それを用いて彼らの結果を拡張する．

2　精密化されたエルミート・アダマール不等式

まず (5) の略証を与える．

Proof of (5). $[a,b]$ 上で定義された convex function を $y=f(x)$ とおく．点 $(a,0)$ を P, 点 $(b,0)$ を Q, 点 $(\frac{a+b}{2},0)$ を R, 点 $(a,f(a))$ を A, 点 $(b,f(b))$ を B, 点 $(\frac{a+b}{2},f(\frac{a+b}{2}))$ を C をする． $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の上界は台形 $APQB$ の面積で与えられるので

$$\frac{1}{2}(f(a)+f(b))(b-a).$$

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の下界については C における $y=f(x)$ の接線は

$$y-f(\frac{a+b}{2})=f^{'}(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})$$

であるので $x=a$ における接線上の値は

$$y_a=f\,'(\frac{a+b}{2})(\frac{a-b}{2})+f(\frac{a+b}{2}),$$

$x=b$ における接線上の値は

$$y_b=f\,'(\frac{a+b}{2})(\frac{b-a}{2})+f(\frac{a+b}{2})$$

となる．ここで点 (a,y_a) を E, 点 (b,y_b) を F, とすると下界としては台形 $EPQF$ の面積で与えられる．すなわち

$$\frac{1}{2}(y_a+y_b)(b-a)=f(\frac{a+b}{2})(b-a)$$

である．したがって結論の不等式が得られる．次に微分可能でない場合には convex function の定義より C における左微分係数 $f'_{-}(\frac{a+b}{2})$ よりも右微分係数 $f'_{+}(\frac{a+b}{2})$ の方が大きくなるので, その間の値 k を用いて同様にすればよい． □

次に精密化されたエルミート・アダマール不等式が得られる．

Theorem 2.1 $f(x)$ を $[a,b]$ 上の *convex function* とする．このとき任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} f(a+(2k-1)\frac{h_n}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (6) \\ \leq \frac{1}{2^{n+1}}\{f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{2^n-1} f(a+kh_n)\}, \end{aligned}$$

ただし, $h_n = \frac{b-a}{2^n}$. *(6)* において $n=0$ とおくと *(5)* が得られる．

Proof. $[a,b]$ を 2^n 等分し, それぞれの区間でエルミート・アダマール不等式を適用してそれらを加えれば良いので詳細は省略する． □

ここで (6) の下界と上界の性質を述べよう．

Proposition 2.1 次の *(1), (2)* が成り立つ．

(1) $$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} f(a+(2k-1)\frac{h_{n-1}}{2}) \leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} f(a+(2k-1)\frac{h_n}{2})$$

(2) $$\begin{aligned} &\frac{1}{2^{n+1}}\{f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{2^n-1} f(a+kh_n)\} \\ &\leq \frac{1}{2^n}\{f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f(a+kh_{n-1})\} \end{aligned}$$

Proof. (1)

$$\begin{aligned} RHS &= \frac{1}{2^n}\{f(a+\frac{h_n}{2})+f(a+\frac{3}{2}h_n)+f(a+\frac{5}{2}h_n) \\ &\quad +\cdots+f(a+\frac{2^{n+1}-1}{2}h_n)\} \\ &\geq \frac{1}{2^{n-1}}\{f(a+h_n)+f(a+3h_n)+\cdots+f(a+(2^n-1)h_n)\} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\{f(a+\frac{h_{n-1}}{2})+f(a+\frac{3}{2}h_{n-1}) \\ &\quad +\cdots+f(a+\frac{2^n-1}{2}h_{n-1})\} = LHS. \end{aligned}$$

(2)

$$f(a)+f(a+2h_n) \geq 2f(a+h_n),$$

$$f(a+2h_n)+f(a+4h_n) \geq 2f(a+3h_n),$$

$$f(a+(2^n-2)h_n)+f(b) \geq 2f(a+(2^n-1)h_n),$$

であるので,

$$
\begin{aligned}
& LHS \\
= \ & \frac{1}{2^{n+1}}\{f(a)+2f(a+h_n)+2f(a+2h_n)+2f(a+3h_n) \\
& \qquad +\cdots+2f(a+(2^n-1)h_n)+f(b)\} \\
\leq \ & \frac{1}{2^{n+1}}\{f(a)+f(a)+f(a+2h_n)+2f(a+2h_n)+f(a+2h_n) \\
& \quad +f(a+4h_n)+\cdots+f(a+(2^n-2)h_n)+f(b)+f(b)\} \\
= \ & \frac{1}{2^n}\{f(a)+f(b)+2f(a+2h_n)+2f(a+4h_n) \\
& \quad +\cdots+2f(a+(2^n-2)h_n)\} \\
= \ & \frac{1}{2^n}\{f(a)+f(b)+2f(a+h_{n-1})+2f(a+2h_{n-1}) \\
& \quad +\cdots+2f(a+(2^{n-1}-1)h_{n-1})\} \\
= \ & RHS.
\end{aligned}
$$

□

3 Main Result 1

(6) で与えられた精密化されたエルミート・アダマール不等式を何度も用いて (3) に対する精密化された不等式を得る.

Theorem 3.1 任意の *convex Riemann integrable function* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ と $v\in[0,1]$ に対して次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
& f(a \bigtriangledown_v b) \leq R^{(1)}_{f,v}(a,b) = R^{(1)}_{f,v,0}(a,b) \\
\leq \ & R^{(1)}_{f,v,1}(a,b) \leq R^{(1)}_{f,v,2}(a,b) \leq \cdots \leq R^{(1)}_{f,v,n}(a,b) \\
\leq \ & C_{f,v}(a,b) \\
\leq \ & R^{(2)}_{f,v,n}(a,b) \leq R^{(2)}_{f,v,n-1}(a,b) \leq \cdots \leq R^{(2)}_{f,v,1}(a,b) \\
\leq \ & R^{(2)}_{f,v,0}(a,b) = R^{(2)}_{f,v}(a,b) \leq f(a) \bigtriangledown_v f(b),
\end{aligned} \tag{7}
$$

ただし $h_n=\dfrac{v(b-a)}{2^n},\ \ell_n=\dfrac{(1-v)(b-a)}{2^n}$,

$$
\begin{aligned}
& R^{(1)}_{f,v,n}(a,b) \\
= \ & \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\{(1-v)f(a+(2k-1)\frac{h_n}{2})+vf((1-v)a+vb+(2k-1)\frac{\ell_n}{2})\} \\
= \ & \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} f(a \bigtriangledown_{\frac{(2k-1)v}{2^{n+1}}} b) \bigtriangledown_v f(a \bigtriangledown_{v+\frac{(2k-1)(1-v)}{2^{n+1}}} b)
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$\begin{aligned}
& R^{(2)}_{f,v,n}(a,b) \qquad (9)\\
= & \frac{1}{2^{n+1}}\left\{(1-v)f(a)+vf(b)+f((1-v)a+vb)\right\}\\
& \qquad +\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n-1}\{(1-v)f(a+kh_n)+vf((1-v)a+vb+k\ell_n)\}\\
= & \frac{1}{2^{n+1}}\{f(a)\bigtriangledown_v f(b)+f(a\bigtriangledown_v b)\}\\
& +\frac{1}{2^n}\{\sum_{k=1}^{2^n-1} f(a\bigtriangledown_{\frac{kv}{2^n}} b)\bigtriangledown_v f(a\bigtriangledown_{v+\frac{k(1-v)}{2^n}} b)\}\\
= & \frac{1}{2^n}\{(f(a)\bigtriangledown_v f(b))\bigtriangledown_{1/2}(f(a\bigtriangledown_v b))\\
& \qquad +\sum_{k=1}^{2^n-1} f(a\bigtriangledown_{\frac{kv}{2^n}} b)\bigtriangledown_v f(a\bigtriangledown_{v+\frac{k(1-v)}{2^n}} b)\}.
\end{aligned}$$

(7) において $n=0$ とおくと, *([7], Theorem 2.1).* の結果を得る.

Proof. 2 つの区間 $[a,(1-v)a+vb]$ と $[(1-v)a+vb,b]$ に精密化されたエルミート・アダマール不等式を適用すると, それぞれ次の不等式を得る.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} f(a+(2k-1)\frac{h_n}{2})\le\frac{1}{v(b-a)}\int_a^{(1-v)a+vb}f(x)dx \qquad (10)\\
\le & \frac{1}{2^{n+1}}\{f(a)+f((1-v)a+b)+2\sum_{k=1}^{2^n-1}f(a+kh_n)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} f((1-v)a+vb+(2k-1)\frac{\ell_n}{2}) \qquad (11)\\
\le & \frac{1}{(1-v)(b-a)}\int_{(1-v)a+vb}^{b}f(x)dx\\
\le & \frac{1}{2^{n+1}}\{f((1-v)a+vb)+f(b)+2\sum_{k=1}^{2^n-1}f((1-v)a+vb+k\ell_n)\}.
\end{aligned}$$

次に (10) と (11) の両辺にそれぞれ $(1-v)$ と v をかけて各辺を加えると次が得られる.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\{(1-v)f(a+(2k-1)\frac{h_n}{2})+vf((1-v)a+vb+(2k-1)\frac{\ell_n}{2})\} \qquad (12)\\
\le & \frac{1-v}{v(b-a)}\int_a^{(1-v)a+vb}f(x)dx+\frac{v}{(1-v)(b-a)}\int_{(1-v)a+vb}^{b}f(x)dx\\
\le & \frac{1}{2^{n+1}}\left\{f(a)\bigtriangledown_v f(b)+f(a\bigtriangledown_v b)\bigtriangledown_v f(a\bigtriangledown_v b)\right\}\\
& \qquad +\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n-1}\{(1-v)f(a+kh_n)+vf((1-v)a+vb+k\ell_n)\}.
\end{aligned}$$

(12) の第 1 項については $x = v(b-a)s + a$, 第 2 項については $x = (1-v)(b-a)u + (1-v)a + vb$ で置き換えると次を得る.

$$R^{(1)}_{f,v,n}(a,b) \le C_{f,v}(a,b) \le R^{(2)}_{f,v,n}(a,b), \tag{13}$$

最後に $R^{(1)}_{f,v,n}(a,b)$ と $R^{(2)}_{f,v,n}(a,b)$ を評価する. Proposition 2.1 と同様な方法を用いると次が示される.

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{f,v,n-1}(a,b) &\le R^{(1)}_{f,v,n}(a,b), \\ R^{(2)}_{f,v,n}(a,b) &\le R^{(2)}_{f,v,n-1}(a,b). \end{aligned}$$

□

Corollary 3.1 $a, b > 0$ と $v \in (0,1)$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}(a\sharp_{\frac{(2k-1)v}{2^{n+1}}}b) \bigtriangledown_v (a\sharp_{v+\frac{(2k-1)(1-v)}{2^{n+1}}}b) \\ \le\ & L_v(a,b) \\ \le\ & \frac{1}{2^n}\left[(a \bigtriangledown_v b) \bigtriangledown_{1/2} (a\sharp_v b) + \sum_{k=1}^{2^n-1}(a\sharp_{\frac{kv}{2^n}}b) \bigtriangledown_v (a\sharp_{v+\frac{k(1-v)}{2^n}}b)\right] \end{aligned} \tag{14}$$

(14) において $n=0$ とすると ([7], Corollary 2.2) の結論を得る.

Proof. Theorem 3.1 において, convex function $f(t) = e^t$ を適用すると, $a, b > 0$ に対して次を得る.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\left\{(1-v)e^{(1-\frac{(2k-1)v}{2^{n+1}})a}e^{\frac{(2k-1)v}{2^{n+1}}b}\right\} \\ &\qquad +\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\left\{ve^{(1-v-\frac{(2k-1)(1-v)}{2^{n+1}})a}e^{(v+\frac{(2k-1)(1-v)}{2^{n+1}})b}\right\} \\ \le\ & \frac{1-v}{v(b-a)}\{e^{(1-v)a+vb} - e^a\} + \frac{v}{(1-v)(b-a)}\{e^b - e^{(1-v)a+vb}\} \\ \le\ & \frac{1}{2^{n+1}}\left\{(1-v)e^a + ve^b + e^{(1-v)a}e^{vb}\right\} \\ &\qquad +\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n-1}\{(1-v)e^{(1-\frac{kv}{2^n})a}e^{\frac{kv}{2^n}b} + ve^{(1-v-\frac{k(1-v)}{2^n})a}e^{(v+\frac{k(1-v)}{2^n})b}\}. \end{aligned} \tag{15}$$

e^a を a で, e^b を b でそれぞれ置き換えると, $a, b > 0$ と $v \in (0,1)$ に対して (14) を得る. □

[10] で次のように定義された重み付き identric mean

$$I_v(a,b) = \frac{1}{e}(a \bigtriangledown_v b)^{\frac{(1-2v)(a\bigtriangledown_v b)}{v(1-v)(b-a)}}\left(\frac{b^{\frac{vb}{1-v}}}{a^{\frac{(1-v)a}{v}}}\right)^{\frac{1}{b-a}}, \quad v \in (0,1) \tag{16}$$

についての不等式を得る．$I_{1/2}(a,b)$ は通常の identric mean $I(a,b)=\frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}$ を recover する．ただし $\lim_{v\to 0} I_v(a,b)=a$ と $\lim_{v\to 1} I_v(a,b)=b$.

Corollary 3.2 $a,b>0$ と $v\in(0,1)$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\{(a\sharp_v b)\sharp_{1/2}(a\bigtriangledown_v b)\prod_{k=1}^{2^n-1}(a\bigtriangledown_{\frac{kv}{2^n}} b)\sharp_v(a\bigtriangledown_{v+\frac{k(1-v)}{2^n}} b)\}^{\frac{1}{2^n}} \qquad (17)\\
\leq\ & I_v(a,b)\\
\leq\ & \prod_{k=1}^{2^n}\{(a\bigtriangledown_{\frac{(2k-1)v}{2^{n+1}}} b)\sharp_v(a\bigtriangledown_{v+\frac{(2k-1)(1-v)}{2^{n+1}}} b)\}^{\frac{1}{2^n}}.
\end{aligned}$$

(17) において $n=0$ とすると，*([7], Corollary 2.3)* の結論を得る．

Proof. Theorem 3.1 において convex function $f(t)=-\log t$ を適用すると

$$\begin{aligned}
&-(1-v)\log\{(1-\frac{(2k-1)v}{2^{n+1}})a+\frac{(2k-1)v}{2^{n+1}}b\}\\
&\quad -v\log\{(1-v-\frac{(2k-1)(1-v)}{2^{n+1}})a+(v+\frac{(2k-1)(1-v)}{2^{n+1}})b\}\\
=\ & -\log\{(1-\frac{(2k-1)v}{2^{n+1}})a+\frac{(2k-1)v}{2^{n+1}}b\}^{1-v}\\
&\quad \{(1-v-\frac{(2k-1)(1-v)}{2^{n+1}})a+(v+\frac{(2k-1)(1-v)}{2^{n+1}})b\}^{v}
\end{aligned}$$

であるので次を得る．

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\log\{(1-\frac{(2k-1)v}{2^{n+1}})a+\frac{(2k-1)v}{2^{n+1}}b\}^{1-v} \qquad (18)\\
&\quad \{(1-v-\frac{(2k-1)(1-v)}{2^{n+1}})a+(v+\frac{(2k-1)(1-v)}{2^{n+1}})b\}^{v}\\
=\ & -\frac{1}{2^n}\log\prod_{k=1}^{2^n}\{(1-\frac{(2k-1)v}{2^{n+1}})a+\frac{(2k-1)v}{2^{n+1}}b\}^{1-v}\\
&\quad \{(1-v-\frac{(2k-1)(1-v)}{2^{n+1}})a+(v+\frac{(2k-1)(1-v)}{2^{n+1}})b\}^{v}\\
=\ & -\log\prod_{k=1}^{2^n}\{(a\bigtriangledown_{\frac{(2k-1)v}{2^{n+1}}} b)\sharp_v(a\bigtriangledown_{v+\frac{(2k-1)(1-v)}{2^{n+1}}} b)\}^{\frac{1}{2^n}}.
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
&-(1-v)\log a-v\log b-\log((1-v)a+vb)\\
&\quad -2\sum_{k=1}^{2^n-1}\{(1-v)\log((1-\frac{kv}{2^n})a+\frac{kv}{2^n}b)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad +v\log((1-v-\frac{k(1-v)}{2^n})a+(v+\frac{k(1-v)}{2^n})b)\} \\
= &\quad -\log a^{1-v}b^v((1-v)a+vb) \\
&\quad -2\sum_{k=1}^{2^n-1}\log\{(1-\frac{kv}{2^n})a+\frac{kv}{2^n}b\}^{1-v} \\
&\qquad\qquad \{(1-v-\frac{k(1-v)}{2^n})a+(v+\frac{k(1-v)}{2^n})b\}^v
\end{aligned}
$$

であるので次を得る.

$$
\begin{aligned}
&\quad -\frac{1}{2^{n+1}}\log a^{1-v}b^v((1-v)a+vb) \qquad (19)\\
&\quad -\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n-1}\log\{(1-\frac{kv}{2^n})a+\frac{kv}{2^n}b\}^{1-v} \\
&\qquad\qquad \{(1-v-\frac{k(1-v)}{2^n})a+(v+\frac{k(1-v)}{2^n})b\}^v \\
= &\quad -\frac{1}{2^n}\log a^{\frac{1-v}{2}}b^{\frac{v}{2}}((1-v)a+vb)^{1/2} \\
&\quad -\frac{1}{2^n}\log\prod_{k=1}^{2^n-1}\{(1-\frac{kv}{2^n})a+\frac{kv}{2^n}b\}^{1-v} \\
&\qquad\qquad \{(1-v-\frac{k(1-v)}{2^n})a+(v+\frac{k(1-v)}{2^n})b\}^v \\
= &\quad -\log\{(a\sharp_v b)\sharp_{1/2}(a\bigtriangledown_v b)\prod_{k=1}^{2^n-1}(a\bigtriangledown_{\frac{kv}{2^n}} b)\sharp_v(a\bigtriangledown_{v+\frac{k(1-v)}{2^n}} b)\}^{\frac{1}{2^n}}.
\end{aligned}
$$

したがって次を得る.

$$
\begin{aligned}
&\quad -\frac{1-v}{v(b-a)}\{(a\bigtriangledown_v b)\log(a\bigtriangledown_v b)-a\bigtriangledown_v b-a\log a+a\} \qquad (20)\\
&\quad -\frac{v}{(1-v)(b-a)}\{b\log b-b-(a\bigtriangledown_v b)\log(a\bigtriangledown_v b)+a\bigtriangledown_v b\} \\
= &\quad -\log\{(1-v)a+vb\}^{\frac{(1-2v)((1-v)a+vb)}{v(1-v)(b-a)}}b^{\frac{vb}{(1-v)(b-a)}}a^{-\frac{(1-v)a}{v(b-a)}}-1 \\
= &\quad -\log\frac{1}{e}\{(1-v)a+vb)\}^{\frac{(1-2v)((1-v)a+vb)}{v(1-v)(b-a)}}\left(\frac{b^{\frac{vb}{1-v}}}{a^{\frac{(1-v)a}{v}}}\right)^{\frac{1}{b-a}}.
\end{aligned}
$$

Corollary 3.1 の証明と同様にして証明が完了する. □

4 Main Results 2

(6). で与えられた精密化されたエルミート・アダマール不等式を何度も用いて (3) に対する精密化不等式で Theorem 3.1 とは異なる不等式を得る.

Theorem 4.1 任意の *convex Riemann integrable function* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ と $v \in [0,1]$ に対して次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
& f(\frac{a+b}{2}) \le r^{(1)}_{f,v}(a,b) = r^{(1)}_{f,v,0}(a,b) \qquad (21)\\
\le \;& r^{(1)}_{f,v,1}(a,b) \le r^{(1)}_{f,v,2}(a,b) \le \cdots \le r^{(1)}_{f,v,n}(a,b)\\
\le \;& \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\\
\le \;& r^{(2)}_{f,v,n}(a,b) \le r^{(2)}_{f,v,n-1}(a,b) \le \cdots \le r^{(2)}_{f,v,1}(a,b)\\
\le \;& r^{(2)}_{f,v,0}(a,b) = r^{(2)}_{f,v}(a,b) \le \frac{f(a)+f(b)}{2},
\end{aligned}
$$

where $h_n = \dfrac{v(b-a)}{2^n}, \quad \ell_n = \dfrac{(1-v)(b-a)}{2^n}$,

$$
\begin{aligned}
& r^{(1)}_{f,v,n}(a,b) \qquad (22)\\
= \;& \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\{vf(a+(2k-1)\frac{h_n}{2}) + (1-v)f((1-v)a+vb+(2k-1)\frac{\ell_n}{2})\}\\
= \;& \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} f(a \bigtriangledown_{v+\frac{(2k-1)(1-v)}{2^{n+1}}} b) \bigtriangledown_v f(a \bigtriangledown_{\frac{(2k-1)v}{2^{n+1}}} b),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& r^{(2)}_{f,v,n}(a,b) \qquad (23)\\
= \;& \frac{1}{2^{n+1}}\{vf(a) + (1-v)f(b) + f((1-v)a+vb)\}\\
& \quad + \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n-1}\{vf((a+kh_n) + (1-v)f((1-v)a+vb+k\ell_n)\}\\
= \;& \frac{1}{2^{n+1}}\{f(b) \bigtriangledown_v f(a) + f(a \bigtriangledown_v b)\}\\
& + \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n-1} f(a \bigtriangledown_{v+\frac{k(1-v)}{2^n}} b) \bigtriangledown_v f(a \bigtriangledown_{\frac{kv}{2^n}} b)\\
= \;& \frac{1}{2^n}\{(f(b) \bigtriangledown_v f(a)) \bigtriangledown_{1/2} (f(a \bigtriangledown_v b))\\
& \quad + \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a \bigtriangledown_{v+\frac{k(1-v)}{2^n}} b) \bigtriangledown_v f(a \bigtriangledown_{\frac{kv}{2^n}} b)\}.
\end{aligned}
$$

Proof. 2 つの区間 $[a,(1-v)a+vb]$ と $[(1-v)a+vb,b]$ に精密化されたエルミート・アダマール不等式を適用する. すなわち, (10) の両辺に v をかけ, (11) の両辺に $1-v$ をかけて, それぞれを加えると次の不等式が得られる.

$$
\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\{vf(a+(2k-1)\frac{h_n}{2}) + (1-v)f((1-v)a+vb+(2k-1)\frac{\ell_n}{2})\} \qquad (24)
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{b-a}\int_a^{(1-v)a+vb} f(x)dx + \frac{1}{b-a}\int_{(1-v)a+vb}^{b} f(x)dx \\
&\le \frac{1}{2^{n+1}}\{f(b)\nabla_v f(a) + vf(a\nabla_v b) + (1-v)f(a\nabla_v b)\} \\
&\qquad + \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n-1}\{vf(a+kh_n) + (1-v)f((1-v)a+vb+k\ell_n)\}.
\end{aligned}
$$

したがって

$$
r_{f,v,n}^{(1)}(a,b) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le r_{f,v,n}^{(2)}(a,b). \tag{25}
$$

最後に $r_{f,v,n}^{(1)}(a,b)$ と $r_{f,v,n}^{(2)}(a,b)$ を評価する．Proposition 2.1 と同様な方法を用いると次が示される．

$$
\begin{aligned}
r_{f,v,n-1}^{(1)}(a,b) &\le r_{f,v,n}^{(1)}(a,b), \\
r_{f,v,n}^{(2)}(a,b) &\le r_{f,v,n-1}^{(2)}(a,b).
\end{aligned}
$$

□

Corollary 4.1 $a,b>0$ と $v\in(0,1)$ に対して次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}(a\sharp_{v+\frac{(2k-1)(1-v)}{2^{n+1}}}b)\nabla_v(a\sharp_{\frac{(2k-1)v}{2^{n+1}}}b) \qquad (26)\\
&\le L_{1/2}(a,b) = \frac{b-a}{\log b - \log a} \\
&\le \frac{1}{2^n}\left[(b\nabla_v a)\nabla_{1/2}(a\sharp_v b) + \sum_{k=1}^{2^n-1}(a\sharp_{v+\frac{k(1-v)}{2^n}}b)\nabla_v(a\sharp_{\frac{kv}{2^n}}b)\right]
\end{aligned}
$$

Proof. Theorem 4.1 において, convex function $f(t)=e^t$ を適用し, e^a を a で, e^b を b でそれぞれ置き換えると, $b>a>0$ と $v\in(0,1)$ に対して (26) を得る． □

Corollary 4.2 $a,b>0$ と $v\in(0,1)$ に対して次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&\{(b\sharp_v a)\sharp_{1/2}(a\nabla_v b)\prod_{k=1}^{2^n-1}(a\nabla_{v+\frac{k(1-v)}{2^n}}b)\sharp_v(a\nabla_{\frac{kv}{2^n}}b)\}^{\frac{1}{2^n}} \qquad (27)\\
&\le I_{1/2}(a,b) = \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} \\
&\le \prod_{k=1}^{2^n}\{(a\nabla_{v+\frac{(2k-1)(1-v)}{2^{n+1}}}b)\sharp_v(a\nabla_{\frac{(2k-1)v}{2^{n+1}}}b)\}^{\frac{1}{2^n}}.
\end{aligned}
$$

Proof. Theorem 4.1 において convex function $f(t)=-\log t$ を適用すると, $b>a>0$ と $v\in(0,1)$ に対して (27) を得る． □

5 Related Results

この論文で得られた結果は, 作用素不等式 (operator inequality) に拡張される．Corollary 3.1 と Corollary 4.1 に対応する作用素不等式が得られる．positive operators A, B に対して重み付き作用素幾何平均と重み付き作用素算術平均は, それぞれ次で与えられる．

$$A\sharp_v B = A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^v A^{1/2}, \quad A \bigtriangledown_v B = (1-v)A + vB.$$

Ando-Hiai [8] の作用素平均理論によると, 作用素平均 $M(A, B)$ は $a, b > 0$ の平均 $m(a, b)$ による表現関数 $f(t) = m(1, t)$ と対応付けられることが知られている．したがって重み付き作用素対数平均 $A\ell_v B$ は表現関数 $L_v(1, t)$ によって定義される．

Theorem 5.1 *strictly positive operators* A, B と $v \in (0, 1)$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\left[(A\sharp_{\frac{(2k-1)v}{2^{n+1}}}B) \bigtriangledown_v (A\sharp_{v+\frac{(2k-1)(1-v)}{2^{n+1}}}B)\right] \\ \leq\ & A\ell_v B \\ \leq\ & \frac{1}{2^n}\left[(A\sharp_v B) \bigtriangledown_{1/2} (A \bigtriangledown_v B) + \sum_{k=1}^{2^n-1}(A\sharp_{\frac{kv}{2^n}}B) \bigtriangledown_v (A\sharp_{v+\frac{k(1-v)}{2^n}}B)\right] \end{aligned} \tag{28}$$

Proof. (14) の両辺を a で割り, $\frac{b}{a} = t$ とおいた後に t を $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ と置き換えて両辺に左右から $A^{1/2}$ をかけると結論の作用素不等式が得られる． □

Theorem 5.2 *strictly positive operators* A, B と $v \in (0, 1)$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\left[(A\sharp_{v+\frac{(2k-1)(1-v)}{2^{n+1}}}B) \bigtriangledown_v (A\sharp_{\frac{(2k-1)v}{2^{n+1}}}B)\right] \\ \leq\ & A\ell_{1/2} B \\ \leq\ & \frac{1}{2^n}\left[(B\sharp_v A) \bigtriangledown_{1/2} (A \bigtriangledown_v B) + \sum_{k=1}^{2^n-1}(A\sharp_{v+\frac{k(1-v)}{2^n}}B) \bigtriangledown_v (A\sharp_{\frac{kv}{2^n}}B)\right] \end{aligned} \tag{29}$$

Proof. Theorem 5.1 と同様な方法で示される． □

Acknowledgement The author was partially supported by JSPS KAKENHI 19K03525. This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

References

[1] P. Cerone and S.S.Dragomir, *Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives satisfying certain convexity assumptions*, Demonstratio Math., vol.37, no.2, pp.299-308, 2004.

[2] S.S.Dragomir and R.p.Agarwal, *Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula*, Appl. Math. Lett., vol.11, no.5, pp.91-95, 1998.

[3] S.S.Dragomir, P.Cerone and A.Sofo, *Some remarks on the midpoint rule in numerical integration*, Studia Univ. Babes-Bolyai, Math., vol.XLV, no.1, pp.63-74, 2000.

[4] S.S.Dragomir, P.Cerone and A.Sofo, *Some remarks on the trapezid rule in numerical integration*, Indian J. Pure Appl. Math., vol.31, no.5, pp.475-494, 2000.

[5] A.El Farissi, Z.Latreuch and B.Balaidi, *Hadamard type inequalities for near convex functions*, Gazata Matematica Seria A, no.1-2, 2010.

[6] S.Furuichi and H.R.Moradi, *Advances in mathematical inequalities*, De Gruyter, 2020.

[7] S.Furuichi and N.Minculete, *Refined inequalities on weighted logarithmic mean*, J. Mathematical Inequalities, vol.14, no.4, pp.1347-1357, 2020.

[8] F,Kubo and T.Ando, *Means of positive operators*, Math. Ann. vol.264, pp.205-224, 1980.

[9] F.C.Mitroi-Symeonidis, *About the precision in Jensen-Steffensen inequality*, An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform., vol.37, no.4, pp.73-84, 2010.

[10] R.Pal, M.Singh, M.S.Moslehian and J.S.Aujla, *A new class of operator monotone functions via operator means*, Linear and Multilinear Algebra, vol.64, no.12, pp.2463-2473, 2016.

[11] K.Yanagi, *Refined Hermite-Hadamard inequality and weighted logarithmic mean*, Linear and Nonlinear Analysis, vol.6, no.2, pp.167-177, 2020.