

Floquet ハミルトニアンに対する Mourre 評価について

神戸大学大学院・理学研究科数学専攻* 清瀬 周

Amane Kiyose

Department of Mathematics, Graduate School of Science

Kobe University

§1. 序論

時間周期的なポテンシャルを持つ Schrödinger 作用素 $H(t) = p^2/2 + V(t, x)$ に対するスペクトル理論と散乱理論では、 $H(t)$ に結び付けられた Floquet ハミルトニアン $K = -i\partial_t + H(t)$ が、Howland-Yajima の方法によって度々重要な役割を果たす。本稿では、足立匡義教授 (京都大学) との共同研究 [2] の内容である、標準的な Mourre 理論での K に対する新しい変形作用素と Mourre 評価を紹介する。

本研究では、以下の作用素を、 $H(t)$ に結び付けられた Floquet ハミルトニアン K に対する変形作用素として提起する。

$$A_{\lambda_0, \delta} = (\lambda_0 - \delta - D_t)^{-1} \otimes \frac{x \cdot p + p \cdot x}{2}.$$

また我々の Mourre 評価は次のような形である。

$$f_\delta(K - \lambda_0) i [K, A_{\lambda_0, \delta}] f_\delta(K - \lambda_0) \geq 2f_\delta(K - \lambda_0)^2 + C_{\lambda_0, f_\delta}.$$

$f_\delta(K - \lambda_0)$ はエネルギー K の λ_0 への局所化、 C_{λ_0, f_δ} はコンパクト作用素の誤差である。

§2 では研究の動機を述べつつ、仮定と主結果についてまとめる。§3 では Mourre 評価の証明の概要を述べる。§4 では AC Stark ハミルトニアンに対する散乱問題への応用を紹介する。

§2. 仮定と主結果

$\mathcal{H} := L^2(\mathbf{R}^d)$ 上の時間依存 Schrödinger 方程式:

$$\begin{aligned} i\partial_t u(t) &= H(t)u(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\ H(t) &= H_0 + V(t), \quad H_0 = \frac{1}{2}p^2, \end{aligned}$$

について考察する。 $p = -i\nabla_x$ であり、 $V(t)$ は周期 $T > 0$ を持つ t に関し周期的な $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ 上の実数値関数 $V(t, x)$:

$$V(t+T, x) = V(t, x), \quad (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$$

を掛ける掛け算作用素である。後述の、 $V(t, x)$ についての適当な条件のもとに $H(t)$ によって生成される解作用素 $U(t, s)$ の存在と一意性は保証できる (Yajima [5]).

$t \rightarrow \pm\infty$ の時の、 $U(t, s)\varphi$, $\varphi \in \mathcal{H}$ の漸近挙動の研究では、所謂 $H(t)$ に結び付けられた Floquet ハミルトニアン K をたびたび利用することがある。 T -周期関数をトーラス $\mathbf{T} = \mathbf{R}/(T\mathbf{Z})$ 上に移して考える。 $\pi_T : [0, T) \ni t \mapsto [t] \in \mathbf{T}$ を用いて、

$$\mathcal{L}(\mathbf{T}) := \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{T}) \mid \pi_T^{-1}\langle A \rangle \in \mathcal{L}(\mathbf{R}) \cap [0, T)\}$$

上の完備有限測度

$$\mathbf{m}_{\mathbf{T}} := \pi_{T*}(\mathbf{m}_{\mathcal{L}(\mathbf{R}) \cap [0, T)}) : \mathcal{L}(\mathbf{T}) \ni A \mapsto \mathbf{m}_{\mathcal{L}(\mathbf{R}) \cap [0, T)}(\pi_T^{-1}\langle A \rangle) \in [0, \infty]$$

を与える (π_T による誘導測度)。 $\mathcal{K} := L^2(\mathbf{T}; \mathcal{H}) \cong L^2(\mathbf{T}) \otimes L^2(\mathbf{R}^d)$ とする。 $\{\hat{U}(\sigma)\}_{\sigma \in \mathbf{R}}$ を $\Phi \in \mathcal{K}$ に対して

$$(\hat{U}(\sigma)\Phi)(t) = U(t, t-\sigma)\Phi(t-\sigma), \quad t \in \mathbf{T}$$

と定める。厳密には、 $[f] = \Phi$ に対して、

$$\hat{U}(\sigma)\Phi = [U(\pi_T^{-1}(\star), \pi_T^{-1}(\star) - \sigma)f(\star - [\sigma])].$$

これは \mathcal{K} 上の強連続 1 パラメータユニタリ群であり、Stone の定理によって、 \mathcal{K} 上の自己共役作用素 K が唯一つ存在して

$$\hat{U}(\sigma) = e^{-i\sigma K}$$

となる。 K を $H(t)$ に結び付けられた Floquet ハミルトニアンという。また、 H_0 に結び付けられた Floquet ハミルトニアン K_0 を自由 Floquet ハミルトニアンという。その時

まず、 K_0 は次の意味で $-i\partial_t + H_0$ の自然な自己共役拡張であると考えられる: $AC(\mathbf{T})$ を導関数が 2 乗可積分な \mathbf{T} 上の絶対連続関数の空間とし、 D_t を $AC(\mathbf{T})$ を定義域を持つ作用素 $-i\partial_t$ と定める。 D_t は $L^2(\mathbf{T})$ 上自己共役で、スペクトル $\sigma(D_t)$ は $\mathcal{T} := \omega\mathbf{Z}$, $\omega := \frac{2\pi}{T}$. ゆえに D_t のレゾルベント集合の実軸上の部分 $\rho(D_t) \cap \mathbf{R}$ は $\mathbf{R} \setminus \mathcal{T}$ と等しく

$$\mathbf{R} \setminus \mathcal{T} = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} I_n, \quad I_n := (n\omega, (n+1)\omega)$$

と分解できる。 $AC(\mathbf{T}) \otimes C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ は自由 Floquet ハミルトニアン K_0 のコアで、 $AC(\mathbf{T}) \otimes C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ 上の $D_t \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes H_0|_{C_0^\infty(\mathbf{R}^d)}$ は本質的に自己共役で

$$K_0 = \overline{D_t \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes H_0|_{C_0^\infty(\mathbf{R}^d)}} = \overline{D_t \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes H_0}.$$

我々の研究目的は、標準的な Mourre 理論での K に対する新しい変形作用素を得る事であるが、 K に対する変形作用素自体は横山氏 [6] により既に得られていた事にまず注意したい。時間非依存の場合とは違い、時間依存問題では通常の変形作用素 $\hat{A}_0 = (x \cdot p + p \cdot x)/2$ では自由 Floquet ハミルトニアン $K_0 = -i\partial_t + H_0$ は

$$i[K_0, \hat{A}_0] = i[H_0, \hat{A}_0] = 2H_0$$

が K_0 有界にならないので、横山氏は $\tilde{A}_1 = \{x \cdot p(1+p^2)^{-1} + (1+p^2)^{-1}p \cdot x\}/2$ と p^2 のレゾルベントを掛けた変形作用素を導入する事で、

$$i[K_0, \tilde{A}_1] = i[H_0, \tilde{A}_1] = p^2(p^2/2 + 1)^{-1},$$

初めて K に対する Mourre 理論の有効性を示した。横山氏のポテンシャルの仮定と Mourre 評価は次のようである。

Yokoyama's Assumption. V は $\mathbf{T} \times \mathbf{R}^d$ 上の関数 $V(\pi_T^{-1}(t), x)$ による \mathcal{K} 上の掛け算作用素で、以下を満たすとする。

- (1) V と $[V, \tilde{A}_1]$ は K_0 -コンパクト作用素に広がる。
- (2) $[[V, \tilde{A}_1], \tilde{A}_1]$ は K_0 -有界作用素に広がる。

例えば、 $V(t, x) = V^L(t, x) + V^S(t, x)$ と分解でき、 $V^L \in C(\mathbf{R}, C^\infty(\mathbf{R}^d))$ で $\delta > 0$ に対して

$$|\partial_x^\alpha V^L(t, x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-\delta - |\alpha|}, \quad \alpha \in (\mathbf{N} \cup \{0\})^d.$$

$V^S(t, \star)$ はコンパクトにサポートされており、 $V^S \in C(\mathbf{R}, L^p(\mathbf{R}^d))$, $p > \max\{d/2, 1\}$.

Mourre Estimate of Yokoyama. V は前述の仮定を満たすとする。

(1) $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \mathcal{T}$, $0 < \delta < d(\lambda, \mathcal{T})$, $f_\delta \in C_0^\infty([-\delta, \delta])$ に対し \mathcal{H} 上のコンパクト作用素 C_{1,λ,f_δ} が存在し

$$f_\delta(K - \lambda)i[K, \tilde{A}_1]f_\delta(K - \lambda) \geq \frac{2(d(\lambda, \mathcal{T}) - \delta)}{1 + d(\lambda, \mathcal{T}) - \delta} f_\delta(K - \lambda)^2 + C_{1,\lambda,f_\delta}.$$

(2) $\mathbf{R} \setminus \mathcal{T}$ 内の K の各固有値は多重度有限で、 \mathcal{T} にしか集積しない。 $\mathcal{T} \cup \sigma_{\text{pp}}(K)$ は可算閉集合。任意の $\lambda \in \mathbf{R} \setminus (\mathcal{T} \cup \sigma_{\text{pp}}(K))$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 $0 < \delta < d(\lambda, \mathcal{T})$ が存在し、任意の $f_\delta \in C_0^\infty([-\delta, \delta])$ に対して

$$f_\delta(K - \lambda)i[K, \tilde{A}_1]f_\delta(K - \lambda) \geq \left(\frac{2(d(\lambda, \mathcal{T}) - \delta)}{1 + d(\lambda, \mathcal{T}) - \delta} - \varepsilon \right) f_\delta(K - \lambda)^2.$$

Limiting Absorption Principle of Yokoyama. $s > 1/2$ とする。

(1) 閉区間 $I \subset \mathbf{R} \setminus (\mathcal{T} \cup \sigma_{\text{pp}}(K))$ に対して

$$\begin{aligned} \sup_{\Im z \neq 0, \Re z \in I} \|\langle \tilde{A}_1 \rangle^{-s} (K - z)^{-1} \langle \tilde{A}_1 \rangle^{-s}\|_{\mathbf{B}(\mathcal{H})} &< \infty \\ \sup_{\Im z \neq 0, \Re z \in I} \|\langle x \rangle^{-s} (K - z)^{-1} \langle x \rangle^{-s}\|_{\mathbf{B}(\mathcal{H})} &< \infty \end{aligned}$$

(2) $\lambda \in I$ に対して $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ 内で次の極限が存在。

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle \tilde{A}_1 \rangle^{-s} (K - (\lambda \pm i\varepsilon))^{-1} \langle \tilde{A}_1 \rangle^{-s}, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle x \rangle^{-s} (K - (\lambda \pm i\varepsilon))^{-1} \langle x \rangle^{-s}. \end{aligned}$$

$\langle \tilde{A}_1 \rangle^{-s} (K - (\lambda \pm i0))^{-1} \langle \tilde{A}_1 \rangle^{-s}$, $\langle x \rangle^{-s} (K - (\lambda \pm i0))^{-1} \langle x \rangle^{-s}$ は $\lambda \in \mathbf{R} \setminus (\mathcal{T} \cup \sigma_{\text{pp}}(K))$ について Hölder 連続。

一方で、多体系への拡張を得る際には、

$$\hat{A}_0 = (\hat{A}_0)^a \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes (\hat{A}_0)_a$$

と変形作用素を分解できる事が重要であるが、横山氏の \tilde{A}_1 にはそのような特性がなかったため、多体系への拡張が期待できないという困難が存在した。そこで、本研究では多体系への拡張を見込んで、次のような新しい変形作用素を導入する。 $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \mathcal{T}$ とする。唯一つ $n_{\lambda_0} \in \mathbf{Z}$ が存在して $\lambda_0 \in I_{n_{\lambda_0}}$ となる。 δ を $0 < \delta < \text{dist}(\lambda_0, \mathcal{T})$ と取る。 $\lambda_0 - \delta \in I_{n_{\lambda_0}}$ だから、 $\lambda_0 - \delta \in \mathbf{R} \setminus \mathcal{T} = \rho(D_t) \cap \mathbf{R}$. λ_0 における K に対する Mourre 評価を得るため、 p^2 のレゾルベント $(1 + p^2)^{-1}$ ではなく、 D_t のレゾルベント

$(\lambda_0 - \delta - D_t)^{-1}$ を通常の変形作用素 $\hat{A}_0 = (x \cdot p + p \cdot x)/2$ に掛け、 $\mathcal{H} \cong L^2(\mathbf{T}) \otimes L^2(\mathbf{R}^d)$ 上の自己共役作用素

$$A_{\lambda_0, \delta} = \overline{(\lambda_0 - \delta - D_t)^{-1} \otimes \hat{A}_0}$$

を導入する。まず我々の変形作用素 $A_{\lambda_0, \delta}$ は自由 Floquet ハミルトニアンとの交換子が

$$\begin{aligned} i[K_0, A_{\lambda_0, \delta}] &= i[D_t \otimes \text{Id}, (\lambda_0 - \delta - D_t)^{-1} \otimes \hat{A}_0] + i[\text{Id} \otimes H_0, (\lambda_0 - \delta - D_t)^{-1} \otimes \hat{A}_0] \\ &= i[D_t, (\lambda_0 - \delta - D_t)^{-1}] \otimes \hat{A}_0 + (\lambda_0 - \delta - D_t)^{-1} \otimes i[H_0, \hat{A}_0] \\ &= (\lambda_0 - \delta - D_t)^{-1} \otimes 2H_0 \\ &= (\lambda_0 - \delta - D_t)^{-1} \{2(K_0 - D_t)\} \end{aligned}$$

K_0 -有界である:

$$i[K_0, A_{\lambda_0, \delta}] \langle K_0 \rangle^{-1} = 2\{(\lambda_0 - \delta - D_t)^{-1} K_0 \langle K_0 \rangle^{-1} - (\lambda_0 - \delta - D_t)^{-1} D_t \langle K_0 \rangle^{-1}\}.$$

更に $i[i[K_0, A_{\lambda_0, \delta}], A_{\lambda_0, \delta}] \langle K_0 \rangle^{-1}$ も有界である。本研究の変形作用素 $A_{\lambda_0, \delta}$ の最も重要な工夫点は、 \hat{A}_0 の部分の形を変えていない事であり、多体系への拡張を考えると

$$(\lambda_0 - \delta - D_t)^{-1} \otimes \{(\hat{A}_0)^a \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes (\hat{A}_0)_a\}$$

という分解ができるため、拡張が期待できる。実際、足立氏 [1] によって、最近 3 体系に対する変形作用素 A_R

$$\begin{aligned} A_R &= \sum_{a \in \mathcal{A}} j_{a,R} A_a j_{a,R}, \quad A_a = A_{\text{AK}}^a + A_{Y,a}, \\ A_{\text{AK}}^a &= (3\omega/2 - D_t)^{-1} \otimes (\langle x^a, p^a \rangle + \langle p^a, x^a \rangle)/2, \\ A_{Y,a} &= (\langle x_a, p_a(\omega/4 + (p_a)^2/2)^{-1} \rangle + \langle (\omega/4 + (p_a)^2/2)^{-1} p_a, x_a \rangle)/2 \end{aligned}$$

が我々の型の A_{AK}^a と横山氏の型の $A_{Y,a}$ を貼り合わせる事で構成されている。 A_{AK}^a は部分系ハミルトニアンと結び付けられた Floquet ハミルトニアンに対する変形作用素、 $A_{Y,a}$ はクラスター間ハミルトニアンに対する変形作用素である。但し、一般の多体系 ($N \geq 4$) への拡張に関して同様の事ができるかはまだわかっていない。本研究では 1 体の場合の新しい変形作用素 $A_{\lambda_0, \delta}$ と Mourre 評価を与える事によって、多体系への拡張のための、最初の段階を証明する事を目的としている。

また、我々はポテンシャル $V(t, x)$ について次のような新しい条件 (V) を与える。

Condition (V). $V(t, x)$ は $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ 上の実数値関数で t に関して周期 T の関数 $V^{\text{sing}}(t, x)$ と $V^{\text{reg}}(t, x)$ の和に分解される。 $d < 3$ の時は $V^{\text{sing}} = 0$. $d \geq 3$ の時は V^{sing}

は $\infty > q_0 > d$ で $C(\mathbf{R}, L^{q_0}(\mathbf{R}^d))$ に属し $\text{supp } V^{\text{sing}}(t, \star)$ は t に関して共通の \mathbf{R}^d のコンパクト部分集合に含まれる。 $(\partial_t V^{\text{sing}})(t, \star)$ と $|\nabla V^{\text{sing}}(t, \star)|$ は $\infty > q_1 > d/2$ で $C(\mathbf{R}, L^{q_1}(\mathbf{R}^d))$ に属する。 $d = 3$ の時は $q_0 > 3$ より $1/(2q_0) + 1/2 < 1/6 + 1/2 = 2/3 = 2/d$ だから $q_1 := (1/(2q_0) + 1/2)^{-1} > d/2$ と定義する。この時 $1/q_1 = 1/(2q_0) + 1/2$ 。 $V^{\text{reg}}(t, x)$ は $C^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d)$ に属し $\rho > 0$ で減衰条件

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} |(\partial_t^k \partial_x^\alpha V^{\text{reg}})(t, x)| \leq C \langle x \rangle^{-\rho - (k + |\alpha|)}, \quad k + |\alpha| \leq 2$$

を満たす。

V^{sing} としては、 $|x|^{-\gamma}$ 型の局所特異性を念頭に置いている。§4 で $|x + c(t)|^{-\gamma}$, c は T -周期関数、という例を考えるが、その場合 $\gamma < 1$ でなければならない事がわかる。従って残念ながら Coulomb 型の特異性を許す事はできない。

また、横山氏の仮定と対比すれば、我々の条件 (V) は、正則部分が C^2 級にまで弱まっている。 t に関する微分の条件が必要であるが、それによって解作用素の存在と一意性の保証ができる。実際、谷島氏 [5] の仮定 (A.1) と (A.2) を満たす事が次のように確かめられる。 $I \subset \mathbf{R}$ をコンパクト区間とする。(A.1) については、 $\alpha = 2$, $p = q_0$, $\beta > 1$ は任意と選べば良い。 $q_0 > d$ より $1/2 < 1 - d/(2q_0)$ で任意の $\beta > 1$ に対して

$$V = V^{\text{sing}} + V^{\text{reg}} \in C(I, L^{q_0}(\mathbf{R}^d)) + C(I, L^\infty(\mathbf{R}^d)) \subset L^2(I, L^{q_0}(\mathbf{R}^d)) + L^\beta(I, L^\infty(\mathbf{R}^d)).$$

(A.2) については、まず $\text{supp } V^{\text{sing}}(t, \star)$, ($t \in \mathbf{R}$) は、共通のコンパクト集合 C に含まれるから、 $\psi_C \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ を $\psi_C(x) = 1$ on C と選ぶ。この時、任意の $q_0 \geq \tilde{p} \geq 1$ に対して、 $1/\tilde{p} = 1/q_0 + (1/\tilde{p} - 1/q_0)$ での Hölder の不等式により、任意の $t, t_0 \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \|V^{\text{sing}}(t, \star) - V^{\text{sing}}(t_0, \star)\|_{\tilde{p}} &= \|(V^{\text{sing}}(t, \star) - V^{\text{sing}}(t_0, \star))\psi_C\|_{\tilde{p}} \\ &\leq \|V^{\text{sing}}(t, \star) - V^{\text{sing}}(t_0, \star)\|_{q_0} \|\psi_C\|_{(1/\tilde{p} - 1/q_0)^{-1}} \end{aligned}$$

だから、 $V^{\text{sing}} \in C(I, L^{\tilde{p}}(\mathbf{R}^d))$ となる。 $d \geq 4$ の場合は $\tilde{p} = p = q_0$ と選べば良く、 $d = 3$ の場合は $q_0 > 3 > 2 \geq 1$ より $\tilde{p} = 2$ と選べる。また、 $\partial_t V$ の条件については、まず正則部分は $\partial_t V^{\text{reg}} \in C^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d) \subset L^\beta(I, L^\infty(\mathbf{R}^d))$ 。特異部分については、任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d)$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^d} \partial_t V^{\text{sing}}(t, x) \varphi(t, x) dx dt &= - \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^d} V^{\text{sing}}(t, x) \psi_C(x) \partial_t \varphi(t, x) dx dt \\ &= - \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^d} V^{\text{sing}}(t, x) \partial_t (\psi_C(x) \varphi(t, x)) dx dt \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^d} \partial_t V^{\text{sing}}(t, x) \psi_C(x) \varphi(t, x) dx dt$$

だから、

$$\partial_t V^{\text{sing}}(t, x) = \partial_t V^{\text{sing}}(t, x) \psi_C(x), \text{ for a.e.}(t, x)$$

となるが、更に両辺は t について連続だから、任意の t に対して

$$\partial_t V^{\text{sing}}(t, x) = \partial_t V^{\text{sing}}(t, x) \psi_C(x), \text{ for a.e.}x.$$

従って V^{sing} の時と同じ方法で、任意の $\alpha_1 \geq 1$ と任意の $1 \leq p_1 \leq q_1$ に対して、 $1/p_1 = 1/q_1 + (1/p_1 - 1/q_1)$ での Hölder の不等式より、

$$\partial_t V^{\text{sing}} \in C(I, L^{p_1}(\mathbf{R}^d)) \subset L^{\alpha_1}(I, L^{p_1}(\mathbf{R}^d))$$

となる。 $d \geq 5$ の時は $q_0 > d$ から、 $1/2 \geq 5/(2d) = 1/(2d) + 2/d > 1/(2q_0) + 2/d$, $q_1 > d/2$ より $2/d > 1/q_1$ だから $q_1 > (1/(2q_0) + 2/d)^{-1} > 2$. 従って、 $p_1 := (1/(2q_0) + 2/d)^{-1} = 2dq_0/(d + 4q_0)$ と選べる。 $d = 4$ の時は $q_1 > 4/2 = 2$ より $1/(2q_0) + 1/2 > 1/q_1$ だから $q_1 > 2q_0/(q_0 + 1)$. $2q_0 > 2q_0/(q_0 + 1)$ と合わせれば、 $2q_0/(q_0 + 1) < p_1 := \min\{2q_0, q_1\} \leq 2q_0$ と選べる。 $d = 3$ の時は $1/q_1 = 1/(2q_0) + 1/2$ だから $q_1 = 2q_0/(q_0 + 1)$. 従って、 $q_2 := q_1$ と選べば良い。従って、 V が条件 (V) を満たす時、谷島氏の仮定 (A.1), (A.2) が満たされるので、 $H(t)$ によって解作用素 $U(t, s)$ が一意的に生成され、 $H(t)$ に結び付けられた Floquet ハミルトニアン K が \mathcal{K} 上の自己共役作用素として定義される。この時

$$\mathcal{D}(K) = \mathcal{D}(K_0)$$

であり、 K は次の意味で $-i\partial_t + H(t)$ の自然な自己共役拡張と考えられる。 $AC(\mathbf{T}) \otimes C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ 上の $D_t \otimes \text{Id} + \int_{\mathbf{T}}^\oplus H(\pi_T^{-1}(t)) dt$ は本質的に自己共役で、

$$K = D_t \otimes \text{Id} + \overline{\int_{\mathbf{T}}^\oplus H(\pi_T^{-1}(t)) dt}.$$

また、任意の $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \mathcal{I}$, $0 < \delta < d(\lambda_0, \mathcal{I})$ に対して、

$$\langle K_0 \rangle^{-1/2} i[V, A_{\lambda_0, \delta}] \langle K_0 \rangle^{-1}, \quad \langle K_0 \rangle^{-1} i[i[V, A_{\lambda_0, \delta}], A_{\lambda_0, \delta}] \langle K_0 \rangle^{-1}$$

の有界性も保証できる。これらを $i[K_0, A_{\lambda_0, \delta}]$ と $i[i[K_0, A_{\lambda_0, \delta}], A_{\lambda_0, \delta}]$ の K_0 -有界性と合わせれば、

$$\langle K \rangle^{-1/2} i[K, A_{\lambda_0, \delta}] \langle K \rangle^{-1}, \quad i[K_0, A_{\lambda_0, \delta}] \langle K \rangle^{-1}, \quad \langle K \rangle^{-1} i[i[K, A_{\lambda_0, \delta}], A_{\lambda_0, \delta}] \langle K \rangle^{-1}$$

の有界性が確かめられる (Hypotheses of Perry, Sigal, Simon [3]). 更に、 K_0 の局所コンパクト性を用いれば、

$$V\langle K_0 \rangle^{-1}, \quad \langle K_0 \rangle^{-1}i[V, A_{\lambda_0, \delta}]\langle K_0 \rangle^{-1}$$

はコンパクトであり、従って、任意の $f \in S^{-m}$, $m > 0$ に対して、

$$f(K) - f(K_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z)(z - K)^{-1}V(z - K_0)^{-1}dz \wedge d\bar{z}$$

はコンパクトである。

ここで主結果を述べる。

Theorem (Mourre Estimate). V は条件 (V) を満たすとする。

(1) 任意の $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \mathcal{T}$, $0 < \delta < d(\lambda_0, \mathcal{T})$, $f_\delta \in C_0^\infty([-\delta, \delta])$ に対して、 \mathcal{H} 上のコンパクト作用素 C_{λ_0, f_δ} が存在して

$$f_\delta(K - \lambda_0)i[K, A_{\lambda_0, \delta}]f_\delta(K - \lambda_0) \geq 2f_\delta(K - \lambda_0)^2 + C_{\lambda_0, f_\delta}.$$

$\sigma_{\text{pp}}(K) \cap [\lambda_0 - \delta/2, \lambda_0 + \delta/2]$ は有限集合で、 $[\lambda_0 - \delta/2, \lambda_0 + \delta/2]$ 内の K の固有値は多重度有限である。

(2) $\mathbf{R} \setminus \mathcal{T}$ 内の K の各固有値は多重度有限で、 \mathcal{T} にしか集積しない。 $\mathcal{T} \cup \sigma_{\text{pp}}(K)$ は可算閉集合である。任意の $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus (\mathcal{T} \cup \sigma_{\text{pp}}(K))$, $\varepsilon > 0$ に対し、ある $0 < \delta < d(\lambda_0, \mathcal{T})$ が存在して、任意の $f_\delta \in C_0^\infty([-\delta, \delta])$ に対して

$$f_\delta(K - \lambda_0)i[K, A_{\lambda_0, \delta}]f_\delta(K - \lambda_0) \geq (2 - \varepsilon)f_\delta(K - \lambda_0)^2.$$

Theorem (Limiting Absorption Principle).

(1) 任意の $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus (\mathcal{T} \cup \sigma_{\text{pp}}(K))$, $0 < \varepsilon < 2$ に対して、 $\delta > 0$ を $[\lambda_0 - 2\delta, \lambda_0 + 2\delta] \subset \mathbf{R} \setminus (\mathcal{T} \cup \sigma_{\text{pp}}(K))$ かつ

$$f_{2\delta}(K - \lambda_0)i[K, A_{\lambda_0, 2\delta}]f_{2\delta}(K - \lambda_0) \geq (2 - \varepsilon)f_{2\delta}(K - \lambda_0)^2$$

と選べば、任意の $s > 1/2$ に対して

$$\sup_{\Im m z \neq 0, \Re e z \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]} \|\langle A_{\lambda_0, 2\delta} \rangle^{-s}(K - z)^{-1}\langle A_{\lambda_0, 2\delta} \rangle^{-s}\|_{\mathbf{B}(\mathcal{H})} < \infty.$$

$\langle A_{\lambda_0, 2\delta} \rangle^{-s}(K - z)^{-1}\langle A_{\lambda_0, 2\delta} \rangle^{-s}$ は $z \in S_{\lambda_0, \delta, \pm}$ の $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ -値 $\theta(s)$ -Hölder 連続関数である。

$$\theta(s) = (\min\{s - 1/2, \rho\})/(\min\{s - 1/2, \rho\} + 1),$$

$$S_{\lambda_0, \delta, \pm} = \{\zeta \in \mathbf{C} \mid 0 < \pm \Im \zeta \leq 1, \Re \zeta \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]\}.$$

任意の $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ に対して $\mathbf{B}(\mathcal{X})$ 内で次の極限が存在する。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \langle A_{\lambda_0, 2\delta} \rangle^{-s} (K - (\lambda \pm i\epsilon))^{-1} \langle A_{\lambda_0, 2\delta} \rangle^{-s}.$$

$\langle A_{\lambda_0, 2\delta} \rangle^{-s} (K - (\lambda \pm i0))^{-1} \langle A_{\lambda_0, 2\delta} \rangle^{-s}$ は λ に関する $\theta(s)$ -Hölder 連続関数である。

(2) 任意の $1/2 < s \leq 1$ と任意の閉区間 $I \subset \mathbf{R} \setminus (\mathcal{T} \cup \sigma_{\text{pp}}(K))$ に対して

$$\sup_{\Im z \neq 0, \Re z \in I} \|\langle x \rangle^{-s} (K - z)^{-1} \langle x \rangle^{-s}\|_{\mathbf{B}(\mathcal{X})} < \infty.$$

$\langle x \rangle^{-s} (K - z)^{-1} \langle x \rangle^{-s}$ は $z \in S_{I, \pm}$ の $\mathbf{B}(\mathcal{X})$ -値 $\theta(s)$ -Hölder 連続関数である。

$$S_{I, \pm} = \{\zeta \in \mathbf{C} \mid 0 < \pm \Im \zeta \leq 1, \Re \zeta \in I\}.$$

任意の $\lambda \in I$ に対して $\mathbf{B}(\mathcal{X})$ 内で次の極限が存在する。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \langle x \rangle^{-s} (K - (\lambda \pm i\epsilon))^{-1} \langle x \rangle^{-s}.$$

$\langle x \rangle^{-s} (K - (\lambda \pm i0))^{-1} \langle x \rangle^{-s}$ は λ に関する $\theta(s)$ -Hölder 連続関数である。

§3. Mourre 評価の証明について

任意の $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \mathcal{T}$ と $0 < \delta < \text{dist}(\lambda_0, \mathcal{T})$ に対して、まず次を証明する。

$$\sup_{|\sigma| \leq 1} \|K_0 e^{i\sigma A_{\lambda_0, \delta}} (K_0 + i)^{-1}\|_{\mathbf{B}(\mathcal{X})} < \infty.$$

自由 Floquet ハミルトニアン K_0 と $A_{\lambda_0, \delta}$ を直積分分解する方法が鍵となる。 $L^2(\mathbf{T})$ は D_t の固有ベクトルからなる完全正規直交系を持ち、 k 番目は固有値 $k\omega$ に対応している。各 $k \in \mathbf{Z}$ に対する固有射影を P_k とすれば、

$$D_t = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} k\omega P_k|_{AC(\mathbf{T})}.$$

これを用いれば、 K_0 が

$$K_0 = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k|_{AC(\mathbf{T})} \otimes (k\omega + H_0)}$$

と分解される事は知られている。

Lemma 1. (1) 任意の $\varphi \in L^2(\mathbf{T})$, $\{\psi_k\}_{k \in \mathbf{Z}} \in \ell^\infty(\mathbf{Z}; \mathcal{H})$ に対し \mathcal{H} 上の級数 $\sum_{k \in \mathbf{Z}} P_k \varphi \otimes \psi_k$ は無条件収束で、

$$\left\| \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \varphi \otimes \psi_k \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \|P_k \varphi\|_{L^2(\mathbf{T})}^2 \|\psi_k\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sup_{k \in \mathbf{Z}} \|\psi_k\|_{\mathcal{H}}^2 \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{T})}^2.$$

(2) 任意の $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ に対して、

$$(K_0 - z)^{-1} = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1}}.$$

(3)

$$A_{\lambda_0, \delta} = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes (\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1} \hat{A}_0}.$$

(4) 任意の $\sigma \in \mathbf{R}$ に対して、

$$e^{-i\sigma A_{\lambda_0, \delta}} = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes e^{-i\lambda_0 - \delta - k\omega} \hat{A}_0}.$$

Proof. (1) $L^2(\mathbf{T})$ の今の完全正規直交系を $\{e_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ と書き、 \mathcal{H} の一つの完全正規直交系 $\{e'_l\}_{l \in \mathbf{N}}$ を取る。その時 $\{e_k \otimes e'_l\}_{(k,l) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}}$ は \mathcal{H} の完全正規直交系である。任意の $\varphi \in L^2(\mathbf{T})$, $\{\psi_k\}_{k \in \mathbf{Z}} \in \ell^\infty(\mathbf{Z}, \mathcal{H})$ に対し、Parseval の等式から、

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{l \in \mathbf{N}} |(\varphi, e_k)_{L^2(\mathbf{T})} (\psi_k, e'_l)_{\mathcal{H}}|^2 &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} |(\varphi, e_k)_{L^2(\mathbf{T})}|^2 \sum_{l \in \mathbf{N}} |(\psi_k, e'_l)_{\mathcal{H}}|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} |(\varphi, e_k)_{L^2(\mathbf{T})}|^2 \|\psi_k\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \sup_{k \in \mathbf{Z}} \|\psi_k\|_{\mathcal{H}}^2 \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{T})}^2 < +\infty. \end{aligned}$$

従って、 $(\varphi, e_k)_{L^2(\mathbf{T})} (\psi_k, e'_l)_{\mathcal{H}} e_k \otimes e'_l$ は $(k, l) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ について \mathcal{H} 上総和可能だから、

$$P_k \varphi \otimes \psi_k = (\varphi, e_k)_{L^2(\mathbf{T})} e_k \otimes \sum_{l \in \mathbf{N}} (\psi_k, e'_l)_{\mathcal{H}} e'_l = \sum_{l \in \mathbf{N}} (\varphi, e_k)_{L^2(\mathbf{T})} (\psi_k, e'_l)_{\mathcal{H}} e_k \otimes e'_l$$

も $k \in \mathbf{Z}$ について \mathcal{H} 上総和可能である。

$$\begin{aligned} \left\| \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \varphi \otimes \psi_k \right\|_{\mathcal{H}}^2 &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} (P_k \varphi \otimes \psi_k, P_l \varphi \otimes \psi_l)_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} (P_k \varphi, P_l \varphi)_{L^2(\mathbf{T})} (\psi_k, \psi_l)_{\mathcal{H}} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \|P_k \varphi\|_{L^2(\mathbf{T})}^2 \|\psi_k\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \sup_{k \in \mathbf{Z}} \|\psi_k\|_{\mathcal{H}}^2 \sum_{l \in \mathbf{Z}} \|P_l \varphi\|_{L^2(\mathbf{T})}^2 = \sup_{k \in \mathbf{Z}} \|\psi_k\|_{\mathcal{H}}^2 \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{T})}^2. \end{aligned}$$

(2) $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ とする。 $\Im m z \neq 0$ だから、任意の $\varphi \in L^2(\mathbf{T})$, $\psi \in \mathcal{H}$ に対し、 $\|(k\omega + H_0 - z)^{-1}\| \leq 1/|\Im m z|$, ($k \in \mathbf{Z}$) であり、(1) によって $\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1}(\varphi \otimes \psi)$ が定義できる。

$$\begin{aligned}
& (K_0 - z) \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1}(\varphi \otimes \psi) \\
&= \overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k|_{AC(\mathbf{T})} \otimes (k\omega + H_0 - z)} \circ \bigoplus_{l \in \mathbf{Z}} P_l \otimes (l\omega + H_0 - z)^{-1}(\varphi \otimes \psi) \\
&= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} P_k P_l \varphi \otimes (k\omega + H_0 - z)(l\omega + H_0 - z)^{-1} \psi \\
&= \sum_{k \in \mathbf{Z}} P_k \varphi \otimes \psi = \varphi \otimes \psi.
\end{aligned}$$

従って、任意の $u \in L^2(\mathbf{T}) \otimes_{\text{alg}} \mathcal{H}$ に対し

$$(K_0 - z) \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1} u = u.$$

任意の $v \in L^2(\mathbf{T}) \otimes \mathcal{H} \cong \mathcal{H}$ に対し、 $\{u_j\}_{j \in \mathbf{N}} \subset L^2(\mathbf{T}) \otimes_{\text{alg}} \mathcal{H}$ が存在して、

$$(u_j, \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1} u_j) \rightarrow (v, \overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1} v}) \quad (j \rightarrow \infty).$$

$K_0 - z$ は閉作用素で、

$$(K_0 - z) \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1} u_j = u_j \rightarrow v \quad (j \rightarrow \infty)$$

だから、 $\overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1} v} \in \mathcal{D}(K_0)$,

$$v = (K_0 - z) \overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1} v}.$$

従って

$$(K_0 - z) \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1} = \text{Id}_{\mathcal{H}}.$$

同様に

$$\overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1} (K_0 - z)} = \text{Id}_{\mathcal{D}(K_0)}.$$

(3) まず、任意の $k \in \mathbf{Z}$ に対して、 $|\lambda_0 - \delta - k\omega| \geq \text{dist}(\lambda_0, \mathcal{T}) - \delta$ より

$$|(\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1}| \leq (\text{dist}(\lambda_0, \mathcal{T}) - \delta)^{-1}$$

という事に注意すれば、任意の $\varphi \in L^2(\mathbf{T})$, $\psi \in \mathcal{D}(\hat{A}_0)$ に対し、(1) より $\sum_{k \in \mathbf{Z}} P_k \varphi \otimes (\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1} \hat{A}_0 \psi$ は定義できる。 $(D_t - z)^{-1} = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} (k\omega - z)^{-1} P_k$, ($z \in \rho(D_t)$) を用いれば、

$$\begin{aligned} \{(\lambda_0 - \delta - D_t)^{-1} \otimes \hat{A}_0\}(\varphi \otimes \psi) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} (\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1} P_k \varphi \otimes \hat{A}_0 \psi \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} P_k \varphi \otimes (\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1} \hat{A}_0 \psi \end{aligned}$$

だから、

$$A_{\lambda_0, \delta} = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes (\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1} \hat{A}_0}.$$

(4) 任意の $\sigma \in \mathbf{R}$, $\sum_{m=1}^N \alpha_m \varphi_m \otimes \psi_m \in L^2(\mathbf{T}) \otimes_{\text{alg}} \mathcal{H}$ に対して、

$$\begin{aligned} & \left\| \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes e^{-i \frac{\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega}} \hat{A}_0 \sum_{m=1}^N \alpha_m \varphi_m \otimes \psi_m \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \alpha_m \bar{\alpha}_n \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} (P_k \varphi_m \otimes e^{-i \frac{\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega}} \hat{A}_0 \psi_m, P_l \varphi_n \otimes e^{-i \frac{\sigma}{\lambda_0 - \delta - l\omega}} \hat{A}_0 \psi_n)_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \alpha_m \bar{\alpha}_n \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} (P_k \varphi_m, P_l \varphi_n)_{L^2(\mathbf{T})} (e^{-i \frac{\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega}} \hat{A}_0 \psi_m, e^{-i \frac{\sigma}{\lambda_0 - \delta - l\omega}} \hat{A}_0 \psi_n)_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \alpha_m \bar{\alpha}_n \sum_{k \in \mathbf{Z}} (P_k \varphi_m, P_k \varphi_n)_{L^2(\mathbf{T})} (\psi_m, \psi_n)_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \alpha_m \bar{\alpha}_n (\psi_m, \psi_n)_{\mathcal{H}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} (P_k \varphi_m, P_l \varphi_n)_{L^2(\mathbf{T})} \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \alpha_m \bar{\alpha}_n (\psi_m, \psi_n)_{\mathcal{H}} (\varphi_m, \varphi_n)_{L^2(\mathbf{T})} = \left\| \sum_{m=1}^N \alpha_m \varphi_m \otimes \psi_m \right\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

従って、 $\overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes e^{-i \frac{\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega}} \hat{A}_0}$ は等長である。全射性と群特性も (2) と同じ計算からわかる。 $\varphi \in L^2(\mathbf{T})$, $\psi \in \mathcal{H}$, $\varepsilon > 0$ とする。

$$\begin{aligned} & \left\| \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes e^{-i \frac{\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega}} \hat{A}_0 (\varphi \otimes \psi) - \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes \text{Id}(\varphi \otimes \psi) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \left\| \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \varphi \otimes (e^{-i \frac{\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega}} \hat{A}_0 \psi - \psi) \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \|P_k \varphi\|_{L^2(\mathbf{T})}^2 \|e^{-i \frac{\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega}} \hat{A}_0 \psi - \psi\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

$e^{-i\sigma'\hat{A}_0}$ の強連続性より、 $|\sigma'| < \delta_0$ とすると、 $\|e^{-i\sigma'\hat{A}_0}\psi - \psi\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$ とできる。今、 $|\sigma| < \delta_0(\text{dist}(\lambda_0, \mathcal{T}) - \delta)$ と取れば、任意の $k \in \mathbf{Z}$ に対して、 $|\lambda_0 - \delta - k\omega| \geq \text{dist}(\lambda_0, \mathcal{T}) - \delta$ だから、

$$\left| \frac{\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega} \right| < \frac{\delta_0(\text{dist}(\lambda_0, \mathcal{T}) - \delta)}{\text{dist}(\lambda_0, \mathcal{T}) - \delta} = \delta_0.$$

従って、

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \|P_k \varphi\|_{L^2(\mathbf{T})}^2 \|e^{-i\lambda_0 - \delta - k\omega} \hat{A}_0 \psi - \psi\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{k \in \mathbf{Z}} \|P_k \varphi\|_{L^2(\mathbf{T})}^2 \varepsilon^2 = \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{T})}^2 \varepsilon^2.$$

三角不等式を用いれば、任意の $\sum_{m=1}^N \alpha_m \varphi_m \otimes \psi_m \in L^2(\mathbf{T}) \otimes_{\text{alg}} \mathcal{H}$ に対し

$$\begin{aligned} & \left\| \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes e^{-i\lambda_0 - \delta - k\omega} \hat{A}_0 \left(\sum_{m=1}^N \alpha_m \varphi_m \otimes \psi_m \right) - \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes \text{Id} \left(\sum_{m=1}^N \alpha_m \varphi_m \otimes \psi_m \right) \right\|_{\mathcal{H}} \\ & \leq \sum_{m=1}^N |\alpha_m| \left\| \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes e^{-i\lambda_0 - \delta - k\omega} \hat{A}_0 (\varphi_m \otimes \psi_m) - \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes \text{Id} (\varphi_m \otimes \psi_m) \right\|_{\mathcal{H}} \\ & \rightarrow 0 \quad (\sigma \rightarrow 0). \end{aligned}$$

故に $\overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes e^{-i\lambda_0 - \delta - k\omega} \hat{A}_0}$ は $\sigma = 0$ で強連続であり、群特性と合わせると \mathbf{R} 上強連続である。従って $\{\overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes e^{-i\lambda_0 - \delta - k\omega} \hat{A}_0}\}_{\sigma \in \mathbf{R}}$ は \mathcal{H} 上の強連続 1 パラメータユニタリ群である。 $\mathcal{D}(\hat{A}_0)$ は \mathcal{H} で稠密だから、 $L^2(\mathbf{T}) \otimes \mathcal{D}(\hat{A}_0)$ は \mathcal{H} で稠密である。任意の $\sigma \in \mathbf{R}$ に対して、 $e^{-i\lambda_0 - \delta - k\omega} \hat{A}_0$ は $\mathcal{D}(\hat{A}_0)$ を不変にするから、 $\overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes e^{-i\lambda_0 - \delta - k\omega} \hat{A}_0}$ は $L^2(\mathbf{T}) \otimes \mathcal{D}(\hat{A}_0)$ を不変にする。任意の $\varphi \in L^2(\mathbf{T})$, $\psi \in \mathcal{D}(\hat{A}_0)$ に対し、

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\varepsilon} \left(\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \varphi \otimes e^{-i\lambda_0 - \delta - k\omega} \hat{A}_0 \psi - \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \varphi \otimes e^{-i\lambda_0 - \delta - k\omega} \psi \right) \right. \\ & \quad \left. + i \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \varphi \otimes e^{-i\lambda_0 - \delta - k\omega} \hat{A}_0 (\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1} \hat{A}_0 \psi \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\ & = \left\| \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \varphi \otimes \left\{ \frac{1}{\varepsilon} (e^{-i\lambda_0 - \delta - k\omega} \hat{A}_0 \psi - e^{-i\lambda_0 - \delta - k\omega} \psi) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + i e^{-i\lambda_0 - \delta - k\omega} \hat{A}_0 (\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1} \hat{A}_0 \psi \right\} \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\ & = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \|P_k \varphi\|_{L^2(\mathbf{T})}^2 \left\| \frac{1}{\varepsilon} (e^{-i\lambda_0 - \delta - k\omega} \hat{A}_0 \psi - \psi) + i(\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1} \hat{A}_0 \psi \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\ & =: \sum_{k \in \mathbf{Z}} \|P_k \varphi\|_{L^2(\mathbf{T})}^2 \alpha(k, \varepsilon). \end{aligned}$$

任意の $k \in \mathbf{Z}$ に対して、 $(\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1} \hat{A}_0$ も自己共役で、 $\psi \in \mathcal{D}(\hat{A}_0)$ だから $\alpha(k, \varepsilon) \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \neq 0$). 不等式 $|e^{ix} - 1| \leq |x|$, $x \in \mathbf{R}$ より、

$$\begin{aligned} \alpha(k, \varepsilon) &= \int_{\mathbf{R}} \left| \frac{e^{-i\frac{\varepsilon k}{\lambda_0 - \delta - k\omega}} - 1}{\varepsilon} + i \frac{\kappa}{\lambda_0 - \delta - k\omega} \right|^2 d\|E_{\hat{A}_0}(\kappa)\psi\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq 4 \int_{\mathbf{R}} \left| \frac{\kappa}{\lambda_0 - \delta - k\omega} \right|^2 d\|E_{\hat{A}_0}(\kappa)\psi\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 4(\text{dist}(\lambda_0, \mathcal{T}) - \delta)^{-2} \|\hat{A}_0\psi\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

最後の項は k, ε に依らない定数で、 $\sum_{k \in \mathbf{Z}} \|P_k \varphi\|_{L^2(\mathbf{T})}^2 = \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{T})}^2 < \infty$ だから、Lebesgue の収束定理より、 $\sum_{k \in \mathbf{Z}} \|P_k \varphi\|_{L^2(\mathbf{T})}^2 \alpha(k, \varepsilon) \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \neq 0$). 従って、

$\overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega} \hat{A}_0}(\varphi \otimes \psi)}$ は強微分可能で、

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\sigma} \overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega} \hat{A}_0}(\varphi \otimes \psi)} \right|_{\sigma=0} &= -i \sum_{k \in \mathbf{Z}} P_k \varphi \otimes (\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1} \hat{A}_0 \psi \\ &= -i A_{\lambda_0, \delta}(\varphi \otimes \psi). \end{aligned}$$

従って、 $e^{-i\sigma A_{\lambda_0, \delta}} = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega} \hat{A}_0}}$ が得られた。 \square

以上より、

$$\begin{aligned} &e^{i\sigma A_{\lambda_0, \delta}} (K_0 + i)^{-1} e^{-i\sigma A_{\lambda_0, \delta}} \\ &= \overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes e^{i\frac{\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega} \hat{A}_0}} \circ \overline{\bigoplus_{l \in \mathbf{Z}} P_l \otimes (l\omega + H_0 + i)^{-1}} \circ \overline{\bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} P_m \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0 - \delta - m\omega} \hat{A}_0}} \\ &= \overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes \{e^{i\frac{\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega} \hat{A}_0} (k\omega + H_0 + i)^{-1} e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega} \hat{A}_0}\}}. \end{aligned}$$

ここで、 \hat{A}_0 は伸張の生成作用素 $(e^{i\sigma' \hat{A}_0} \psi)(x) = e^{\sigma' d/2} \psi(e^{\sigma' x})$ であり、その Fourier 変換との交換関係 $\mathcal{F} e^{-i\sigma' \hat{A}_0} = e^{i\sigma' \hat{A}_0} \mathcal{F}$ に注意すれば、 $\sigma' = \sigma/(\lambda_0 - \delta - k\omega)$ に対し

$$\begin{aligned} e^{i\sigma' \hat{A}_0} (k\omega + H_0 + i)^{-1} e^{-i\sigma' \hat{A}_0} &= e^{i\sigma' \hat{A}_0} \mathcal{F}^{-1} (k\omega + \star^2/2 + i)^{-1} \mathcal{F} e^{-i\sigma' \hat{A}_0} \\ &= e^{i\sigma' \hat{A}_0} e^{-i\sigma' \hat{A}_0} \mathcal{F}^{-1} (k\omega + e^{-2\sigma'} \star^2/2 + i)^{-1} \mathcal{F} \\ &= (k\omega + e^{-2\sigma'} H_0 + i)^{-1}. \end{aligned}$$

まとめると、任意の $|\sigma| \leq 1$ に対して、

$$\begin{aligned} &K_0 e^{i\sigma A_{\lambda_0, \delta}} (K_0 + i)^{-1} e^{-i\sigma A_{\lambda_0, \delta}} \\ &= \overline{\bigoplus_{l \in \mathbf{Z}} P_l|_{AC(\mathbf{T})} \otimes (l\omega + H_0)} \circ \overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes (k\omega + e^{-\frac{2\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega}} H_0 + i)^{-1}} \end{aligned}$$

$$= \overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes \{(k\omega + H_0)(k\omega + e^{-\frac{2\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega}} H_0 + i)^{-1}\}}.$$

この作用素ノルムは、次の計算を用いて評価する。

Lemma 2. 任意の $\{T(k)\}_{k \in \mathbf{Z}} \in \ell^\infty(\mathbf{Z}; \mathbf{B}(\mathcal{H}))$ に対して、 $\overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes T(k)} \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ であり、

$$\left\| \overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes T(k)} \right\|_{\mathbf{B}(\mathcal{H})} \leq \sup_{k \in \mathbf{Z}} \|T(k)\|_{\mathbf{B}(\mathcal{H})}.$$

Proof. F_1, F_2 をそれぞれ \mathbf{Z}, \mathbf{N} の任意の有限部分集合、 $\{c_{l,m}\}_{(l,m) \in F_1 \times F_2}$ を任意の複素数列とする。 $\sum_{(l,m) \in F_1 \times F_2} c_{l,m} e_l \otimes e'_m$ は、 \mathcal{H} の稠密な部分空間 $\text{L.h.}(\{e_l \otimes e'_m \mid (l,m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}\})$ の任意の要素を表している。

$$\begin{aligned} & \left\| \overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes T(k)} \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \sum_{(l,m) \in F_1 \times F_2} \sum_{(l',m') \in F_1 \times F_2} c_{l,m} \overline{c_{l',m'}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{k' \in \mathbf{Z}} (P_k e_l, P_{k'} e_{l'})_{L^2(\mathbf{T})} (T(k) e'_m, T(k') e'_{m'})_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{(l,m) \in F_1 \times F_2} \sum_{(l',m') \in F_1 \times F_2} c_{l,m} \overline{c_{l',m'}} (e_l, e_{l'})_{L^2(\mathbf{T})} (T(l) e'_m, T(l') e'_{m'})_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{l \in F_1} \sum_{m \in F_2} \sum_{m' \in F_2} c_{l,m} \overline{c_{l,m'}} (T(l) e'_m, T(l) e'_{m'})_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{l \in F_1} \left(\sum_{m \in F_2} c_{l,m} T(l) e'_m, \sum_{m' \in F_2} c_{l,m'} T(l) e'_{m'} \right)_{\mathcal{H}} = \sum_{l \in F_1} \|T(l)\|_{\mathcal{H}}^2 \sum_{m \in F_2} |c_{l,m}|^2 \\ &\leq \sup_{k \in \mathbf{Z}} \|T(k)\|_{\mathbf{B}(\mathcal{H})}^2 \sum_{l \in F_1} \left\| \sum_{m \in F_2} c_{l,m} e'_m \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \sup_{k \in \mathbf{Z}} \|T(k)\|_{\mathbf{B}(\mathcal{H})}^2 \sum_{l \in F_1} \sum_{m \in F_2} |c_{l,m}|^2 \\ &= \sup_{k \in \mathbf{Z}} \|T(k)\|_{\mathbf{B}(\mathcal{H})}^2 \left\| \sum_{(l,m) \in F_1 \times F_2} c_{l,m} e_l \otimes e'_m \right\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

従って $\overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes T(k)}$ は $\text{L.h.}(\{e_l \otimes e'_m \mid (l,m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}\})$ 上有界だから、 \mathcal{H} 上へのただ一つの有界な拡張を持つ。一方それは $\overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes T(k)}$ と一致する。 \square

そこで、 $\|(k\omega + H_0)(k\omega + e^{-\frac{2\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega}} H_0 + i)^{-1}\|_{\mathbf{B}(\mathcal{H})}$ を評価するため、 $[0, \infty) \times \mathbf{R}$ 上の関数

$$\eta_\sigma(\kappa, \tau) = \frac{(\tau + \kappa)^2}{(\tau + e^{-\frac{2\sigma}{\lambda_0 - \delta - \tau}} \kappa)^2 + 1}$$

を導入し、次の通り解析する。任意の $k \in \mathbf{Z}$ に対して、

$$\eta_\sigma(\kappa, k\omega) \leq M_{\lambda_0, \delta}^2, \quad \kappa \in [0, \infty).$$

作用素解析によって、

$$\begin{aligned}
& \|(k\omega + H_0)(k\omega + e^{-\frac{2\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega}} H_0 + i)^{-1} \varphi\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \int_0^\infty |(k\omega + \kappa)(k\omega + e^{-\frac{2\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega}} \kappa + i)^{-1}|^2 d\|E_{H_0}(\kappa)\varphi\|^2 \\
&= \int_0^\infty \eta_\sigma(\kappa, k\omega) d\|E_{H_0}(\kappa)\varphi\|^2 \leq M_{\lambda_0, \delta}^2 \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \varphi \in \mathcal{H},
\end{aligned}$$

ここで E_{H_0} は H_0 のスペクトル測度である。以上より、

$$\begin{aligned}
& \sup_{|\sigma| \leq 1} \|K_0 e^{i\sigma A_{\lambda_0, \delta}} (K_0 + i)^{-1}\|_{\mathbf{B}(\mathcal{X})} \\
&= \sup_{|\sigma| \leq 1} \|K_0 e^{i\sigma A_{\lambda_0, \delta}} (K_0 + i)^{-1} e^{-i\sigma A_{\lambda_0, \delta}}\|_{\mathbf{B}(\mathcal{X})} \\
&= \sup_{|\sigma| \leq 1} \overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes \{(k\omega + H_0)(k\omega + e^{-\frac{2\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega}} H_0 + i)^{-1}\}}\|_{\mathbf{B}(\mathcal{X})} \\
&\leq \sup_{|\sigma| \leq 1} \sup_{k \in \mathbf{Z}} \|(k\omega + H_0)(k\omega + e^{-\frac{2\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega}} H_0 + i)^{-1}\|_{\mathbf{B}(\mathcal{H})} \leq M_{\lambda_0, \delta}.
\end{aligned}$$

従って $\mathcal{D}(K_0)$ は $e^{i\sigma A_{\lambda_0, \delta}}$ -不変で、 V は K_0 -有界だから、標準的な議論によって

$$\sup_{|\sigma| \leq 1} \|K e^{i\sigma A_{\lambda_0, \delta}} (K + i)^{-1}\|_{\mathbf{B}(\mathcal{X})} < \infty.$$

Mourre 評価についても同様に、 $i[K_0, A_{\lambda_0, \delta}]$ と $f_\delta(K_0 - \lambda_0)$ を分解して考える。まず $i[K_0, A_{\lambda_0, \delta}]$ については、

$$\begin{aligned}
i[K_0, A_{\lambda_0, \delta}] &= \overline{2(\lambda_0 - \delta - D_t)^{-1} \otimes H_0} = \overline{2 \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} (\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1} P_k \otimes H_0} \\
&= \overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes 2(\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1} H_0}.
\end{aligned}$$

Lemma 3. 任意の $f \in C_0(\mathbf{R})$ と $\mu \in \mathbf{R}$ に対して、

$$f(K_0 - \mu) = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes f(H_0 - (\mu - k\omega))}.$$

Proof. 任意の $\varphi \in L^2(\mathbf{T})$, $\psi \in \mathcal{H}$ に対して、Stone の公式より、

$$\begin{aligned}
& f(K_0 - \mu)(\varphi \otimes \psi) \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} f(\kappa) \{(K_0 - \mu - \kappa - i\varepsilon)^{-1} - (K_0 - \mu - \kappa + i\varepsilon)^{-1}\} (\varphi \otimes \psi) d\kappa
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} f(\kappa) \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \varphi \otimes \{(k\omega + H_0 - \mu - \kappa - i\varepsilon)^{-1} \\
&\quad - (k\omega + H_0 - \mu - \kappa + i\varepsilon)^{-1}\} \psi d\kappa \\
&=: \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} f(\kappa) \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \varphi \otimes \psi'(\varepsilon, \kappa, k) d\kappa.
\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ とする。 \mathbf{Z} の任意の有限部分集合 F に対して、

$$\begin{aligned}
\| \sum_{k \in F} f(\kappa) P_k \varphi \otimes \psi'(\varepsilon, \kappa, k) \|_{\mathcal{H}}^2 &= |f(\kappa)|^2 \sum_{k \in F} \|P_k \varphi\|_{L^2(\mathbf{T})}^2 \|\psi'(\varepsilon, \kappa, k)\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq |f(\kappa)|^2 \sum_{k \in \mathbf{Z}} \|P_k \varphi\|_{L^2(\mathbf{T})}^2 \|\psi'(\varepsilon, \kappa, k)\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \| \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(\kappa) P_k \varphi \otimes \psi'(\varepsilon, \kappa, k) \|_{\mathcal{H}}^2
\end{aligned}$$

だから、Lebesgue の収束定理によって

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} f(\kappa) \sum_{k \in \mathbf{Z}} P_k \varphi \otimes \psi'(\varepsilon, \kappa, k) d\kappa &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}} f(\kappa) P_k \varphi \otimes \psi'(\varepsilon, \kappa, k) d\kappa \\
&= \sum_{k \in \mathbf{Z}} P_k \varphi \otimes \int_{\mathbf{R}} f(\kappa) \psi'(\varepsilon, \kappa, k) d\kappa.
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
&\| \sum_{k \in \mathbf{Z}} P_k \varphi \otimes \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} f(\kappa) \psi'(\varepsilon, \kappa, k) d\kappa - \sum_{k \in \mathbf{Z}} P_k \varphi \otimes f(H_0 - (\mu - k\omega)) \psi \|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \|P_k \varphi\|_{L^2(\mathbf{T})}^2 \| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} f(\kappa) \psi'(\varepsilon, \kappa, k) d\kappa - f(H_0 - (\mu - k\omega)) \psi \|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

右辺は、まず任意の $k \in \mathbf{Z}$ に対して、再び Stone の公式より $\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} f(\kappa) \psi'(\varepsilon, \kappa, k) d\kappa - f(H_0 - (\mu - k\omega)) \psi \|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$ ($\varepsilon \downarrow 0$)。また Stone の公式の証明より、

$$\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} f(\kappa) \psi'(\varepsilon, \kappa, k) d\kappa \|_{\mathcal{H}} \leq \|f\|_{\infty} \|\psi\|_{\mathcal{H}}$$

だから、Lebesgue の収束定理によって $\varepsilon \downarrow 0$ の時 0 に収束する。 \square

以上より、

$$f_{\delta}(K_0 - \lambda_0) i [K_0, A_{\lambda_0, \delta}] f_{\delta}(K_0 - \lambda_0) = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes \frac{2}{\lambda_0 - \delta - k\omega} H_0 f_{\delta}(H_0 - (\lambda_0 - k\omega))^2.$$

$\lambda_0 - k\omega < 0$, ($k \geq n_{\lambda_0} + 1$) の場合、 $H_0 = p^2/2$, $f_\delta \in C_0^\infty([-\delta, \delta])$ かつ

$$\kappa - (\lambda_0 - k\omega) \geq k\omega - \lambda_0 \geq \text{dist}(\lambda_0, \mathcal{T}) > \delta, \quad \kappa \in [0, \infty)$$

だから $f_\delta(H_0 - (\lambda_0 - k\omega)) = 0$. $\lambda_0 - k\omega > 0$, ($k \leq n_{\lambda_0}$) の場合、 $\kappa \in [0, \infty)$ で $\kappa - (\lambda_0 - k\omega) \geq -\delta$, ($\kappa > \lambda_0 - k\omega - \delta$) となるものを考え、作用素解析によって、

$$\begin{aligned} H_0 f_\delta(H_0 - (\lambda_0 - k\omega))^2 &= \int_0^\infty \kappa f_\delta(\kappa - (\lambda_0 - k\omega))^2 E_{H_0}(d\kappa) \\ &\geq (\lambda_0 - k\omega - \delta) \int_0^\infty f_\delta(\kappa - (\lambda_0 - k\omega))^2 E_{H_0}(d\kappa) \\ &= (\lambda_0 - k\omega - \delta) f_\delta(H_0 - (\lambda_0 - k\omega))^2. \end{aligned}$$

故に、Lemma 2 と全く同様の計算によって、

$$\begin{aligned} f_\delta(K_0 - \lambda_0) i[K_0, A_{\lambda_0, \delta}] f_\delta(K_0 - \lambda_0) &= \frac{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes \frac{2}{\lambda_0 - \delta - k\omega} H_0 f_\delta(H_0 - (\lambda_0 - k\omega))^2}{\bigoplus_{k \leq n_{\lambda_0}} P_k \otimes \frac{2(\lambda_0 - \delta - k\omega)}{\lambda_0 - \delta - k\omega} f_\delta(H_0 - (\lambda_0 - k\omega))^2} \\ &= \frac{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes 2f_\delta(H_0 - (\lambda_0 - k\omega))^2}{\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} P_k \otimes 2f_\delta(H_0 - (\lambda_0 - k\omega))^2} \\ &= 2f_\delta(K_0 - \lambda_0)^2. \end{aligned}$$

故に、 $f_\delta(K - \lambda_0) - f_\delta(K_0 - \lambda_0)$ と $\langle K_0 \rangle^{-1} i[V, A_{\lambda_0, \delta}] \langle K_0 \rangle^{-1}$ のコンパクト性から、標準的な議論によって、 \mathcal{K} 上のコンパクト作用素 C_{λ_0, f_δ} が存在して、Mourre 評価

$$f_\delta(K - \lambda_0) i[K, A_{\lambda_0, \delta}] f_\delta(K - \lambda_0) \geq 2f_\delta(K - \lambda_0)^2 + C_{\lambda_0, f_\delta}$$

が得られる。

§4. AC Stark ハミルトニアンに対する散乱問題への応用

時間周期的な電場 $E(t) \in \mathbf{R}^d$ 内の 1 体系を考察する。 $E(t)$ は $C^0(\mathbf{R})$ に属し周期 T , 平均零と仮定する:

$$E_m := \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt = 0.$$

系のハミルトニアン $\hat{H}(t)$ は $L^2(\mathbf{R}^d)$ 上の

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0(t) + V(x), \quad \hat{H}_0(t) = \frac{1}{2} p^2 - E(t) \cdot x$$

である。 $\hat{H}_0(t)$, $\hat{H}(t)$ が生成する解作用素を $\hat{U}_0(t, s)$, $\hat{U}(t, s)$ と書く。後述の短距離型のポテンシャル V に対して、波動作用素 $\hat{W}^\pm = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} \hat{U}(t, 0)^* \hat{U}_0(t, 0)$ の漸近完全性

$$\text{Ran}(\hat{W}^\pm) = L_c^2(\hat{U}(T, 0))$$

を考察する。 $L_c^2(\hat{U}(T, 0))$ は Floquet 作用素 $\hat{U}(T, 0)$ の連続スペクトル部分空間である。ここで、 T -周期関数

$$b_0(t) := \int_0^t E(s) ds, \quad b_{0,m} := \frac{1}{T} \int_0^T b_0(s) ds, \quad b(t) := b_0(t) - b_{0,m}, \quad c(t) := \int_0^t b(s) ds$$

と Avron-Herbst 型公式

$$\begin{aligned} \hat{U}_0(t, s) &= \mathcal{F}(t) e^{-i(t-s)H_0} \mathcal{F}(s)^*, \quad \hat{U}(t, s) = \mathcal{F}(t) U(t, s) \mathcal{F}(s)^*, \\ \mathcal{F}(t) &= e^{-ia(t)} e^{ib(t) \cdot x} e^{-ic(t) \cdot p}, \quad a(t) = \int_0^t \frac{1}{2} |b(s)|^2 ds, \end{aligned}$$

によって、我々の問題は次の時間周期的なポテンシャルを持つ $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^d)$ 上のハミルトニアン $H(t)$ の問題に変形される:

$$H(t) = H_0 + V(x + c(t)), \quad H_0 = \frac{1}{2} p^2.$$

Avron-Herbst 型公式の $U(t, s)$ は $H(t)$ によって生成される解作用素を表わしている。更に、波動作用素のユニタリ変換

$$\hat{W}^\pm = \mathcal{F}(0) W^\pm \mathcal{F}(0)^*, \quad W^\pm = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} U(t, 0)^* e^{-itH_0},$$

によって、 \hat{W}^\pm の漸近完全性も W^\pm の漸近完全性

$$\text{Ran}(W^\pm) = \mathcal{H}_c(U(T, 0))$$

に帰着される。ここでポテンシャル V についての短距離型の条件を与える。

Short-Range Condition $(V)_{\text{SR}}$. $V(x)$ は \mathbf{R}^d 上の実数値関数で $\hat{V}^{\text{sing}}(x)$ と $\hat{V}^{\text{SR}}(x)$ の和である。 $d < 3$ ならば $\hat{V}^{\text{sing}} = 0$. $d \geq 3$ ならば \hat{V}^{sing} は $\infty > q_0 > d$ で $L^{q_0}(\mathbf{R}^d)$ に属し、コンパクト台を持つ。 $|(\nabla \hat{V}^{\text{sing}})|$ は $\infty > q_1 > d/2$ で $L^{q_1}(\mathbf{R}^d)$ に属する。 $d = 3$ の場合は、 q_1 を $1/q_1 = 1/(2q_0) + 1/2 < 2/d$ によって定義する。 $\hat{V}^{\text{SR}}(x)$ は $C^2(\mathbf{R}^d)$ に属し $\rho_{\text{SR}} > 1$ で減衰条件

$$|(\partial_x^\alpha \hat{V}^{\text{SR}})(x)| \leq C \langle x \rangle^{-\rho_{\text{SR}} - |\alpha|}, \quad |\alpha| \leq 2$$

を満たす。

§2 で言及したように、もし \hat{V}^{sing} が $|x|^{-\gamma}$ 型の局所特異性を持っているならば、 $-\gamma q_0 + d > 0$ でなければならず、従って $\gamma < d/q_0 < 1$ である。また逆に $\gamma < 1$ の時は \hat{V}^{sing} の条件を満たす事も確かめられる。

この時 $V(x+c(t)) = \hat{V}^{\text{sing}}(x+c(t)) + \hat{V}^{\text{SR}}(x+c(t))$ は条件 (V) を $\rho = \rho_{\text{SR}} - 1 > 0$ で満たす。この ρ の値は、

$$\partial_t^2(\hat{V}^{\text{SR}}(x+c(t))) = E(t) \cdot (\nabla \hat{V}^{\text{SR}})(x+c(t)) + \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_j(t)b_k(t)(\partial_j \partial_k \hat{V}^{\text{SR}})(x+c(t))$$

の第一項に一階だけの微分が残ってしまう事に起因していて、実際 Peetre の不等式より

$$\begin{aligned} & |\partial_t^2(\hat{V}^{\text{SR}}(x+c(t)))| \\ & \leq |E(t) \cdot (\nabla \hat{V}^{\text{SR}})(x+c(t))| + \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d |b_j(t)b_k(t)(\partial_j \partial_k \hat{V}^{\text{SR}})(x+c(t))| \\ & \lesssim |E(t)| \langle x+c(t) \rangle^{-\rho_{\text{SR}}-1} + \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d |b_j(t)b_k(t)| \langle x+c(t) \rangle^{-\rho_{\text{SR}}-2} \\ & \lesssim \max_{0 \leq s \leq T} |E(s)| \langle c(s) \rangle^{\rho_{\text{SR}}+1} \langle x \rangle^{-\rho_{\text{SR}}-1} + \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \max_{0 \leq s \leq T} |b_j(s)b_k(s)| \langle c(s) \rangle^{\rho_{\text{SR}}+2} \langle x \rangle^{-\rho_{\text{SR}}-2} \\ & \lesssim \langle x \rangle^{-(\rho_{\text{SR}}-1)-2} \end{aligned}$$

である。従って、 \hat{V}^{SR} を長距離型のポテンシャルに取り換える事はできない。

我々の波動作用素

$$W^\pm = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} U(t, 0)^* e^{-itH_0}$$

の漸近完全性の証明では、Howland-Yajima の方法が用いられる。 K_0 と K を、 $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{T}; \mathcal{H})$ 上の、それぞれ H_0 と $H(t)$ に結び付けられた Floquet ハミルトニアンとする。Howland-Yajima の方法とは次のような理論である：もし W^\pm の存在が保証されているならば、 W^\pm の漸近完全性は Floquet ハミルトニアンに対する波動作用素

$$\mathcal{W}^\pm(K, K_0) = \text{s-lim}_{\sigma \rightarrow \pm\infty} e^{i\sigma K} e^{-i\sigma K_0}$$

の漸近完全性から導かれる (Yajima [4, §4]).

今は $\hat{V}^{\text{sing}} = 0$ の場合についてだけ紹介する。極限吸収原理と Kato のスムーズ理論によって $\langle x \rangle^{-s}$, $s > 1/2$ の局所 K -スムーズ性が得られる：任意の閉区間 $I \subset \mathbf{R} \setminus (\mathcal{I} \cup \sigma_{\text{pp}}(K))$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\langle x \rangle^{-s} E_K(I) e^{-i\sigma K} \Phi\|_{\mathcal{H}}^2 d\sigma \leq C \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \Phi \in \mathcal{H}.$$

また V を 0 に取り換えれば、 $\langle x \rangle^{-s}$, $s > 1/2$ の局所 K_0 -スムーズ性も得られる。Lavine の局所スムーズ性の定理によって、 I° 上の局所波動作用素

$$\text{s-lim}_{\sigma \rightarrow \pm\infty} e^{i\sigma K} e^{-i\sigma K_0} E_{K_0}(I^\circ), \quad \text{s-lim}_{\sigma \rightarrow \pm\infty} e^{i\sigma K_0} e^{-i\sigma K} E_K(I^\circ)$$

が存在する。これらの局所波動作用素を貼り合わせれば、

$$\mathscr{W}^\pm(K, K_0) = \text{s-lim}_{\sigma \rightarrow \pm\infty} e^{i\sigma K} e^{-i\sigma K_0}$$

と共役波動作用素

$$\mathscr{W}^\pm(K_0, K) = \text{s-lim}_{\sigma \rightarrow \pm\infty} e^{i\sigma K_0} e^{-i\sigma K} P_c(K)$$

の存在が得られるが、良く知られているようにそれは $\mathscr{W}^\pm(K, K_0)$ の完全性を意味する。

参考文献

- [1] T. Adachi, On the Mourre estimates for three-body Floquet Hamiltonians, preprint. arXiv:1904.10190
- [2] T. Adachi and A. Kiyose, On the Mourre estimates for Floquet Hamiltonians, *Lett. Math. Phys.* **109** (2019), 2513–2529.
- [3] P. Perry, I. M. Sigal and B. Simon, Spectral analysis of N -body Schrödinger operators, *Annals of Mathematics*, **114** (1981), 519–567.
- [4] K. Yajima, Scattering theory for Schrödinger equations with potentials periodic in time, *J. Math. Soc. Japan* **29** (1977), 729–743.
- [5] K. Yajima, Existence of solutions for Schrödinger evolution equations, *Comm. Math. Phys.* **110** (1987), 415–426.
- [6] K. Yokoyama, Mourre theory for time-periodic systems, *Nagoya Math. J.* **149** (1998), 193–210.