漸化式によるアルキメデス Rankin–Selberg 積分の明示的な計算

北里大学一般教育部　宮崎 直
Tadashi Miyazaki
Kitasato University College of Liberal Arts and Sciences

1　序論

本稿は石井卓氏との共著論文 [IM] の概説である．F を実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ とする．n と n' を正の整数とし，$n-n' \in \{0,1\}$ を満たすとする．Stade 氏 [St1], [St2] は明示的な計算によって，$\mathrm{GL}(n,F)$ と $\mathrm{GL}(n',F)$ の既約球主系列表現に付随する球 Whittaker 関数の組から定義されるアルキメデス Rankin–Selberg 積分は対応する局所 L 因子と一致することを証明した．Stade 氏の証明では球 Whittaker 関数の明示式から導出されるアルキメデス Rankin–Selberg 積分の漸化式が重要な役割を果たしており，その漸化式は石井氏と Stade 氏の共著論文 [IS] において改良されている．同様の漸化式を Godement 切断から導出することによって，上記の Stade 氏の結果をより一般の主系列表現の場合に拡張することができたので，本稿ではその結果について報告する．

1.1　基本的な記法

本稿を通して，F は実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ であるとし，n と n' は正の整数であるとする．標準指標 $\psi_\varepsilon\colon F \to \mathbb{C}^\times$ $(\varepsilon \in \{\pm 1\})$ と F 上のノルム $|\cdot|_F$ を

$$\begin{cases} \psi_\varepsilon(t) = e^{2\pi\sqrt{-1}\varepsilon t}, & |t|_{\mathbb{R}} = |t| \qquad (F=\mathbb{R} \text{ の場合}), \\ \psi_\varepsilon(t) = e^{2\pi\sqrt{-1}(\varepsilon t+\overline{\varepsilon t})}, & |t|_{\mathbb{C}} = |t|^2 \qquad (F=\mathbb{C} \text{ の場合}) \end{cases} \qquad (t \in F)$$

で定義する．ここで，$|\cdot|$ は通常の絶対値を表す．

G_n を一般線型群 $\mathrm{GL}(n,F)$ とし，G_n の部分群 N_n, A_n, K_n を次のようにとる：

$$N_n = \{x = (x_{i,j}) \in G_n \mid x_{i,j} = 0\ (1 \le j < i \le n),\quad x_{k,k} = 1\ (1 \le k \le n)\},$$
$$A_n = \{a = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i > 0 \quad (1 \le i \le n)\},$$
$$K_n = \begin{cases} \mathrm{O}(n) & (F=\mathbb{R} \text{ の場合}), \\ \mathrm{U}(n) & (F=\mathbb{C} \text{ の場合}). \end{cases}$$

$\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とし，N_n の指標 $\psi_{\varepsilon,n}$ を次のように定義する：

$$\psi_{\varepsilon,n}(x) = \psi_\varepsilon(x_{1,2} + x_{2,3} + \cdots + x_{n-1,n}) \qquad\qquad (x = (x_{i,j}) \in N_n).$$

(Π, H_Π) を G_n の Casselman–Wallach 表現とする．つまり，Π は G_n の滑らかな緩増加 Fréchet 表現であり，付随する Harish-Chandra 加群 H_{Π,K_n} は長さ有限であるとする．このとき，

$$\mathcal{T}(\Pi(x)f) = \psi_{\varepsilon,n}(x)\mathcal{T}(f) \qquad\qquad (x \in N_n,\ f \in H_\Pi)$$

を満たす連続 $\mathbb{C}$-線型形式 $\mathcal{T}\colon H_\Pi \to \mathbb{C}$ を H_Π 上の ψ_ε-形式という．以下では，Π は既約であると仮定する．Shalika 氏の重複度 1 定理 [Sh] により，H_Π 上の ψ_ε-形式全体の空間は高々1 次元である．Π が非自明な ψ_ε-形式 $\mathcal{T}\colon H_\Pi \to \mathbb{C}$ をもつとき，

$$\mathcal{W}(\Pi, \psi_\varepsilon) = \{W_{\mathcal{T},f} \mid f \in H_\Pi\}, \qquad W_{\mathcal{T},f}(g) = \mathcal{T}(\Pi(g)f) \qquad (g \in G_n)$$

で定まる空間 $\mathcal{W}(\Pi, \psi_\varepsilon)$ を Π の Whittaker 模型といい，$\mathcal{W}(\Pi, \psi_\varepsilon)$ の元を Whittaker 関数という．K_n-有限な元全体のなす $\mathcal{W}(\Pi, \psi_\varepsilon)$ の部分空間を $\mathcal{W}(\Pi, \psi_\varepsilon)_{K_n}$ で表す．

$\mathrm{M}_{n,n'}(F)$ を F の元を成分とする $n \times n'$ 行列全体の空間とし，$\mathrm{M}_{n,n'}(F)$ 上の Schwartz 関数全体の空間を $\mathcal{S}(\mathrm{M}_{n,n'}(F))$ で表す．ここで，$\mathbf{e}_{(n,n')} \in \mathcal{S}(\mathrm{M}_{n,n'}(F))$ を

$$\mathbf{e}_{(n,n')}(z) = \begin{cases} \exp(-\pi \mathrm{Tr}({}^t z z)) & (F = \mathbb{R} \text{ の場合}), \\ \exp(-2\pi \mathrm{Tr}({}^t \overline{z} z)) & (F = \mathbb{C} \text{ の場合}) \end{cases} \qquad (z \in \mathrm{M}_{n,n'}(F))$$

で定義する．多項式関数 p を用いて $\phi(z) = p(z, \overline{z})\mathbf{e}_{(n,n')}(z) \quad (z \in \mathrm{M}_{n,n'}(F))$ と表せる関数 ϕ を $\mathrm{M}_{n,n'}(F)$ 上の標準 Schwartz 関数といい，$\mathrm{M}_{n,n'}(F)$ 上の標準 Schwartz 関数全体のなす $\mathcal{S}(\mathrm{M}_{n,n'}(F))$ の部分空間を $\mathcal{S}_0(\mathrm{M}_{n,n'}(F))$ で表す．

1.2 $G_n \times G_{n'}$ のアルキメデス Rankin–Selberg 積分

$\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とする．(Π, H_Π) と $(\Pi', H_{\Pi'})$ をそれぞれ G_n と $G_{n'}$ の既約 Casselman–Wallach 表現とし，それぞれ Whittaker 模型 $\mathcal{W}(\Pi, \psi_\varepsilon)$，$\mathcal{W}(\Pi', \psi_{-\varepsilon})$ をもつと仮定する．Whittaker 関数 $W \in \mathcal{W}(\Pi, \psi_\varepsilon)$, $W' \in \mathcal{W}(\Pi', \psi_{-\varepsilon})$ に対して，$\Pi \times \Pi'$ に関するアルキメデス Rankin–Selberg 積分を次のように定義する：

- $n > n'$ であるとき，

$$Z(s, W, W') = \int_{N_{n'} \backslash G_{n'}} W\left(\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1_{n-n'} \end{pmatrix}\right) W'(g) |\det g|_F^{s - \frac{n-n'}{2}}\, dg.$$

- $n = n'$ であるとき，$\phi \in \mathcal{S}(\mathrm{M}_{1,n}(F))$ に対して，

$$Z(s, W, W', \phi) = \int_{N_n \backslash G_n} W(g) W'(g) \phi(e_n g) |\det g|_F^s\, dg.$$

ここで，$e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1) \in \mathrm{M}_{1,n}(F)$ とし，dg は適当に正規化された $N_{n'} \backslash G_{n'}$ 上の右 $G_{n'}$ 不変測度であるとする．これらの積分は $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きいときに絶対収束する．Jacquet 氏と Shalika 氏の論文 [JS] において，$\Pi \times \Pi'$ に関するアルキメデス Rankin–Selberg 積分は局所 L 因子 $L(s, \Pi \times \Pi')$ に整関数を掛けた形の有理型関数として全 s 平面に解析接続され，局所関数等式を満たすことが証明されている．Jacquet 氏は上記の論文の証明を [Ja2] において改良し，さらに次の事実が成り立つことを証明した．

事実 1.1 ([Ja2])**.** 上の記法を用いる．

(1) $n' = n - 1$ のとき，ある正の整数 m と $W_i \in \mathcal{W}(\Pi, \psi_\varepsilon)_{K_n}$，$W'_i \in \mathcal{W}(\Pi', \psi_{-\varepsilon})_{K_{n-1}}$ $(1 \leq i \leq m)$ が存在して，次の等式が成り立つ：

$$Z(s, W_1, W'_1) + Z(s, W_2, W'_2) + \cdots + Z(s, W_m, W'_m) = L(s, \Pi \times \Pi').$$

(2) $n' = n$ のとき，ある正の整数 m と $W_i \in \mathcal{W}(\Pi, \psi_\varepsilon)_{K_n}$，$W'_i \in \mathcal{W}(\Pi', \psi_{-\varepsilon})_{K_n}$，$\phi_i \in \mathcal{S}_0(\mathrm{M}_{1,n}(F))$ $(1 \leq i \leq m)$ が存在して，次の等式が成り立つ：

$$Z(s, W_1, W'_1, \phi_i) + Z(s, W_2, W'_2, \phi_i) + \cdots + Z(s, W_m, W'_m, \phi_i) = L(s, \Pi \times \Pi').$$

事実 1.1 は $n' < n-1$ の場合には拡張されないと広く信じられている．我々は，$n' \in \{n-1, n\}$ の場合に事実 1.1 より強い主張である

「局所 L 因子 $L(s, \Pi \times \Pi')$ と一致するアルキメデス Rankin–Selberg 積分が存在する」

が成り立つことを期待している．次の場合については，この主張が Whittaker 模型をもつすべての既約 Casselman–Wallach 表現に対して成り立つことがわかっている：

- $G_2 \times G_1$ の場合：　Jacquet 氏と Langlands 氏 [JL], Popa 氏 [Po].
- $G_2 \times G_2$ の場合：　Jacquet 氏 [Ja1], Zhang 氏 [Zh], 宮崎 [Mi].
- $G_3 \times G_2$ の場合：　平野氏と石井氏と宮崎 [HIM].

さらに，Stade 氏によって次の事実が成り立つことが証明されている．

事実 1.2 ([St1], [St2])**.** 上の記法を用いる．$n' \in \{n-1, n\}$, $F = \mathbb{R}$ とし，Π と Π' は既約な球主系列表現であるとする．このとき，適当に正規化された K_n-不変な $W_0 \in \mathcal{W}(\Pi, \psi_\varepsilon)_{K_n}$ と $K_{n'}$-不変な $W'_0 \in \mathcal{W}(\Pi', \psi_{-\varepsilon})_{K_{n'}}$ に対して，

$$\begin{cases} Z(s, W_0, W'_0) = L(s, \Pi \times \Pi') & (n' = n-1 \text{ の場合}) \\ Z(s, W_0, W'_0, \mathbf{e}_{(1,n)}) = L(s, \Pi \times \Pi') & (n' = n \text{ の場合}) \end{cases}$$

が成り立つ．

本稿では，この Stade 氏の結果をより一般の主系列表現の場合に拡張する．

2 主結果

2.1 主系列表現

G_n の部分群 U_n と M_n を次のように定義する：

$$U_n = \{u = (u_{i,j}) \in G_n \mid u_{i,j} = 0\ (1 \le i < j \le n),\ \ u_{k,k} = 1\ (1 \le k \le n)\},$$
$$M_n = \{m = \mathrm{diag}(m_1, m_2, \cdots, m_n) \mid m_i \in F^\times \quad (1 \le i \le n)\}.$$

本稿では，Jacquet 氏の論文 [Ja2] に倣って，下三角 Borel 部分群 U_nM_n の指標から誘導される表現として主系列表現を定義する．$d = (d_1, d_2, \cdots, d_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n) \in \mathbb{C}^n$ とし，M_n の指標 χ_d と η_ν を

$$\chi_d(m) = \prod_{i=1}^n \chi_{d_i}(m_i), \qquad \eta_\nu(m) = \prod_{i=1}^n |m_i|_F^{\nu_i} \qquad (m = \mathrm{diag}(m_1, m_2, \cdots, m_n) \in M_n)$$

で定義する．ここで，$\chi_l(t) = (t/|t|)^l \ \ (l \in \mathbb{Z}, t \in F^\times)$ とする．また，

$$\rho_n = (\rho_{n,1}, \rho_{n,2}, \cdots, \rho_{n,n}) \in \mathbb{Q}^n, \qquad\qquad \rho_{n,i} = \tfrac{n+1}{2} - i \qquad (1 \le i \le n)$$

とおく．このとき，G_n の主系列表現 $(\Pi_{d,\nu}, I(d,\nu))$ を次のように定義する：

$$I(d,\nu) = \{f \in C^\infty(G_n) \mid f(umg) = \chi_d(m)\eta_{\nu-\rho_n}(m)f(g) \quad (u \in U_n,\ m \in M_n,\ g \in G_n)\},$$
$$(\Pi_{d,\nu}(g)f)(h) = f(hg) \qquad\qquad (g, h \in G_n,\ f \in I(d,\nu)).$$

特に $d = (0, 0, \cdots, 0)$ のとき，$\Pi_{(0,0,\cdots,0),\nu}$ は球主系列表現と呼ばれる．K_n-有限な元全体のなす $I(d,\nu)$ の部分空間を $I(d,\nu)_{K_n}$ で表す．$I(d,\nu)$ が既約であるとき, n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の任意の元 σ に対して，

$$I(d,\nu) \simeq I((d_{\sigma(1)}, d_{\sigma(2)}, \cdots, d_{\sigma(n)}), (\nu_{\sigma(1)}, \nu_{\sigma(2)}, \cdots, \nu_{\sigma(n)})) \tag{2.1}$$

が成り立つ（[SV, Corollary 2.8]）．また，$F = \mathbb{R}$ であるとき，

$$\chi_{d+l} = \chi_d, \qquad\qquad I(d+l,\nu) = I(d,\nu) \qquad\qquad (l \in 2\mathbb{Z}^n) \tag{2.2}$$

が成り立つ．ここで，

$$\mathbf{\Gamma}_F(\nu; d) = \prod_{1 \le i < j \le n} \Gamma_F(\nu_j - \nu_i + 1;\ |d_j - d_i|), \tag{2.3}$$

$$\Gamma_F(s; m) = \begin{cases} \Gamma_\mathbb{R}(s+m) = \pi^{-\frac{s+m}{2}}\Gamma\bigl(\frac{s+m}{2}\bigr) & (F = \mathbb{R}\ \text{の場合}), \\ \Gamma_\mathbb{C}\bigl(s+\frac{m}{2}\bigr) = 2(2\pi)^{-s-\frac{m}{2}}\Gamma\bigl(s+\frac{m}{2}\bigr) & (F = \mathbb{R}\ \text{の場合}) \end{cases} \tag{2.4}$$

とおいておく．$\Pi_{d,\nu}$ が既約であるとき，$\mathbf{\Gamma}_F(\nu; d)$ は有限の値をとる．

$\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とする．Kostant 氏の論文 [Ko] より，$I(d,\nu)$ 上の ψ_ε-形式全体の空間は 1 次元である．$\mathrm{Re}(\nu_{i+1}-\nu_i) > 0 \ \ (1 \le i \le n-1)$ であるとき，Jacquet 積分 $\mathcal{J}_\varepsilon \colon I(d,\nu) \to \mathbb{C}$ を

$$\mathcal{J}_\varepsilon(f) = \int_{N_n} f(x)\psi_{-\varepsilon,n}(x)\,dx \qquad\qquad (f \in I(d,\nu))$$

で定義する．[Wa, Theorem 15.4.1] より，標準切断を用いた解析接続によって $\mathcal{J}_\varepsilon$ はすべての $\nu \in \mathbb{C}^n$ に拡張され，$I(d,\nu)$ 上の非自明な ψ_ε-形式を定める．$f \in I(d,\nu)$ に対して，

$$\mathrm{W}^{(\varepsilon)}_{\mathrm{Jac}}(f)(g) = \mathcal{J}_\varepsilon(\Pi_{d,\nu}(g)f) \qquad\qquad (g \in G_n) \tag{2.5}$$

で Whittaker 関数 $\mathrm{W}^{(\varepsilon)}_{\mathrm{Jac}}(f)$ を定義しておく．

注意 2.1. $B_n = N_nM_n$ とおく．$d = (d_1,d_2,\cdots,d_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\nu = (\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n) \in \mathbb{C}^n$ に対し，G_n の表現 $(\Pi_{B_n,d,\nu}, I_{B_n}(d,\nu))$ を次のように定義する：

$$I_{B_n}(d,\nu) = \{f \in C^\infty(G_n) \mid f(xmg) = \chi_d(m)\eta_{\nu+\rho_n}(m)f(g) \quad (x \in N_n,\ m \in M_n,\ g \in G_n)\},$$
$$(\Pi_{B_n,d,\nu}(g)f)(h) = f(hg) \qquad\qquad (g,h \in G_n,\ f \in I(d,\nu)).$$

Eisenstein 級数などの保型形式の研究では，この表現 $(\Pi_{B_n,d,\nu}, I_{B_n}(d,\nu))$ を主系列表現として扱うことが多いと思われる．本稿の主系列表現とは同型写像

$$I_{B_n}(d,\nu) \ni f \mapsto f^{w_n} \in I((d_n,d_{n-1},\cdots,d_1),\,(\nu_n,\nu_{n-1},\cdots,\nu_1))$$

によって対応している．ここで，f^{w_n} は $f^{w_n}(g) = f(w_ng) \ \ (g \in G_n)$ で定まる関数であり，w_n は反対角成分がすべて 1 である反対角行列である．

2.2 Gelfand–Tsetlin 型の基底

$\Lambda_n = \{\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n\}$ とおく．$\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) \in \Lambda_n$ に対し，整数を成分とする三角行列

$$M = (m_{i,j})_{1 \le i \le j \le n} = \begin{pmatrix} m_{1,n} \quad m_{2,n} \quad\quad \cdots \quad\quad m_{n,n} \\ m_{1,n-1} \quad \cdots \quad m_{n-1,n-1} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ m_{1,2} \quad m_{2,2} \\ m_{1,1} \end{pmatrix} \qquad (m_{i,j} \in \mathbb{Z})$$

が次の条件を満たすとき，M を λ 型の Gelfand–Tsetlin パターンという：

$$m_{i,n} = \lambda_i \quad (1 \le i \le n), \qquad m_{j,k} \ge m_{j,k-1} \ge m_{j+1,k} \quad (1 \le j < k \le n).$$

$\mathrm{G}(\lambda)$ を λ 型の Gelfand–Tsetlin パターン全体の集合とする．$M = (m_{i,j})_{1\le i\le j\le n} \in \mathrm{G}(\lambda)$ に対して，ウェイト $\gamma^M = (\gamma_1^M, \gamma_2^M, \cdots, \gamma_n^M)$ を次のように定義する：

$$\gamma_j^M = \sum_{i=1}^{j} m_{i,j} - \sum_{i=1}^{j-1} m_{i,j-1} \qquad (1 \le j \le n).$$

$h_{i,j} = \lambda_i$ $(1 \le i \le j \le n)$ で定まる $\mathrm{G}(\lambda)$ の元 $(h_{i,j})_{1\le i\le j\le n}$ を $H(\lambda)$ とおくと，$\gamma^{H(\lambda)} = \lambda$ が成り立つ．

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \Lambda_n$ に対し，$(\tau_\lambda, V_\lambda)$ を最高ウェイト λ の $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の既約正則有限次元表現とする．V_λ 上の $\mathrm{U}(n)$-不変なエルミート内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ をとり，固定しておく．$1 \le i < j \le n$ に対して，$E_{i,j}$ を (i,j) 成分が 1，その他の成分が 0 である行列単位とし，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ の元と見なす．このとき，Gelfand 氏と Tsetlin 氏 [GT] が構成した V_λ の正規直交基底を定数倍することで，次の条件 (i), (ii), (iii) を満たす V_λ の基底 $\{\xi_M\}_{M\in\mathrm{G}(\lambda)}$ が得られる．

(i) $M \in \mathrm{G}(\lambda)$ に対し，ξ_M はウェイト γ^M のウェイトベクトルである，すなわち，

$$\tau_\lambda(E_{k,k})\xi_M = \gamma_k^M \xi_M \qquad (1 \le k \le n). \tag{2.6}$$

特に，$\xi_{H(\lambda)}$ はウェイト λ の最高ウェイトベクトルである．

(ii) $M = (m_{i,j})_{1\le i<j\le n} \in \mathrm{G}(\lambda)$ に対し，

$$\tau_\lambda(E_{j,j+1})\xi_M = \sum_{\substack{1\le i\le j \\ M+\Delta_{i,j}\in\mathrm{G}(\lambda)}} \mathrm{a}_{i,j}(M)\xi_{M+\Delta_{i,j}} \qquad (1 \le j \le n-1),$$
$$\tau_\lambda(E_{j+1,j})\xi_M = \sum_{\substack{1\le i\le j \\ M-\Delta_{j+1-i,j}\in\mathrm{G}(\lambda)}} \mathrm{a}_{i,j}(M^\vee)\xi_{M-\Delta_{j+1-i,j}} \qquad (1 \le j \le n-1)$$

が成り立つ．ここで，

$$\mathrm{a}_{i,j}(M) = \frac{\prod_{h=1}^{i}(m_{h,j+1} - m_{i,j} - h + i)}{\prod_{h=1}^{i-1}(m_{h,j} - m_{i,j} - h + i)} \left(\prod_{h=2}^{i} \frac{m_{h-1,j-1} - m_{i,j} - h + i}{m_{h-1,j} - m_{i,j} - h + i} \right)$$

とし，$\Delta_{i,j}$ は (i,j) 成分が 1，その他の成分が 0 である三角行列，$M^\vee = (m_{i,j}^\vee)_{1\le i\le j\le n}$ は $m_{i,j}^\vee = -m_{j+1-i,j}$ $(1 \le i \le j \le n)$ で定まる三角行列であるとする．

(iii) $\{\xi_M\}_{M\in\mathrm{G}(\lambda)}$ は直交基底である．また，$M = (m_{i,j})_{1\le i<j\le n} \in \mathrm{G}(\lambda)$ に対し，

$$\langle \xi_M, \xi_M \rangle = \prod_{1\le i\le j<k\le n} \frac{(m_{i,k} - m_{j,k-1} - i + j)!(m_{i,k-1} - m_{j+1,k} - i + j)!}{(m_{i,k-1} - m_{j,k-1} - i + j)!(m_{i,k} - m_{j+1,k} - i + j)!}$$

が成り立つ．特に，$\langle \xi_{H(\lambda)}, \xi_{H(\lambda)} \rangle = 1$ である．

Λ_n の部分集合 $\Lambda_{n,F}$ を

$$\Lambda_{n,\mathbb{R}} = \Lambda_n \cap \{0,1\}^n, \qquad\qquad \Lambda_{n,\mathbb{C}} = \Lambda_n$$

で定義すると，$\lambda \in \Lambda_{n,F}$ ならば τ_λ は K_n の表現として既約である．$(\Pi_{d,\nu}, I(d,\nu))$ を G_n の主系列表現とし，$d \in \Lambda_{n,F}$ を満たすと仮定する．このとき，(2.6) と Frobenius 相互律 [Kn, Theorem 1.14] より，$\tau_d|_{K_n}$ は $\Pi_{d,\nu}$ の極小 K_n-タイプであり，$\dim \mathrm{Hom}_{K_n}(V_d, I(d,\nu)) = 1$ が成り立つ．$\mathrm{Hom}_{K_n}(V_d, I(d,\nu))$ の元 $\mathrm{f}_{d,\nu}$ を $\mathrm{f}_{d,\nu}(\xi_{H(d)})(1_n) = 1$ を満たすようにとり，固定しておく，すなわち，

$$\mathrm{f}_{d,\nu}(v)(uak) = \eta_{\nu-\rho_n}(a)\langle \tau_d(k)v, \xi_{H(d)}\rangle \qquad (u \in U_n,\ a \in A_n,\ k \in K_n,\ v \in V_d) \tag{2.7}$$

とする．

注意 2.2. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \Lambda_n$ とする．$n > 1$ とし，埋め込み

$$\iota_n \colon \mathrm{GL}(n-1,\mathbb{C}) \ni g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \tag{2.8}$$

によって，$\mathrm{GL}(n-1,\mathbb{C})$ を $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の部分群と見なす．このとき，

$$\Xi^+(\lambda) = \{\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-1}) \in \Lambda_{n-1} \mid \lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1)\}$$

とおくと，V_λ は $\mathrm{GL}(n-1,\mathbb{C})$-加群として次のように既約分解される：

$$V_\lambda \simeq \bigoplus_{\mu \in \Xi^+(\lambda)} V_\mu.$$

V_λ の基底 $\{\xi_M\}_{M \in \mathrm{G}(\lambda)}$ はこの既約分解に沿って構成されており，$\mu \in \Xi^+(\lambda)$ に対して

$$\zeta_M \mapsto \zeta_{M[\lambda]}, \qquad\qquad M[\lambda] = \begin{pmatrix} \lambda \\ M \end{pmatrix} \in \mathrm{G}(\lambda) \qquad\qquad (M \in \mathrm{G}(\mu))$$

で定まる V_μ から V_λ への $\mathbb{C}$-線型写像は $\mathrm{GL}(n-1,\mathbb{C})$-埋め込みになる．

2.3 複素共役表現

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \Lambda_n$ とし，$(\tau_\lambda, V_\lambda)$ の複素共役表現 $(\overline{\tau_\lambda}, \overline{V_\lambda})$ を次のように定義する．

- 表現空間 $\overline{V_\lambda}$ を固定された全単射 $V_\lambda \ni v \mapsto \overline{v} \in \overline{V_\lambda}$ をもつ集合とし，次のように加法とスカラー倍を定義することで $\overline{V_\lambda}$ を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間と見なす：

$$\overline{v_1} + \overline{v_2} = \overline{v_1 + v_2} \qquad (v_1, v_2 \in V_\lambda), \qquad\qquad c\overline{v} = \overline{\overline{c}v} \qquad (c \in \mathbb{C},\ v \in V_\lambda).$$

  ここで，$\overline{c}$ は c の複素共役を表す．

- $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の $\overline{V_\lambda}$ への作用を $\overline{\tau_\lambda}(g)\overline{v} = \overline{\tau_\lambda(g)v} \quad (g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}),\ v \in V_\lambda)$ で定義する．

このとき，$V_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} \overline{V_\lambda} \ni v_1 \otimes \overline{v_2} \mapsto \langle v_1, v_2\rangle \in \mathbb{C}$ は非退化 $\mathrm{U}(n)$-不変 $\mathbb{C}$-双線形形式であり，これによって $\overline{\tau_\lambda}$ は $\mathrm{U}(n)$ の表現として τ_λ の反傾表現と同一視される．

$(\Pi_{d,\nu}, I(d,\nu))$ を G_n の主系列表現とし，$-d \in \Lambda_{n,F}$ を満たすと仮定すると，$\overline{\tau_{-d}}|_{K_n}$ は $\Pi_{d,\nu}$ の極小 K_n-タイプであり，$\dim \mathrm{Hom}_{K_n}(\overline{V_{-d}}, I(d,\nu)) = 1$ が成り立つ．$\mathrm{Hom}_{K_n}(\overline{V_{-d}}, I(d,\nu))$ の元 $\bar{\mathrm{f}}_{d,\nu}$ を $\bar{\mathrm{f}}_{d,\nu}(\overline{\xi_{H(-d)}})(1_n) = 1$ を満たすようにとり，固定しておく，すなわち，

$$\bar{\mathrm{f}}_{d,\nu}(\overline{v})(uak) = \eta_{\nu-\rho_n}(a)\overline{\langle \tau_{-d}(k)v, \xi_{H(-d)}\rangle} \quad (u \in U_n,\ a \in A_n,\ k \in K_n,\ v \in V_{-d}) \tag{2.9}$$

とする．

2.4 主定理

$(\Pi_{d,\nu}, I(d,\nu))$ と $(\Pi_{d',\nu'}, I(d',\nu'))$ をそれぞれ G_n と $G_{n'}$ の既約主系列表現とし，

$$\begin{aligned} d &= (d_1, d_2, \cdots, d_n) \in \mathbb{Z}^n, & \nu &= (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n) \in \mathbb{C}^n, \\ d' &= (d'_1, d'_2, \cdots, d'_{n'}) \in \mathbb{Z}^{n'}, & \nu' &= (\nu'_1, \nu'_2, \cdots, \nu'_{n'}) \in \mathbb{C}^{n'} \end{aligned}$$

とおく．このとき，局所 L 因子 $L(s, \Pi_{d,\nu} \times \Pi_{d',\nu'})$ は次のようになる：

$$L(s, \Pi_{d,\nu} \times \Pi_{d',\nu'}) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n'} \Gamma_F(s + \nu_i + \nu_j;\ |d_i + d'_j|).$$

ここで，$\Gamma_F(s;m)$ は (2.4) で定義される有理型関数である．

(2.1) と (2.2) より，$d \in \Lambda_{n,F}$ と $-d' \in \Lambda_{n',F}$ を仮定しても一般性を失わない．以下では，$d \in \Lambda_{n,F}$ かつ $-d' \in \Lambda_{n',F}$ であると仮定する．$\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とする．$v_1 \in V_d$, $v_2 \in V_{-d'}$ に対し，

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{(\varepsilon)}_{d,\nu}(v_1) &= \mathbf{\Gamma}_F(\nu; d)\mathrm{W}^{(\varepsilon)}_{\mathrm{Jac}}(\mathrm{f}_{d,\nu}(v_1)) \in \mathcal{W}(\Pi_{d,\nu}, \psi_\varepsilon), \\ \overline{\mathbf{W}}^{(-\varepsilon)}_{d',\nu'}(\overline{v_2}) &= \mathbf{\Gamma}_F(\nu'; d')\mathrm{W}^{(-\varepsilon)}_{\mathrm{Jac}}(\bar{\mathrm{f}}_{d',\nu'}(\overline{v_2})) \in \mathcal{W}(\Pi_{d',\nu'}, \psi_{-\varepsilon}) \end{aligned}$$

とおく．ここで，$\mathbf{\Gamma}_F(\nu; d)$, $\mathrm{W}^{(\varepsilon)}_{\mathrm{Jac}}$, $\mathrm{f}_{d,\nu}$, $\bar{\mathrm{f}}_{d',\nu'}$ はそれぞれ (2.3), (2.5), (2.7), (2.9) で定義される．

定理 2.3. 上の記法を用いる．$n' = n-1$ とし，

$$d_1 \geq -d'_1 \geq d_2 \geq -d'_2 \geq \cdots \geq d_{n-1} \geq -d'_{n-1} \geq d_n \tag{2.10}$$

が成り立つと仮定する．このとき，

$$Z\big(s, \mathbf{W}^{(\varepsilon)}_{d,\nu}(\xi_{H(-d')[d]}), \overline{\mathbf{W}}^{(-\varepsilon)}_{d',\nu'}(\overline{\xi_{H(-d')}})\big) = \frac{(-\varepsilon\sqrt{-1})^{\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(d_i + d'_i)}}{\dim V_{-d'}} L(s, \Pi_{d,\nu} \times \Pi_{d',\nu'})$$

が成り立つ．ここで，$H(-d')[d] = \begin{pmatrix} d \\ H(-d') \end{pmatrix} \in \mathrm{G}(d)$ とする．

注意 2.4. 上の記法を用いる．*(2.8)* で定義される埋め込み ι_n によって，K_{n-1} を K_n の部分群と見なす．$\mathbb{C}_{\mathrm{triv}} = \mathbb{C}$ を自明な K_{n-1}-加群とすると，*(2.10)* は $\mathrm{Hom}_{K_{n-1}}(V_d \otimes \overline{V_{-d'}}, \mathbb{C}_{\mathrm{triv}}) \neq \{0\}$ が成り立つための必要十分条件である．よって，

$$V_d \otimes \overline{V_{-d'}} \ni v_1 \otimes \overline{v_2} \mapsto Z\big(s, \mathbf{W}^{(\varepsilon)}_{d,\nu}(v_1), \overline{\mathbf{W}}^{(-\varepsilon)}_{d',\nu'}(\overline{v_2})\big) \in \mathbb{C}_{\mathrm{triv}}$$

は $\mathrm{Hom}_{K_{n-1}}(V_d \otimes \overline{V_{-d'}}, \mathbb{C}_{\mathrm{triv}})$ の元であるので，*(2.10)* が成り立たない場合は

$$Z\big(s, \mathbf{W}^{(\varepsilon)}_{d,\nu}(v_1), \overline{\mathbf{W}}^{(-\varepsilon)}_{d',\nu'}(\overline{v_2})\big) = 0 \qquad (v_1 \in V_d,\ v_2 \in V_{-d'})$$

となる．

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ に対して，$\phi_\gamma, \overline{\phi_\gamma} \in \mathcal{S}_0(\mathrm{M}_{1,n}(F))$ を

$$\phi_\gamma(z) = z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} \cdots z_n^{\gamma_n} \mathbf{e}_{(1,n)}(z), \qquad \overline{\phi_\gamma}(z) = \overline{\phi_\gamma(z)} \qquad (z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathrm{M}_{1,n}(F))$$

で定義する．また，$\lambda'_1 \geq \lambda_1 \geq \lambda'_2 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda'_n \geq \lambda_n$ を満たすような $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots, \lambda'_n)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \Lambda_n$ に対し，

$$\mathrm{C}(\lambda'; \lambda) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\lambda'_i - \lambda'_j - i + j)!(\lambda_i - \lambda_j - i + j - 1)!}{(\lambda'_i - \lambda_j - i + j)!(\lambda_i - \lambda'_j - i + j - 1)!}$$

とおく．

定理 2.5. 上の記法を用いる．$n' = n$ とする．

(1) $d_1 \geq -d'_1 \geq d_2 \geq -d'_2 \geq \cdots \geq d_n \geq -d'_n$ であるとき，

$$\begin{aligned}&Z\big(s, \mathbf{W}^{(\varepsilon)}_{d,\nu}(\xi_{H(d)}), \overline{\mathbf{W}}^{(-\varepsilon)}_{d',\nu'}(\overline{\xi_{H(-d')}}), \overline{\phi_{d+d'}}\big)\\ &= (-\varepsilon\sqrt{-1})^{\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(d_i+d'_i)} (\dim V_d)^{-1} \mathrm{C}(d; -d') L(s, \Pi_{d,\nu} \times \Pi_{d',\nu'})\end{aligned}$$

が成り立つ．

(2) $-d'_1 \geq d_1 \geq -d'_2 \geq d_2 \geq \cdots \geq -d'_n \geq d_n$ であるとき，

$$\begin{aligned}&Z\big(s, \mathbf{W}^{(\varepsilon)}_{d,\nu}(\xi_{H(d)}), \overline{\mathbf{W}}^{(-\varepsilon)}_{d',\nu'}(\overline{\xi_{H(-d')}}), \phi_{-d-d'}\big)\\ &= (-\varepsilon\sqrt{-1})^{\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(d_i+d'_i)} (\dim V_{-d'})^{-1} \mathrm{C}(-d'; d) L(s, \Pi_{d,\nu} \times \Pi_{d',\nu'})\end{aligned}$$

が成り立つ．

注意 2.6. $\mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(n')$ の保型 L 関数の臨界値の数論的な研究において，適合条件を満たすコホモロジカルな既約 *Casselman–Wallach* 表現に関するアルキメデス *Rankin–Selberg* 積分の臨界値が極小 $K_n \times K_{n'}$-タイプで消滅しないことは重要であり，現在までに次の場合が証明されている：

- $G_n \times G_{n-1}$ の場合 ($F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$，すべての臨界値)： *Sun* 氏 *[Su].*
- $G_n \times G_n$ の場合 ($F = \mathbb{C}$，中央の臨界値のみ)： *Dong* 氏と *Xue* 氏 *[DX].*

$F = \mathbb{C}$ の場合，適合条件を満たすコホモロジカルな既約 *Casselman–Wallach* 表現は既約主系列表現と同型になることが知られているので，我々の主定理により，*Sun* 氏の結果の $F = \mathbb{C}$ の場合の別証明および *Dong* 氏と *Xue* 氏の結果のすべての臨界値への拡張を得ることができる．

3 証明の概略

3.1 Godement 切断 1 ($G_{n-1} \to G_n$)

この節では，Jacquet 氏 [Ja2, §7] によって定義された Godement 切断を紹介する．$n > 1$ とし，$d = (d_1, d_2, \cdots, d_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n) \in \mathbb{C}^n$ とする．$\widehat{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$, $\widehat{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ とおく．$\mathrm{Re}(\nu_n - \nu_i) > -1$ $(1 \leq i \leq n-1)$ であるとき，$f \in I(\widehat{d}, \widehat{\nu})_{K_{n-1}}$, $\phi \in \mathcal{S}_0(\mathrm{M}_{n-1,n}(F))$ に対して，Godement 切断 $\mathrm{g}^+_{d_n,\nu_n}(f, \phi)$ を

$$\begin{aligned}\mathrm{g}^+_{d_n,\nu_n}(f,\phi)(g) =& \chi_{d_n}(\det g)|\det g|_F^{\nu_n+(n-1)/2} \\ & \times \int_{G_{n-1}} \phi((h, \mathbf{0}_{n-1})g) f(h^{-1}) \chi_{d_n}(\det h) |\det h|_F^{\nu_n+n/2}\, dh \qquad (g \in G_n)\end{aligned}$$

で定義する．ここで，$\mathbf{0}_{n-1} = {}^t(0, 0, \cdots, 0) \in \mathrm{M}_{n-1,1}(F)$ とする．$\mathrm{g}^+_{d_n,\nu_n}(f, \phi)(g)$ は ν_n について $\mathbb{C}$ 上の有理型に解析接続され，$I(d, \nu)_{K_n}$ の元を定める．さらに，$\varepsilon \in \{\pm 1\}$ に対して，次のような Whittaker 関数についての等式が得られる：

$$\begin{aligned}\mathrm{W}^{(\varepsilon)}_{\mathrm{Jac}}\big(\mathrm{g}^+_{d_n,\nu_n}(f,\phi)\big)(g) =& \chi_{d_n}(\det g)|\det g|_F^{\nu_n+(n-1)/2} \\ & \times \int_{G_{n-1}} \left(\int_{\mathrm{M}_{n-1,1}(F)} \phi\left((h, hz)\, g\right) \psi_{-\varepsilon}(e_{n-1}z)\, dz \right) \\ & \times \mathrm{W}^{(\varepsilon)}_{\mathrm{Jac}}(f)(h^{-1}) \chi_{d_n}(\det h) |\det h|_F^{\nu_n+n/2}\, dh \qquad (g \in G_n).\end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで，$e_{n-1} = (0, 0, \cdots, 0, 1) \in \mathrm{M}_{1,n-1}(F)$ とする．(3.1) の右辺の積分はすべての $\nu_n \in \mathbb{C}$ で絶対収束し，ν_n の整関数を定める．

3.2 Godement 切断 2 ($G_n \to G_n$)

この節では，新しい種類の Godement 切断を紹介する．$d \in \mathbb{Z}^n$, $\nu \in \mathbb{C}^n$ とする．$s \in \mathbb{C}$, $l \in \mathbb{Z}$ とし，$\mathrm{Re}(s)$ は十分大きいとする．$f \in I(d, \nu)_{K_n}$, $\phi \in \mathcal{S}_0(\mathrm{M}_n(F))$ に対して，Godement 切断 $\mathrm{g}^\circ_{l,s}(f, \phi) \in I(d, \nu)_{K_n}$ を

$$\mathrm{g}^\circ_{l,s}(f,\phi)(g) = \int_{G_n} f(gh)\phi(h)\chi_l(\det h)|\det h|_F^{s+(n-1)/2}\, dh \qquad (g \in G_n)$$

で定義する．$\varepsilon \in \{\pm 1\}$ に対して，次のような Whittaker 関数についての等式が得られる：

$$\mathrm{W}^{(\varepsilon)}_{\mathrm{Jac}}(\mathrm{g}^{\circ}_{l,s}(f,\phi))(g) = \int_{G_n} \mathrm{W}^{(\varepsilon)}_{\mathrm{Jac}}(f)(gh)\phi(h)\chi_l(\det h)|\det h|_F^{s+(n-1)/2}\,dh \quad (g \in G_n). \quad (3.2)$$

3.3 アルキメデス Rankin–Selberg 積分の漸化式

$\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とする．$\phi \in \mathcal{S}(\mathrm{M}_{n,1}(F))$ に対して，Fourier 変換 $\mathcal{F}_\varepsilon(\phi) \in \mathcal{S}(\mathrm{M}_{1,n}(F))$ を

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\phi)(t) = \int_{\mathrm{M}_{n,1}(F)} \phi(z)\psi_{-\varepsilon}(tz)\,d_F z \qquad (t \in \mathrm{M}_{1,n}(F))$$

で定義する．

$$d = (d_1, d_2, \cdots, d_n) \in \mathbb{Z}^n, \qquad \nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n) \in \mathbb{C}^n,$$
$$d' = (d'_1, d'_2, \cdots, d'_{n'}) \in \mathbb{Z}^{n'}, \qquad \nu' = (\nu'_1, \nu'_2, \cdots, \nu'_{n'}) \in \mathbb{C}^{n'}$$

とする．$n > 1$ のとき，$\widehat{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_{n-1})$, $\widehat{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{n-1})$ とおく．$n' > 1$ のとき，$\widehat{d'} = (d'_1, d'_2, \cdots, d'_{n'-1})$, $\widehat{\nu'} = (\nu'_1, \nu'_2, \cdots, \nu'_{n'-1})$ とおく．Whittaker 関数についての 2 種類の等式 (3.1) と (3.2) を用いることで，次の 2 つの命題が得られる．

命題 3.1 ($G_n \times G_n \to G_n \times G_{n-1}$)**.** 上の記法を用いる．$n' = n > 1$ と仮定する．$f \in I(d,\nu)_{K_n}$, $f' \in I(\widehat{d'}, \widehat{\nu'})_{K_{n-1}}$, $\phi_1 \in \mathcal{S}_0(\mathrm{M}_{n-1,n}(F))$, $\phi_2 \in \mathcal{S}_0(\mathrm{M}_{1,n}(F))$ とする．このとき，$\mathrm{Re}(s)$ が十分大きい $s \in \mathbb{C}$ に対して，

$$Z\big(s,\, \mathrm{W}^{(\varepsilon)}_{\mathrm{Jac}}(f),\, \mathrm{W}^{(-\varepsilon)}_{\mathrm{Jac}}\big(\mathrm{g}^{+}_{d'_n,\nu'_n}(f',\phi_1)\big),\, \phi_2\big) = Z\big(s,\, \mathrm{W}^{(\varepsilon)}_{\mathrm{Jac}}\big(\mathrm{g}^{\circ}_{d'_n, s+\nu'_n}(f,\phi_0)\big),\, \mathrm{W}^{(-\varepsilon)}_{\mathrm{Jac}}(f')\big)$$

が成り立つ．ここで，$\phi_0(z) = \phi_1((1_{n-1}, \mathbf{0}_{n-1})z)\phi_2(e_n z) \quad (z \in \mathrm{M}_n(F))$ とする．

命題 3.2 ($G_n \times G_{n-1} \to G_{n-1} \times G_{n-1}$)**.** 上の記法を用いる．$n' = n-1$ と仮定する．$f \in I(\widehat{d}, \widehat{\nu})_{K_{n-1}}$, $f' \in I(d', \nu')_{K_{n-1}}$, $\phi_1 \in \mathcal{S}_0(\mathrm{M}_{n-1}(F))$, $\phi_2 \in \mathcal{S}_0(\mathrm{M}_{n-1,1}(F))$ とする．このとき，$\mathrm{Re}(s)$ が十分大きい $s \in \mathbb{C}$ に対して，

$$Z\big(s,\, \mathrm{W}^{(\varepsilon)}_{\mathrm{Jac}}\big(\mathrm{g}^{+}_{d_n,\nu_n}(f,\phi_0)\big),\, \mathrm{W}^{(-\varepsilon)}_{\mathrm{Jac}}(f')\big) = Z\big(s,\, \mathrm{W}^{(\varepsilon)}_{\mathrm{Jac}}(f),\, \mathrm{W}^{(-\varepsilon)}_{\mathrm{Jac}}(\mathrm{g}^{\circ}_{d_n, s+\nu_n}(f',\phi_1)),\, \mathcal{F}_\varepsilon(\phi_2)\big)$$

が成り立つ．ここで，$\phi_0(z) = \phi_1(z\,{}^t(1_{n-1}, \mathbf{0}_{n-1}))\phi_2(z\,{}^t e_n) \quad (z \in \mathrm{M}_{n-1,n}(F))$ とする．

以下では，$d \in \Lambda_{n,F}$ かつ $-d' \in \Lambda_{n',F}$ であり，$\Pi_{d,\nu}$ と $\Pi_{d',\nu'}$ は既約であると仮定する．命題 3.1 と命題 3.2 を適当な f, f', ϕ_1, ϕ_2 に適用することで，次のような漸化式が得られる．

(I) $n' = n > 1$ であり，$d_1 \geq -d'_1 \geq d_2 \geq -d'_2 \geq \cdots \geq d_n \geq -d'_n$ であるとき，

$$\begin{aligned}
&(\dim V_{-\widehat{d'}})^{-1} Z\big(s, \mathbf{W}^{(\varepsilon)}_{d,\nu}(\xi_{H(d)}), \overline{\mathbf{W}}^{(-\varepsilon)}_{d',\nu'}(\overline{\xi_{H(-d')}}), \overline{\phi_{d+d'}}\big) \\
&= \frac{C_{d,d'}}{\dim V_d} \left(\prod_{i=1}^{n} \Gamma_F(s + \nu_i + \nu'_n;\, d_i + d'_n) \right) Z\big(s, \mathbf{W}^{(\varepsilon)}_{d,\nu}(\xi_{H(d)}), \overline{\mathbf{W}}^{(-\varepsilon)}_{\widehat{d'},\widehat{\nu'}}(\overline{\xi_{H(-\widehat{d'})}})\big).
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$C_{d,d'}$ は具体的に書き下せる定数であり，d と d' のみに依存する．

(II) $n'=n-1$ であり，$d_1 \geq -d'_1 \geq d_2 \geq -d'_2 \geq \cdots \geq d_{n-1} \geq -d'_{n-1} \geq d_n$ であるとき，

$$\begin{aligned}
&C_{d,d'}\left(\dim V_{\widehat{d}}\right)^{-1} Z(s, \mathbf{W}^{(\varepsilon)}_{d,\nu}(\xi_{H(-d')[d]}), \overline{\mathbf{W}}^{(-\varepsilon)}_{d',\nu'}(\overline{\xi_{H(-d')}}))\\
&= \frac{(-\varepsilon\sqrt{-1})^{\sum_{i=1}^{n-1}(d_i+d'_i)}}{\dim V_{-d'}}\left(\prod_{i=1}^{n-1}\Gamma_F(s+\nu_n+\nu'_i; -d_n-d'_i)\right)\\
&\quad \times Z\big(s, \mathbf{W}^{(\varepsilon)}_{\widehat{d},\widehat{\nu}}(\xi_{H(\widehat{d})}), \overline{\mathbf{W}}^{(-\varepsilon)}_{d',\nu'}(\overline{\xi_{H(-d')}}), \overline{\phi_{\widehat{d}+d'}}\big)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$C_{d,d'}$ は具体的に書き下せる定数であり，d と d' のみに依存する．たとえば，漸化式 (I) は次の f, f', ϕ_1, ϕ_2 に命題 3.1 を適用すれば得られる：

$$\begin{aligned}
&f = \mathbf{\Gamma}_F(\nu; d)\mathrm{f}_{d,\nu}(\xi_{H(d)}), && f' = \mathbf{\Gamma}_F(\widehat{\nu'}; \widehat{d'})\bar{\mathrm{f}}_{\widehat{d'},\widehat{\nu'}}(\overline{\xi_{H(-\widehat{d'})}}),\\
&\phi_1(z) = \overline{p_1(z)}\mathbf{e}_{(n-1,n)}(z) \qquad (z \in \mathrm{M}_{n-1,n}(F)), && \phi_2 = \overline{\phi_{d+d'}}.
\end{aligned}$$

ここで，p_1 は次の等式で特徴づけられる $\mathrm{M}_{n-1,n}(F)$ 上の多項式関数とする：

$$p_1((1_{n-1}, \mathbf{0}_{n-1})g) = (\det g)^{d'_n}\langle \tau_{-d'}(g)\xi_{H(-d')}, \xi_{H(-d')}\rangle \qquad (g \in G_n).$$

定理 2.3 と定理 2.5 (1) については，上記の漸化式 (I), (II) を用いた数学的帰納法によって証明することができる．定理 2.5 (2) については，命題 3.1 と命題 3.2 を用いて類似の漸化式を構成して，数学的帰納法で証明する．

参考文献

[DX] Chao-Ping Dong and Huajian Xue. On the nonvanishing hypothesis for Rankin-Selberg convolutions for $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. *Represent. Theory*, Vol. 21, pp. 151–171, 2017.

[GT] I. M. Gel′ fand and M. L. Cetlin. Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, Vol. 71, pp. 825–828, 1950.

[HIM] Miki Hirano, Taku Ishii, and Tadashi Miyazaki. Archimedean zeta integrals for $GL(3) \times GL(2)$. *To appear in Memoir of the AMS.*

[IM] Taku Ishii and Tadashi Miyazaki. Calculus of archimedean rankin–selberg integrals with recurrence relations. *preprint (arXiv:2006.04095).*

[IS] Taku Ishii and Eric Stade. Archimedean zeta integrals on $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_m$ and $\mathrm{SO}_{2n+1} \times \mathrm{GL}_m$. *Manuscripta Math.*, Vol. 141, No. 3-4, pp. 485–536, 2013.

[JL] H. Jacquet and R. P. Langlands. *Automorphic forms on* GL(2). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[Ja1] Hervé Jacquet. *Automorphic forms on* GL(2). *Part II.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 278. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[Ja2] Hervé Jacquet. Archimedean Rankin-Selberg integrals. In *Automorphic forms and L-functions II. Local aspects*, Vol. 489 of *Contemp. Math.*, pp. 57–172. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[JS] Hervé Jacquet and Joseph Shalika. Rankin-Selberg convolutions: Archimedean theory. In *Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I (Ramat Aviv, 1989)*, Vol. 2 of *Israel Math. Conf. Proc.*, pp. 125–207. Weizmann, Jerusalem, 1990.

[Kn] Anthony W. Knapp. *Representation theory of semisimple groups.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. An overview based on examples, Reprint of the 1986 original.

[Ko] Bertram Kostant. On Whittaker vectors and representation theory. *Invent. Math.*, Vol. 48, No. 2, pp. 101–184, 1978.

[Mi] Tadashi Miyazaki. The local zeta integrals for $GL(2, \mathbf{C}) \times GL(2, \mathbf{C})$. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, Vol. 94, No. 1, pp. 1–6, 2018.

[Po] Alexandru A. Popa. Whittaker newforms for Archimedean representations. *J. Number Theory*, Vol. 128, No. 6, pp. 1637–1645, 2008.

[Sh] J. A. Shalika. The multiplicity one theorem for GL_n. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 100, pp. 171–193, 1974.

[SV] Birgit Speh and David A. Vogan, Jr. Reducibility of generalized principal series representations. *Acta Math.*, Vol. 145, No. 3-4, pp. 227–299, 1980.

[St1] Eric Stade. Mellin transforms of $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ Whittaker functions. *Amer. J. Math.*, Vol. 123, No. 1, pp. 121–161, 2001.

[St2] Eric Stade. Archimedean L-factors on $\mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(n)$ and generalized Barnes integrals. *Israel J. Math.*, Vol. 127, pp. 201–219, 2002.

[Su] Binyong Sun. The nonvanishing hypothesis at infinity for Rankin-Selberg convolutions. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 30, No. 1, pp. 1–25, 2017.

[Wa] Nolan R. Wallach. *Real reductive groups. II*, Vol. 132 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1992.

[Zh] Shou-Wu Zhang. Gross-Zagier formula for GL_2. *Asian J. Math.*, Vol. 5, No. 2, pp. 183–290, 2001.