空間・運動量切断が加わった ϕ^4 model の基底状態エネルギーの 1 次の摂動展開について -Araiの漸近的摂動論の応用-

Toshimitsu Takaesu
Faculty of Science and Technology, Gunma University

[概要] 空間 d 次元の ϕ^4 model の基底状態エネルギーについて考察する。空間切断および運動量切断を導入すると、系の全ハミルトニアンはボソンフォック空間上の自己共役作用素となる。主定理において、 massive および massless の場合でも、縮退していない基底状態エネルギーは運動量正則条件の下で 1 次の摂動展開可能であるとことを示す。

1　導入および主結果

本稿では空間切断および運動量切断が加わった ϕ^4 model の基底状態エネルギーの摂動展開に関する結果 ([16]) について概説する。空間次元は d 次元とする。系のヒルベルト空間は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のボソンフォック空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\otimes_{\mathrm{s}}^n L^2(\mathbb{R}^d) \right)$ で与えられる。系の全ハミルトニアンは

$$H(\kappa) \ = \ H_0 + \kappa \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\mathrm{I}}(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x})^4 d\mathbf{x}, \qquad \kappa > 0, \tag{1}$$

とする。ここで、無摂動ハミルトニアンは $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, $m \geq 0$, の第二量子化作用素 $H_0 = d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega)$ で定義される。場の作用素は $\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{a(\rho_{\mathrm{b},\mathbf{x}}(\mathbf{k})) + a^{\dagger}(\rho_{\mathrm{b},\mathbf{x}}(\mathbf{k}))} \right)$ で与えられている。ただし、$a(f)$ は消滅作用素、$a^{\dagger}(g)$ は生成作用素で、$\rho_{\mathrm{b},\mathbf{x}}(\mathbf{k}) = \rho_{\mathrm{b}}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$、$\rho_{\mathrm{b}}(\mathbf{k}) = \frac{\chi_{\mathrm{b}}(\mathbf{k})}{\sqrt{\omega(\mathbf{k})}}$ と定めている。$\overline{X}$ は作用素 X の閉包とする。ϕ^4 model は構成論的場の量子論の初期 ([7]) から研究されてきた系である。[16] の主結果は $H(\kappa)$ の縮退していない基底状態エネルギーが 1 次の摂動展開可能ということである。必要な条件などは後述するが、ϕ^4 model の作用素論としての特徴の一つに摂動が特異である、すなわち摂動が無摂動作用素に対して相対有界でないということがあげられる。また場の質量に関して, massless な場合には H_0 の基底状態エネルギーは埋蔵固有値となっている。これらの理由により Kato の解析的摂動論 ([14]) を直接応用することはできない。[16] の基本的な方針は、Arai の漸近的摂動論 ([2]) を応用することである。 Arai の方法は Brillouin-Wigner perturbation methods に基づく新たな摂動論の手法で、massless なボーズ場が相互作用する系である一般化された spin-boson model へ応用されている。補足であるが、Arai の方法はヒルベルト空間上の線形作用素論の一般論に関する研究としても重要な研究結果であり、場の量子論および量子力学のさ

まざまな系へ応用されていくなかで今後発展していくと予想している。 相互作用する場の量子論の基底状態の摂動展開に関する先行研究としては、 Pauli-Fierz models ([6, 8, 9, 10, 11]), spin-boson model ([5, 12]) などで考察されているが、いずれも考察する系に大きく依存する手法である。1990 年代後半以降から現在に至るまでの場の量子論の系の埋蔵固有値の摂動問題に関する研究の進展については、[4, 13] で大変優れた解説がなされており、この研究分野に興味ある方にはぜひ参照して頂きたい。

主結果のために必要な条件としては、まず以下の条件が成り立つとする。

(H.1;Ultra-violet cutoff) $\|\chi_{\mathrm{b}}\|_{L^2} < \infty, \|\frac{\chi_{\mathrm{b}}}{\sqrt{\omega}^l}\|_{L^2} < \infty, l = 1, 2.$
(H.2;Spatial cutoff) $\|\chi_{\mathrm{I}}\|_{L^1} < \infty.$

(H.3) There exists $\kappa_* > 0$ such that for all $0 < \kappa < \kappa_*$, $H(\kappa)$ has a ground state with dim ker $(H(\kappa) - E_0(\kappa)) = 1$.

ここで Ω_κ を $H(\kappa)$ の規格化された基底状態とする：

$$H(\kappa)\Omega_\kappa = E_0(\kappa)\Omega_\kappa, \qquad \|\Omega_\kappa\| = 1.$$

さらに以下の条件を仮定する。

(H.4) $\|\frac{\chi_{\mathrm{b}}}{\omega^{3/2}}\|_{L^2} < \infty.$

この条件は以下で述べる boson number bound を示すために必要な条件で、$d \leq 3$ で massless な場合には赤外正則条件となる。

以下で主定理を述べる。

Theorem ([16]; Theorem 2.1)
Suppose **(H.1) - (H.4)**. Then

$$E_0(\kappa) = \kappa(\Omega_0, H_{\mathrm{I}}\Omega_0) + o(\kappa), \qquad \kappa \to 0.$$

主定理の証明の基本的な方針は前述の Arai の一般論を応用することである。そのために、まず基底状態エネルギーの上限に関する不等式を示し、その後、ハミルトニアンの H-有界性というノルム不等式を導出する。そして、消滅作用素の作用素値核を導入し pull-through formula と呼ばれる公式を導出した後に、基底状態の存在および一意性を示す際に用いられる boson number bound と呼ばれるノルム不等式が成り立つことを示す。

謝辞

研究集会代表者である廣島文生先生には発表する機会を頂き、この場を借りてお礼を申しあげます。This work was supported by JSPS KAKENHI 20K03625 and the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参考文献

[1] A. Arai, *Analysis on Fock spaces and mathematical theory of quantum fields: An introduction to mathematical analysis of quantum fields*, World Scientific Publishing, 2018.

[2] A. Arai, A new asymptotic perturbation theory with applications to models of massless quantum fields, *Ann. H. Poincaré* **15** (2014), 1145-1170.

[3] A. Arai, Asymptotic expansions for the ground state energy of a model with a massless quantum field, 数理解析研究所講究録, **1921** (2014), 28-40.

[4] 新井朝雄、量子場の数理解析 -歴史的概観と新しい漸近的摂動論-, 数学 **69** (2017) 255-279.

[5] G. Braunlich, D. Hasler and M. Lange, On asymptotic expansions in spin-boson models, *Ann. Henri Poincaré* **19** (2018), 515-564.

[6] J. Faupin, J. S. Møller and E. Skibsted, *Commun. Math. Phys.* Second order perturbation theory for embedded eigenvalues, **306** (2011), 193 - 228.

[7] J. Glimm and A. Jaffe, The $\lambda\varphi^4$ quantum field theory, without cutoffs. I, *Phys. Rev.* **176** (1968), 1945-1951.

[8] M. Griesemer and D. G. Hasler, Analytic perturbation theory and renormalization analysis of matter coupled to quantized radiation, *Ann. Henri Poincaré* **10** (2009), 577-621.

[9] C. Hainzl and R. Seiringer, Mass renormalization and energy level shift in non- relativistic QED, *Adv. Theor. Math. Phys*. **6** (2002) 11 847-871.

[10] D. Hasler, I. Herbst, Smoothness and analyticity of perturbation expansions in QED, *Adv. Math*. **228**, (2011) 3249-3299.

[11] D. Hasler, I. Herbst, Convergent expansions in non-relativistic qed: analyticity of the ground state, *J. Funct. Anal.* **261** (2011) 3119-154.

[12] D. Hasler and I. Herbst, Ground states in the spin boson model, *Ann. Henri Poincaré* **12** (2011), 621-677.

[13] 廣島文生、場の理論における埋蔵固有値の摂動問題, 数学 **57** (2005) 70-92.

[14] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, 1966.

[15] 加藤敏夫 稿，黒田成俊 編注、 量子力学の数学理論：摂動論と原子等のハミルトニアン, 近代科学社, 2017.

[16] T. Takaesu, The first order expansion of a ground state energy of the ϕ^4 model with cutoffs, *to be published in Journal of Mathematical Physics*.

Toshimitsu Takaesu
Faculty of Science and Technology, Gunma University
4-2 Aramaki-machi, Maebashi City, Gunma, 371-8510
t-takaesu@hotmail.co.jp