超対称を持つ統計力学模型 (Nicolai model) のスペクトラル解析

Hajime Moriya *

2021.3.8

keywords: 超対称. 格子フェルミオン模型. スペクトル.

概 要

超対称フェルミオン模型である Nicolai 模型のスペクトル解析についての研究成果を報告する. 講究録では, 背景 · 目的などに力点を置き解説する. 講演後にいただいた質問についても答える.

1　導入

超対称格子フェルミオン模型であるニコライ模型 [1] の研究成果を報告する.

最初に, 歴史 · 背景について述べたい. 超対称性 (Supersymmetry) は本義的には場の理論の概念であり, ボゾン (光子)· フェルミオン (物質) の間の対称性を意味する [2]. 超対称は素粒子論のみならず, 物理 · 数学に幅広く浸透している [3]. 中でも超対称量子力学 (SUSY Quantum Mechanics) は数理物理の一分野として, 研究が積み重ねてきた [4]. 超対称量子力学の代表的な模型は Witten 模型で, 位相幾何との関連が深い [5]. Witten 模型と指数定理については, [6] にある江口徹氏の概説がある. また, 関数解析的な立場からの超対称理論の諸結果については [7] の中で述べられている.

*金沢大学理工域機械

素朴に, 統計力学では, 超対称性はどうであろうか? 実は「超対性代数を統計力学模型でいかに実現するか?」という問いは古い. 4次元の相互作用を持つ超対称型である Wess-Zumino 模型の導入の数年後に, Nicolai はこの問題に取り組み, 本研究のテーマであるニコライ模型が導入された. ([1] で Nicolai は, Wess からの影響を記している.) ニコライ模型は Witten 模型を先行しており, "超対称量子力学の元祖" といえよう [4].

長らく, ニコライ模型以外の超対称性格子フェルミオン模型は知られていなかったが, 2003 年に Fendley-Schoutens-de Boer が新たな模型を与えた [8]. これをフェンドリー模型と呼ぶ. フェンドリー模型はアムステルダム大学のグループが中心となり研究が進展しており, その発展がニコライ模型の再考察を促したといえる.

[9] ではニコライ模型の力学系に着目し, 基底状態の多縮退 (系に対して縮退数の指数的な増加) や非エルゴード性を明らかにした. フェンドリー模型において基底状態の高縮退 (熱力学第三法則の破れ) があることが知られる [10]. フェンドリー模型とニコライ模型は「高縮退する基底状態」という共通する性質を持つことが分かった. またこれらの具体的模型を含む, 超対称格子フェルミオン系の一般的な数理構造が研究された [11]. 無限次元 C*環系においては, 超対称が破れた場合も厳密に扱うことができ, 超対称を持つ時間発展群の性質について議論することが出来る.

ニコライ模型は, 現実の物性とは関連がなく, 人為的な模型である. また, 本研究とは直接の関連はないが, 自然界に超対称が存在することに懐疑的な見解があることも付記しておきたい [12].

2 ニコライ模型の基底状態

2.1 超対称代数

$\mathcal{N} = 2$ 超対称代数を復習しよう. ニコライ模型, フェンドリー模型はこの超対称代数を満たす模型である.

偶奇ヒルベルト空間 $\mathscr{H} = \mathscr{H}_+ \oplus \mathscr{H}_-$. また F をフェルミオン数作用素とする. $(-1)^F$ は固有値 $+1$ を $\mathscr{H}_+$, 固有値 -1 を $\mathscr{H}_-$ でとる.

conjugate 作用素のペア Q, Q^* on $\mathscr{H}$ s.t.

$$\{(-1)^F,\ Q\} = \{(-1)^F,\ Q^*\} = 0, \tag{1}$$

$$Q^2 = 0 \tag{2}$$

を超対称作用素という．超対称型ハミルトニアンは

$$H := \{Q,\ Q^*\} \equiv QQ^* + Q^*Q. \tag{3}$$

で与える. 必然的に Q, Q^* は対称性になる:

$$[H,\ Q] = [H,\ Q^*] = 0. \tag{4}$$

2.2 格子フェルミオン系

フェルミオン粒子 (スピン無し) を考察する. a_k^*, a_k $(k \in \mathbb{Z})$: 生成 · 消滅フェルミオン演算子で

$$\begin{aligned} &\{a_i^*, a_j\} = \delta_{i,j}\,1, \\ &\{a_i^*, a_j^*\} = \{a_i, a_j\} = 0, \quad i, j \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{5}$$

また, フェルミオン数作用素を

$$n_k := a_k^* a_k, \quad F := \sum_{k\in\mathbb{Z}} n_k \tag{6}$$

で与える.

2.3 ニコライ模型の具体的な形

フェルミオン 3 体の積 (中心が偶数) から

$$Q_{\mathrm{Nic}} := \sum_{i\in\mathbb{Z}} q_{2j},\ q_{2j} := a_{2j+1}a^*_{2j}a_{2j-1} \tag{7}$$

を与える. これは nilpotent 性 (重要)

$$Q^2_{\mathrm{Nic}} := 0 \tag{8}$$

を満たし, 超対称的なハミルトニアンを与える

$$H_{\mathrm{Nic}} := \{Q_{\mathrm{Nic}},\ Q_{\mathrm{Nic}}^*\}. \tag{9}$$

単純計算から

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{Nic}} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \big\{ & a^*_{2i}a_{2i-1}a_{2i+2}a^*_{2i+3} + a^*_{2i-1}a_{2i}a_{2i+3}a^*_{2i+2} \\ & + a^*_{2i}a_{2i}a_{2i+1}a^*_{2i+1} + a^*_{2i-1}a_{2i-1}a_{2i}a^*_{2i} - a^*_{2i-1}a_{2i-1}a_{2i+1}a^*_{2i+1} \big\}. \end{aligned} \tag{10}$$

2.4 ニコライ模型の古典基底状態

超対称基底状態の定義は以下のようである:

Definition 1. $|\varphi\rangle$ *は超対称基底状態* $\Longleftrightarrow$ *ゼロエネルギー固有ベクトル:*

$$H|\varphi\rangle = 0 \tag{11}$$

$\Longleftrightarrow$ *超対称作用素の conjugate pair 両方で消される:*

$$Q|\varphi\rangle = 0 = Q^*|\varphi\rangle. \tag{12}$$

以下, 古典状態に限定し, 超対称基底状態を探そう.

Definition 2. $\{0,1\}$-値数列 $g(n)$ *($n \in \mathbb{Z}$) に対し, 古典状態 (積状態)*

$$|\{g(n)\}\rangle := \cdots \otimes |g(i-1)\rangle_{i-1} \otimes |g(i)\rangle_i \otimes |g(i+1)\rangle_{i+1} \otimes \cdots$$

を与える.

Definition 3. $\{2i-1, 2i, 2i+1\}$ *($i \in \mathbb{Z}$) 上にある 2^3 個の数列のうち, "$0,1,0$" $\equiv \circ\bullet\circ$ と "$1,0,1$" $\equiv \bullet\circ\bullet$ を禁止 triplet と呼ぶ.*

Definition 4. 数列 $g(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ が禁止 *triplet* を一つも含まないとき, 基底的な配列という.

[例]: 三体系での基底状態

偶数点 $2j \in \mathbb{Z}$ をとり, 三体系 $\{2j-1, 2j, 2j+1\}$ を考える. $8(=2^3)$ 個の配列は:

configs.	$2j-1$	$2j$	$2j+1$
ground-st.	$\circ$	$\circ$	$\circ$
ground-st.	$\circ$	$\circ$	$\bullet$
forbidden	$\circ$	$\bullet$	$\circ$
ground-st.	$\bullet$	$\circ$	$\circ$
ground-st.	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$
forbidden	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$
ground-st.	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$
ground-st.	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$

8 個のうち 6 個がゼロエネルギー (基底) 状態である. 実際, 禁止列の状態 $\circ\bullet\circ$ と $\bullet\circ\bullet$ のみが $q_{2j} \equiv a_{2j+1}a^*_{2j}a_{2j-1}$. or ${q_{2j}}^*$ で消されず

$$ {q_{2j}}^* \circ\bullet\circ = +1 \bullet\circ\bullet, \quad q_{2j} \bullet\circ\bullet = -1 \circ\bullet\circ. $$

エネルギーの値は > 0 である. それ以外の 6 つの配列は超対称作用素で消され

$$0 = {q_{2j}}^* \circ\circ\circ = q_{2j} \circ\circ\circ = {q_{2j}}^* \circ\circ\bullet = q_{2j} \circ\circ\bullet, \cdots$$

ゼロエネルギー (基底) 状態になる.

三体系での事実は以下のように一般化される.

Theorem 1. *古典状態 $|\{g(n)\}\rangle$ が基底状態になる.*
$\Longleftrightarrow$ *$g(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ は基底的な配列.*

この Theorem から「基底的な配列」という用語が正当化される.
さらに, 以下のような特徴づけが可能である:

Theorem 2. *H_{Nic} の古典基底状態はハミルトニアンの古典部分:*
$H_{\mathrm{classical}} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} n_{2i} - n_{2i-1}n_{2i} - n_{2i}n_{2i+1} + n_{2i-1}n_{2i+1}$
の基底状態と一致.

2.5 基底状態の縮退と自発的対称性の破れ

基底状態の縮退を自発的対称性の破れと関連付けたい. ニコライ模型は隠れたフェルミオン対称性を持つが, まずその意味を確認しよう.

Definition 5. フェルミオン作用素 B が不変量

$$[H_{\mathrm{Nic}},\ B] = 0$$

のとき, フェルミオン的対称性を生成する *(superderivation)*. 特に *nilpotent*

$$B^2 = 0 \tag{13}$$

のとき隠れ超対称性を生成する.

B の例として Q_{Nic} がある. 他にたくさんあることを示そう.

Definition 6. $f(n)$ を有限区間 Λ 上の ± 1-値関数とする. $f(n)$ が禁止 *triplet*

$$f(2i-1)=-1,\ f(2i)=+1,\ f(2i+1)=-1, \tag{14}$$

$$f(2i-1)=+1,\ f(2i)=-1,\ f(2i+1)=+1 \tag{15}$$

を一つも<u>含まず</u>, さらに端点で

$$f(2k)=f(2k+1)\ \mathit{and}\ \ f(2l-1)=f(2l). \tag{16}$$

Λ 上の不変量を表す有限列という.

Definition 7. 写像

$$\zeta_i(-1):=a_i, \quad \zeta_i(+1):=a_i^*. \tag{17}$$

で与える. また, Λ を奇数個の点を持つ有限区間とする. Λ を台に持つ ± 1-値配列 $f(n)$ からフェルミオン作用素積を

$$\mathscr{Q}(f):=\prod_{i\in\Lambda}\zeta_i(f(i)). \tag{18}$$

これは局所フェルミオン対称性を与える:

Theorem 3. ± 1-値配列 $f(n)$ は Λ 上の不変量を表す有限列とする.

$$[H_{\mathrm{Nic}},\ \mathscr{Q}(f)]=0$$

すなわち フェルミオン作用素 $\mathscr{Q}(f)$ は, 隠れフェルミオン対称性を与える.

Theorem 4 ([13])**.** 任意の古典基底状態は, 隠れフェルミオン対称性 *(*超対称性*)* の破れに対応し, 縮退する古典基底状態達 $\{|\{g(n)\}\rangle\}$ は, 互いに隠れフェルミオン対称性の作用で移り合う *(transitivity)*.

Theorem の意味は:

任意の古典基底状態の組 $|\{g_a(n)\}\rangle$ と $|\{g_b(n)\}\rangle$ (必然的に $g_a(n)$, $g_b(n)$ ともに基底的な配列.) に対し, 必ず不変量を表す有限列 $f_1(n), f_2(n), \cdots, f_l(n)$ が存在して

$$|\{g_b(n)\}\rangle = \mathscr{Q}(f_l)\cdots\mathscr{Q}(f_2)\mathscr{Q}(f_1)|\{g_a(n)\}\rangle$$

ということである. これは通常の自発的対称性の描像と同じである.

3 質疑応答

いただいた質問について.

Q1. 指数定理はニコライ模型で考察できるのか.

A. はい. [14] で得られています. ただし Witten 指数は自明に消えてしまうので, 変形します.

Q2. 高次元の格子にニコライ模型は拡張できるか?

A. ニコライ模型またフェンドリー模型とも $\mathbb{Z}^d$ に導入できます. どの edge を取るかによって変わるので, 拡張は一意ではないです. 一般のグラフで, 1 点を囲む edges が奇数個の場合は, 自然な拡張では得られません.

Q3. 「固有値はすべて 0 以上の整数」は, 任意の有限系で正しいか?

A. 8 体系, 10 体系では自然数に加え, 非整数の固有値が出ます.

Q4. ニコライ模型以外に超対称格子模型が可能か? 超対称を与える一般的な条件はあるのか.

A. nilpotent 条件を局所スーパーチャージポテンシャルの言葉に翻訳した proposition が [11] にあります.

Q5. 超対称を破る模型はあるか?

A. ニコライ模型に自明な超対称作用を加えた「拡張ニコライ模型」は超対称を破ります [15], [16]. なおフェンドリー模型は超対称を破らない模型ですが, 超対称を破る変形は知られていません.

Q6. C*環で超対称性を扱う意義は何か.

A. C*環では超対称微分 (supederivation) が基本です. supederivation の定式は, 有限系でも有効であることが (暗示的ですが) 示されています [13].

また, 本研究とは関連はありませんが, ボゾンを含む普通の超対称性の C*環での研究は, Buchholz が Resolvent C*環という非 simple (日常の意味と代数的な意味両方で単純ではない $\cdots$) C*環を導入しています. 自由場模型からして難解です.

Q7. 基底状態高縮退は, 超対称格子模型の一般的な性質か.

A. 具体的な模型は多くありませんが, ニコライ模型の変形や拡張, フェンドリー模型ではそうなりますし, 一般化できそうです. また直接関係はありませんが, 高縮退を持つ超対称量子力学模型が [17] で論じられています.

参考文献

[1] Nicolai H 1976 Supersymmetry and spin systems *J. Phys. A: Math. Gen.* **9** 1497

[2] Weinberg S 2000 *The quantum theory of fields, Volume 3: Supersymmetry* (Cambridge University Press)

[3] Duplij S 2006 *Concise encyclopedia of supersymmetry: And noncommutative structures in mathematics and physics* (Springer)

[4] Junker G 1996 *Supersymmetric methods in quantum and statistical physics* (Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag)

[5] Witten E 1981 Dynamical breaking of supersymmetry *Nucl. Phys.* **B185** 513

[6] 大学院素粒子物理 2　新領域の開拓 (講談社)

[7] 新井朝雄　量子現象の数理 (朝倉物理学大系) (朝倉書店)

[8] Fendley P, Schoutens K and de Boer J 2003 Lattice models with N=2 supersymmetry *J. Phys. A: Math. Theor.* **90** 120402

[9] Moriya H 2018 Ergodicity breaking and localization of the Nicolai supersymmetric fermion lattice model *J. Stat. Phys.* **172** 1270

[10] van Eerten H 2005 Extensive ground state entropy in supersymmetric lattice models *J. Math. Phys.* **46** 123302

[11] Moriya H 2016 On supersymmetric fermion lattice systems. *Ann. Inst. Henri. Poincaré* **17** 2199

[12] 中西襄 2006 数理解析研究所講究録 (場の量子論の研究) **1524** 50

[13] Katsura H, Nakayama Y and Moriya H 2020 Characterization of degenerate supersymmetric ground states of the Nicolai supersymmetric fermion lattice model by symmetry breakdown *J. Phys. A: Math. Theor.* **53** 385003

[14] La R, Schoutens K and Shadrin S 2018 Ground states of Nicolai and $\mathbb{Z}_2$ Nicolai models *J. Phys. A: Math. Theor.* **52** 02LT01

[15] Sannomiya N, Katsura H and Nakayama Y 2016 Supersymmetry breaking and Nambu-Goldstone fermions in an extended Nicolai model Phys. Rev. D **94** 045014

[16] Moriya H 2018 Supersymmetry breakdown for an extended version of the Nicolai supersymmetric fermion lattice model *Phys. Rev. D* **98** 015018

[17] Arai A 1989 Existence of infinitely many zero-energy states in a model of supersymmetric quantum mechanics *J. Math. Phys.* **30** 1164