Linear position measurements with minimum error-disturbance in each minimum uncertainty state

一般社団法人 ドレスト光子研究起点，名古屋大学情報学研究科
岡村 和弥 *

本稿では，非相対論的 1 粒子量子系 S における，最小不確定状態での位置測定で最小の誤差・擾乱関係を満たすものについて紹介する。Heisenberg の論文 [2] 以来，位置測定について議論がなされてきた。von Neumann は測定について統計的な観点から考察し，彼が提唱した量子力学の公理系との整合性の観点とも照らし合わせ，測定の量子力学的モデリングを行った。Heisenberg の不確定性関係の 1 つである，Heisenberg の誤差・擾乱関係

$$\varepsilon(Q_1)\eta(P_1) \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1}$$

は von Neumann の位置測定モデルに対して成立するが，一般には破れている [14]。ここで，Q_1 と P_1 はそれぞれ非相対論 1 粒子系での位置作用素と運動量作用素であり，正準交換関係 $[Q_1, P_1] = \hbar 1$ を満たす。Heisenberg の誤差・擾乱関係の破れは，1980 年代に無誤差線形測定 [7] の構築により明確に示され，更には雑音作用素に基づく量子二乗平均平方根誤差に対する普遍的に妥当な誤差・擾乱関係 [9, 10, 11, 12, 1, 13] が示されたことで広く認識された。現在では，タイトな誤差・擾乱関係を示す研究や，量子誤差の改良に関心が持たれている [15]。

本稿で扱う，系 S の最小不確定状態 ψ とは，$\langle Q_1\rangle_\psi = q_1, \langle P_1\rangle_\psi = p_1$ および $\sigma(Q_1\|\psi) = \sigma_1 > 0$ となるベクトル状態のことであり，座標表示では

$$\psi(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{(2\pi)\sigma_1^2}} e^{-\frac{1}{4\sigma_1^2}(x-q_1)^2 + i\frac{p_1}{\hbar}x} \tag{2}$$

となる。 ψ は $\sigma(P_1) = \hbar/(2\sigma_1) =: \hat{\sigma}_1$ を満たしている。Q_1 と P_1 はともに $\mathcal{H}_{\mathbb{S}} = L^2(\mathbb{R})$ 上の自己共役作用素であり，$\psi \in \mathcal{H}_{\mathbb{S}}$ である。

系 S の状態が ψ であるとき，すべての位置測定に対して，Q_1 の雑音作用素に基づく q-rms 誤差 $\varepsilon_0(Q_1)$ および P_1 擾乱作用素に基づく q-rms 擾乱 $\eta_0(P_1)$ は

$$\varepsilon_0(Q_1)^2\sigma(P_1)^2 + \sigma(Q_1)^2\eta_0(P_1)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \tag{3}$$

を満たす。この不等式は Branciard-Ozawa 誤差・擾乱関係 [1, 13] の最小不確定状態 ψ での位置測定に対する特殊な場合である．(3) 式の下限が達成可能であることを，線形位置測定を用いることで示す。つまり，ψ において

$$\varepsilon_0(Q_1)^2\sigma(P_1)^2 + \sigma(Q_1)^2\eta_0(P_1)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \tag{4}$$

*k.okamura.renormalizable@gmail.com

を満たす具体的な線形位置測定を構築する。そのような測定の構築は，ψ において

$$\left(\frac{\varepsilon_0(Q_1)}{\sigma(Q_1)}\right)^2+\left(\frac{\eta_0(P_1)}{\sigma(P_1)}\right)^2=1 \tag{5}$$

を満たすものを構築するのと等価である。

S に対する測定過程とは，$\mathcal{K}$ は Hilbert 空間，ζ は $\mathcal{K}$ の単位ベクトル, M は $\mathcal{K}$ 上の自己共役作用素，U は $\mathcal{H}_{\mathbf{S}}\otimes\mathcal{K}$ 上のユニタリー作用素からなる 4 つ組 $\mathbb{M}_0=(\mathcal{K},\zeta,M,U)$ のことである [6]。測定過程 $\mathbb{M}_0$ は測定装置 $\mathbf{A}_0$ のプローブ部分 $\mathbf{P}_0$ のモデリングであり，$\mathcal{K}$ 上の自己共役作用素および密度作用素は $\mathbf{P}_0$ の物理量と状態をそれぞれ記述する。ζ は $\mathbf{P}_0$ のベクトル状態であり，M はメーター物理量である。U はこのとき時刻 0 に開始し時刻 $\tau(>0)$ に終わる **S** と $\mathbf{P}_0$ の測定相互作用を記述する。$\mathbb{M}_0$ を用いるとき，時刻 0 における $\mathbf{S}+\mathbf{P}_0$ の各物理量 $X=:X(0)$ に対し，時刻 τ における物理量 $X(\tau)$ は

$$X(\tau)=U^{-1}XU \tag{6}$$

で与えられる。

ベクトル状態 ϕ における A の雑音作用素に基づく q-rms 誤差は

$$\varepsilon_0(A,\mathbb{M}_0,\phi)=\sqrt{\langle N(A,\mathbb{M}_0)^2\rangle_{\phi\otimes\zeta}}, \tag{7}$$

で定義される。$N(A,\mathbb{M}_0)=M(\tau)-A(0)$ は A に対する雑音作用素である。各物理量 B に対し，ベクトル状態 ϕ における B の擾乱作用素に基づく q-rms 擾乱は

$$\eta_0(B,\mathbb{M}_0,\phi)=\sqrt{\langle D(B,\mathbb{M}_0)^2\rangle_{\phi\otimes\zeta}} \tag{8}$$

で定義される。ここで $D(B,\mathbb{M}_0)=B(\tau)-B(0)$ は B の擾乱作用素である。混乱が生じない限り，$\varepsilon_0(A,\mathbb{M}_0,\phi)$ と $\eta_0(B,\mathbb{M}_0,\phi)$ はそれぞれ $\varepsilon_0(A)$ および $\eta_0(B)$ と省略する。$\mathcal{H}_{\mathbb{S}}$ 上の密度作用素 ρ に対し，A の雑音作用素に基づく q-rms 誤差 $\varepsilon_0(A,\mathbb{M}_0,\rho)$ および擾乱作用素に基づく q-rms 擾乱 $\eta_0(B,\mathbb{M}_0,\rho)$ それぞれは (7) 式および (8) 式で $\langle\cdots\rangle_{\phi\otimes\zeta}$ を $\mathrm{Tr}[(\cdots)(\rho\otimes|\zeta\rangle\langle\zeta|)]$ で置き換えることで定義される。

$\varepsilon_0(A)$ と $\eta_0(B)$ は Branciard-Ozawa 誤差・擾乱関係を満たす：

Theorem 1.

$$\varepsilon_0(A)^2\sigma(B)^2+\sigma(A)^2\eta_0(B)^2+2\varepsilon_0(A)\eta_0(B)\sqrt{\sigma(A)^2\sigma(B)^2-D_{AB}^2}\geq D_{AB}^2. \tag{9}$$

ここで，D_{AB} は

$$D_{AB}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}|\sqrt{\rho}(-i[A,B])\sqrt{\rho}| \tag{10}$$

で定義される。

Branciard [1] はベクトル状態に対しこの不等式を証明した。ベクトル状態 $\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$ に対し，D_{AB} は

$$C_{AB}:=\frac{1}{2}|\mathrm{Tr}[\rho(-i[A,B])]| \tag{11}$$

と一致する。そして小澤 [13] は任意の状態に対し (9) 式を示した。

P を 1 次元非相対論的 1 粒子系とし，測定装置 **A** のプローブ部分として用いる。**P** の位置 Q_2 および運動量 P_2 はともに $\mathcal{H}_{\mathbf{P}} = L^2(\mathbb{R})$ 上の自己共役作用素であり正準交換関係 $[Q_2, P_2] = i\hbar 1$ を満たす。**S** に対する線形位置測定の測定相互作用は

$$H_{int} = K[\alpha Q_1 P_2 + \beta P_1 Q_2 + \gamma(Q_1 P_1 - Q_2 P_2)] \tag{12}$$

で与えられる [8]。ここで，$K(>0)$ は結合定数であり，α, β および γ は実数である。4 つ組 $\mathbb{M} = (\mathcal{H}_{\mathbf{P}}, \xi, Q_2, U(\tau))$ を，Q_2 を用いて Q_1 を測定するとき，**S**（もしくは $\mathcal{H}_{\mathbf{S}}$）に対する線形位置測定と呼ぶ。ここで，各 $t \in \mathbb{R}$ に対し，$U(t)$ は $\mathcal{H}_{\mathbf{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbf{P}}$ 上のユニタリー作用素で

$$U(t) = e^{-\frac{it}{\hbar} H_{int}} \tag{13}$$

によって定義される。そして，$\tau(>0)$ は測定が終わる時刻である。ただし，**S** と **P** に内在するダイナミクスを無視しており，K は測定時間のタイムスケールにのみ関与する。簡単のため，$K = 1$ を仮定する。初期条件 $X(0) = X$ をもつ時刻 t における $\mathbf{S} + \mathbf{P}$ の物理量 $X(t)$ は

$$X(t) = U(t)^{-1} X U(t). \tag{14}$$

で与えられる。Heisenberg 方程式を解くことにより，$Q_1(t), Q_2(t), P_1(t)$ および $P_2(t)$ は以下の関係を満たすことがわかる：すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{pmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \end{pmatrix} = e^{tS} \begin{pmatrix} Q_1(0) \\ Q_2(0) \end{pmatrix}, \tag{15a}$$

$$\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix} = e^{-tS^T} \begin{pmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \end{pmatrix}. \tag{15b}$$

ここで，

$$S = \begin{pmatrix} \gamma & \beta \\ \alpha & -\gamma \end{pmatrix} \tag{16}$$

であり，S^T は S の転置である。

$e^{\tau S}$ の行列要素を以下のように表す；

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = e^{\tau S}。 \tag{17}$$

これは，$ad - bc = 1$ から

$$\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = e^{-\tau S^T} \tag{18}$$

を帰結する。したがって，$\varepsilon_0(Q_1)$ および $\eta(P_1)_0$ of P_1 は

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(Q_1)^2 &= \langle \psi \otimes \xi | (Q_2(\tau) - Q_1(0))^2 (\psi \otimes \xi) \rangle \\ &= (c-1)^2 \sigma(Q_1)^2 + d^2 \sigma(Q_2)^2 + ((c-1)\langle Q_1 \rangle + d \langle Q_2 \rangle)^2, \end{aligned} \tag{19a}$$

$$\begin{aligned} \eta_0(P_1)^2 &= \langle \psi \otimes \xi | (P_1(\tau) - P_1(0))^2 (\psi \otimes \xi) \rangle \\ &= (d-1)^2 \sigma(P_1)^2 + c^2 \sigma(P_2)^2 + ((d-1)\langle P_1 \rangle - c \langle P_2 \rangle)^2, \end{aligned} \tag{19b}$$

で与えられる。

$\mathbf{S}$ に対する $\mathbb{M} = (\mathcal{H}_{\mathbf{P}}, \xi, Q_2, U(\tau))$ を用いるとき，$Q_1(0)$ と $Q_2(\tau)$ は互いに可換であり，$P_1(0)$ と $P_1(\tau)$ も可換である。したがって，Gauss の誤差 ε_G と一致する：

$$\varepsilon_0(Q_1, \mathbb{M}, \psi) = \varepsilon_G(\mu_{\psi\otimes\xi}^{Q_1(0),Q_2(\tau)}), \tag{20a}$$

$$\eta_0(P_1, \mathbb{M}, \psi) = \varepsilon_G(\mu_{\psi\otimes\xi}^{P_1(0),P_1(\tau)}). \tag{20b}$$

$\mu_{\psi\otimes\xi}^{Q_1(0),Q_2(\tau)}$ はベクトル状態 $\psi\otimes\xi$ における $Q_1(0)$ と $Q_2(\tau)$ の結合確率測度である。

このとき，次の定理が成り立つ：

Theorem 2 ([4]). $\mathbf{S}$ に対する線形位置測定 $\mathbb{M} = (\mathcal{H}_{\mathbf{P}}, \xi, Q_2, U(\tau))$ が ψ において *(4)* 式を満たすのは，以下の *2* 条件を満たすとき、そのときに限る：
(i) $c > 0$, $d > 0$ *and* $c + d = 1$.
(ii) ξ は $\langle Q_2\rangle_{\xi_c} = q_1$, $\langle P_2\rangle_{\xi_c} = -p_1$ および $\sigma(Q_2\|\xi_c) = \sqrt{\frac{c}{1-c}}\sigma_1$ を満たす最小不確定状態 ξ_c と一致する。これは，座標表示において

$$\xi_c(y) = \sqrt[4]{\frac{1-c}{(2\pi)c\sigma_1^2}}e^{-\frac{1-c}{4c\sigma_1^2}(y-q_1)^2 - i\frac{p_1}{\hbar}y}, \quad y\in\mathbb{R} \tag{21}$$

である。

更には，各 $\mu\in(0,1)$ に対し，ψ において

$$\varepsilon(Q_1)^2 = (1-\mu)\sigma(Q_1)^2 \quad \textit{and} \quad \eta(P_1)^2 = \mu\sigma(P_1)^2 \tag{22}$$

を満たす $\mathcal{H}_{\mathbf{S}}$ に対する線形位置測定が存在する。

各 $\mu\in(0,1)$ に対し ψ において (22) 式を満たす線形位置測定の族 $\{\mathbb{A}_\mu\}_{\mu\in(0,1)}$, $\{\mathbb{B}_\mu\}_{\mu\in(0,1)}$ および $\{\mathbb{C}_\mu\}_{\mu\in(0,1)}$ の 3 つを定める [4]。$\mathbb{A}_\mu$, $\mathbb{B}_\mu$ と $\mathbb{C}_\mu$ のそれぞれ，表 1 で与えられるパラメータ τ, α, β および γ をもつ線形位置測定 $(\mathcal{H}_{\mathbf{P}}, \xi_\mu, Q_2, U(\tau))$ である。このとき，表 1 の D は $D = \det S = -(\gamma^2 + \alpha\beta)$ で定義される。

表 1:

	τ	α	β	γ	D
$\mathbb{A}_\mu$	$\arccos(1-\mu)$	$\sqrt{\frac{\mu}{2-\mu}}$	$-\sqrt{\frac{2-\mu}{\mu}}$	0	1
$\mathbb{B}_\mu$	μ	1	-1	1	0
$\mathbb{C}_\mu$	$-\log(1-\mu)$	$\frac{2(1-\mu)}{2-\mu}$	0	1	-1

D の符号によって，

$$e^{tS} = \begin{cases} (\cos(t\sqrt{D}))I + \dfrac{\sin(t\sqrt{D})}{\sqrt{D}}S, & (D>0), \\ I + tS, & (D=0), \\ (\cosh(t\sqrt{-D}))I + \dfrac{\sinh(t\sqrt{-D})}{\sqrt{-D}}S, & (D<0). \end{cases} \tag{23}$$

が成り立つ。$\mathbb{A}_\mu$, $\mathbb{B}_\mu$ および $\mathbb{C}_\mu$ は D の符号ごとのモデルである。先行研究のモデルでのパラメータは次のとおりである：

- von Neumann の位置測定 [3] は $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,0,0)$ の場合に対応する。
- 無誤差線形位置測定 [7] は $(\alpha,\beta,\gamma)=(2,-2,1)/3\sqrt{3}$ の場合である。

ただし，どちらのモデルでも $\tau=1/K$ である。

表 1 から，各 $\mu\in(0,1)$ に対し，$\mathbb{A}_\mu,\mathbb{B}_\mu$ と $\mathbb{C}_\mu$ それぞれの $e^{\tau S}$ と $e^{-\tau S^T}$ は表 2 で与えられる [4]：

表 2:

	$e^{\tau S}$	$e^{-\tau S^T}$
$\mathbb{A}_\mu$	$\begin{pmatrix} 1-\mu & \mu-2 \\ \mu & 1-\mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1-\mu & -\mu \\ 2-\mu & 1-\mu \end{pmatrix}$
$\mathbb{B}_\mu$	$\begin{pmatrix} 1+\mu & -\mu \\ \mu & 1-\mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1-\mu & -\mu \\ \mu & 1+\mu \end{pmatrix}$
$\mathbb{C}_\mu$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\mu} & 0 \\ \mu & 1-\mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1-\mu & -\mu \\ 0 & \frac{1}{1-\mu} \end{pmatrix}$

$\mathbb{A}_\mu,\mathbb{B}_\mu$ および $\mathbb{C}_\mu$ は以下を満たす：

$$\varepsilon(Q_1,\mathbb{A}_\mu,\psi)^2=\varepsilon(Q_1,\mathbb{B}_\mu,\psi)^2=\varepsilon(Q_1,\mathbb{C}_\mu,\psi)^2=(1-\mu)\sigma(Q_1)^2, \tag{24a}$$

$$\eta(Q_1,\mathbb{A}_\mu,\psi)^2=\eta(Q_1,\mathbb{B}_\mu,\psi)^2=\eta(Q_1,\mathbb{C}_\mu,\psi)^2=\mu\sigma(P_1)^2 \tag{24b}$$

[5] において，位置と運動量の線形同時測定の場合が示されている。

Acknowledgements

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参考文献

[1] C. Branciard, Error-tradeoff and error-disturbance relations for incompatible quantum measurements, Proc. Nat. Acad. Sci. **110**(17) (2013), 6742–6747.

[2] W. Heisenberg, Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, Z. Phy. **43** (1927), 172–198.

[3] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, (Springer, Berlin, 1932); *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton UP, Princeton, 1955).

[4] K. Okamura, Linear position measurements with minimum error-disturbance in each minimum uncertainty state, (2020), arXiv:2012.12707.

[5] K. Okamura, Linear simultaneous measurements of position and momentum with minimum error-trade-off in each minimum uncertainty state, (2021), arXiv:2101.06170.

[6] M. Ozawa, Quantum measuring processes of continuous obsevables, J. Math. Phys. **25** (1984), 79–87.

[7] M. Ozawa, Measurement breaking the standard quantum limit for free-mass position, Phys. Rev. Lett. **60**(5) (1988), 385.

[8] M. Ozawa, Quantum-mechanical models of position measurements, Phys. Rev. A **41** (1990), 1735.

[9] M. Ozawa, Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement, Phys. Rev. A **67**(4) (2003), 042105.

[10] M. Ozawa, Physical content of Heisenberg's uncertainty relation: limitation and reformulation. Phys. Lett. A **318**(1-2) (2003), 21-29.

[11] M. Ozawa, Uncertainty relations for joint measurements of noncommuting observables. Phys. Lett. A **320**(5-6) (2004), 367–374.

[12] M. Ozawa, Uncertainty relations for noise and disturbance in generalized quantum measurements, Ann. Phys. (N.Y.) **331** (2004), 350–416.

[13] M. Ozawa, Error-disturbance relations in mixed states, (2014), arXiv:1404.3388.

[14] M. Ozawa, Heisenberg's original derivation of the uncertainty principle and its universally valid reformulations, Curr. Sci. **109** (2015), 2006–2016.

[15] M. Ozawa, Soundness and completeness of quantum root-mean-square errors, npj Quantum Inf. **5**(1) (2019), 1–8.