クラス p-$wA(s,t)$ 作用素上の spectral continuity について

M. Chō, T. Prasad, M.H.M Rashid, K. Tanahashi and A. Uchiyama

Kanagawa University, Cochin university of Science and Technology,
Mu'tah university, Tohoku Medical and Pharmaceutical University,
Tohoku Medical and Pharmaceutical University

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体を $B(\mathcal{H})$ とおき、作用素 $T \in B(\mathcal{H})$ の極分解を $T = U|T|$ とおく。T が正規作用素 $TT^* = T^*T$ の場合はスペクトル分解ができる。しかし、 hyponormal 作用素 $TT^* \leq T^*T$ の場合はスペクトル分解はできないが、非常に面白い性質をもち多くの研究がなされている。Aluthge [1] が古田不等式を用いてアルスゲ変換を提案し hyponormal 作用素の拡張である p-hyponormal 作用素の性質の解明に成功したことはよく知られている。これを契機として、その後様々な拡張が考えられていて、その発展は広い範囲に及ぶ。ここで取り上げる class p-$wA(s,t)$ 作用素 $(0 < p \leq 1, 0 < s,t, s+t \leq 1)$ とは Prasad, 棚橋 [10] が定義したもので

$$(|T|^s|T^*|^{2t}|T|^s)^{\frac{sp}{s+t}} \leq |T|^{2sp}, \quad |T^*|^{2tp} \leq (|T^*|^t|T|^{2s}|T^*|^t)^{\frac{tp}{s+t}}$$

をみたす作用素である。これは、伊藤らが定義した class $wA(s,t)$ 作用素

$$|T(s,t)^*|^{\frac{2t}{s+t}} \leq |T|^{2s}, \quad |T|^{2t} \leq |T(s,t)|^{\frac{2t}{s+t}}$$

の p-class 版である。また、この作用素は class $A(k) : |T|^2 \leq \left(T^*|T|^{2k}T\right)^{\frac{1}{k+1}}$, $(0 < k \leq 1)$ 作用素の拡張にもなっている [5, 8] 。

我々はこの作用素がどのような性質をもつか調べてきた。ここではこれまでわかったこと、残った問題などを紹介する。次は、定義からすぐわかることだが、重要な性質である。

定理 1. [10] 作用素 $T \in B(\mathcal{H})$ の極分解を $T = U|T|$ とし、$0 < p \leq 1, 0 < s,t$ とする。$T(s,t) = |T|^sU|T|^t$ をアルスゲ変換という。
このとき T が class p-$wA(s,t)$ となる必要十分条件は

$$|T(s,t)|^{\frac{2tp}{s+t}} \geq |T|^{2tp}, \quad |T|^{2sp} \geq |T(s,t)^*|^{\frac{2sp}{s+t}}$$

である。よって、このとき、任意の $\rho \in (0, \min\{s,t\}]$ に対して

$$|T(s,t)|^{\frac{2\rho p}{s+t}} \geq |T|^{2\rho p} \geq |T(s,t)^*|^{\frac{2\rho p}{s+t}}$$

となるので $T(s,t)$ は $\frac{\rho p}{s+t}$-hyponormal である。

従って Aluthge 変換 $T(s,t)$ が $\frac{\rho p}{s+t}$-hyponormal になるので、$\frac{\rho p}{s+t}$-hyponormal の性質を使うことができる。次は class p-$wA(s,t)$ 作用素のパラメーターに関する性質で、本質的には C. Yang, J. Yuan [13] による。

定理 2. [10] T が p-$wA(s,t)$ 作用素で $0 < s \le s_1, 0 < t \le t_1, 0 < p_1 \le p \le 1$ なら T は p_1-$wA(s_1,t_1)$ 作用素である。

次は class p-$wA(s,t)$ 作用素の点スペクトラムに関する性質である。

定理 3. [4] $T \in B(\mathcal{H})$ は p-$wA(s,t)$ 作用素で $0 < s,t,s+t \le 1, 0 < p \le 1$ とする。また、 $\rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ はスペクトラム $\sigma(T)$ の孤立点で $0 < \rho$ とする。このとき $\rho e^{i\theta}$ に対するリース写像 E は自己共役で

$$\mathrm{ran}\ E = \ker(T - \rho e^{i\theta}) = \ker\left((T - \rho e^{i\theta})^*\right)$$

となる。

次は class p-$wA(s,t)$ 作用素の Weyl 型定理に関する性質である。

定理 4. [11] $T \in B(\mathcal{H})$ は p-$wA(s,t)$ 作用素で $0 < s,t,s+t \le 1, 0 < p \le 1$ とする。このとき、次が成り立つ。

(1) T はワイルの定理 $\sigma(T) \setminus \sigma_w(t) = \pi_{00}(T)$ を満たす。

(2) $\sigma(T)$ 上の任意の正則関数 $f(z)$ に対し、$f(T)$ はワイルススペクトラムに関して写像定理 $\sigma_w(f(T)) = f(\sigma_w(T))$ を満たす。

(3) $\sigma(T)$ 上の任意の正則関数 $f(z)$ に対し、$f(T)$ はワイルの定理 $\sigma(T) \setminus \sigma_w(t) = \pi_{00}(T)$ を満たす。

定理 5. [12] $T \in B(\mathcal{H})$ は p-$wA(s,t)$ 作用素で $0 < s,t, 0 < p \le 1$ とする。もし $T(s,t) = |T|^s U |T|^t$ が正規なら T も正規である。

次は class p-$wA(s,t)$ 作用素の Fuglede-Putnam 型定理に関する性質である。

定理 6. [2] $S, T^* \in B(\mathcal{H})$ は p-$wA(s,t)$ 作用素で $0 < s,t,s+t \le 1, 0 < p \le 1$ とする。 また、 $\ker S \subset \ker S^*, \ker T^* \subset \ker T$ が成り立つとする。このとき、もし、 $X \in B(\mathcal{K},\mathcal{H})$ に対して $SX = XT$ となるなら、$S^*X = XT^*$ が成り立つ。また、このとき、$[\mathrm{ran}\ X]$ は S を reduce し、$(\ker X)^\perp$ は T を reduce し、 $S|_{[\mathrm{ran}\ X]}, T|_{(\ker X)^\perp}$ はユニタリ同値な正規作用素である。

次は class p-$wA(s,t)$ 作用素の local spectral theory である。

定理 7. [12] $T \in B(\mathcal{H})$ は p-$wA(s,t)$ 作用素で $0 < s,t,s+t \le 1, 0 < p \le 1$ とする。 このとき T は Bishop's property (β) をみたし、 subscalar である。

次は quasi-similar な class p-$wA(s,t)$ 作用素の性質である。

定理 8. [2] $S, T \in B(\mathcal{H})$ は p-$wA(s,t)$ 作用素で $0 < s,t,s+t \le 1, 0 < p \le 1$ とする。 もし、 S, T が quasi-similar なら $\sigma(S) = \sigma(T), \sigma_e(S) = \sigma_e(T)$ となる。

定理 9. [9] $T \in B(\mathcal{H})$ は p-$wA(s,t)$ 作用素で $0 < s, t, s+t \le 1, 0 < p \le 1$ とする。このとき T は normaloid : $\|T\| =$ spectralradius (T) である。

次は class p-$wA(s,t)$ 作用素の Putnam 型不等式である。

定理 10. [2] $T \in B(\mathcal{H})$ は p-$wA(s,t)$ 作用素で $0 < s, t, s+t \le 1, 0 < p \le 1$ とする。このとき

$$\begin{aligned}\||T(s,t)|^{\frac{2\min\{sp,tp\}}{s+t}} - |T|^{2\min\{sp,tp\}}\| &\le \||T(s,t)|^{\frac{2\min\{sp,tp\}}{s+t}} - |(T(s,t))^*|^{\frac{2\min\{sp,tp\}}{s+t}}\| \\ &\le \frac{\min\{sp,tp\}}{\pi} \iint_{\sigma(T)} r^{2\min\{sp,tp\}-1}\, dr d\theta\end{aligned}$$

となる。さらに、もし $meas\,(\sigma(T)) = 0$ なら T は正規である。

次に spectral continyuity について報告する。作用素 T_n が T にノルム収束するとき、スペクトラムは収束するかという問題である。次の集合を考える。

$$\liminf_n \sigma(T_n) = \{\lambda : \text{ there exists } \lambda_n \in \sigma(T_n) \text{ such that } \ \lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n\},$$
$$\limsup_n \sigma(T_n) = \{\lambda : \text{ there exists } \lambda_{n_k} \in \sigma(T_{n_k}) \text{ such that } \ \lambda = \lim_{k\to\infty} \lambda_{n_k}\}.$$

このとき、一般に

$$\liminf_n \sigma(T_n) \subset \limsup_n \sigma(T_n) \subset \sigma(T)$$

となることが知られている。このことを、スペクトラムは upper semicontinuous であるという。問題はこの 3 つの集合がいつ一致するかということである。一般には一致しないが、作用素 T が正規作用素 : $TT^* = T^*T$ の場合は

$$\liminf_n \sigma(T_n) = \limsup_n \sigma(T_n) = \sigma(T)$$

となる。このことを

$$\lim \sigma(T_n) = \sigma(T)$$

とあらわし、スペクトラムは正規作用素に関して連続であるという。この性質は、さらに拡張されていて Hwang, Lee [6] が p-hyponormal 作用素の場合に、また、Jeon, Kim [7] が class $A(k)$ 作用素の場合に成立することを示している。ここでは class p-$wA(s,t)$ 作用素でも成立することを示す。次の定義を準備する。

定義 複素数 λ が T の近似点スペクトラムである $\lambda \in \sigma_a(T)$ とは $(T-\lambda)x_n \to 0$ となる単位ベクトル x_n が存在するときをいう。また、Xia's residual spectrum である $\lambda \in \sigma_r^X(T)$ とは $(T-\lambda)\mathcal{H} \ne \mathcal{H}, \|(T-\lambda)x\| \ge c\|x\| \ \ (x \in \mathcal{H})$ となる正数 c が存在するときをいう。定義から $\sigma(T) \cap \sigma_r^X(T) = \emptyset, \sigma_a(T) \cup \sigma_r^X(T) = \sigma(T)$ となる。

近似点スペクトラム, Xia's residual spectrum に関して class p-$wA(s,t)$ 作用素は次を満たす。

定理 11. [3] $T \in B(\mathcal{H})$ は p-$wA(s,t)$ 作用素で $0 < s, t, s+t \le 1, 0 < p \le 1$ とする。このとき $s+t \le \alpha$ に対して $T_\alpha = U|T|^\alpha$ とおくと次が成り立つ。

$$\sigma_a(T_\alpha) = \{r^\alpha e^{i\theta} \mid re^{i\theta} \in \sigma_a(T)\},$$
$$\sigma_r^X(T_\alpha) = \{r^\alpha e^{i\theta} \mid re^{i\theta} \in \sigma_r^X(T)\},$$
$$\sigma(T_\alpha) = \{r^\alpha e^{i\theta} \mid re^{i\theta} \in \sigma(T)\}.$$

定理 11 を用いて class p-$wA(s,t)$ 作用素がスペクトラムに関して連続であることを示す。

定理 12. [3] $T_n, T \in B(\mathcal{H})$ は p-$wA(s,t)$ 作用素で $0 < s,t,s+t \leq 1, 0 < p \leq 1$ とする。 もし $\|T_n - T\| \to 0$ なら $\lim \sigma(T_n) = \sigma(T)$ である。

証明 このとき $|T_n|^2 = T_n^*T_n \to T^*T = |T|^2$ となる。同様に、 $|T_n|^{2k} \to |T|^{2k}$ が $k = 1, 2, \cdots$ について成り立つ。$\sigma(|T_n|), \sigma(|T|) \subset [0, M]$ としてよい。任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\sup\{|\sqrt{t} - p(t)| : 0 \leq t \leq M\} < \varepsilon$ となる多項式をとる。このとき $p(|T_n|^2) \to p(|T|^2)$ なので $|T_n| \to |T|$ となる。同様に、

$$|T_n|^s \to |T|^s, \quad |T_n|^t \to |T|^t$$

である。ここで

$$T_n - U_n|T| = U_n(|T_n| - |T|) \to 0$$

だから

$$U_n|T| = T_n - U_n(|T_n| - |T|) \to T = U|T|$$

となる。よって

$$(U_n - U)|T| \to 0$$

となる。よって $(U_n - U)|T|^2, (U_n - U)|T|^3 \to 0, \cdots$ となるので、$(U_n - U)|T|^t \to 0$ である。従って

$$U_n|T_n|^t = U_n(|T_n|^t - |T|^t) + U_n|T|^t \to U|T|^t$$

となる。よって

$$T_n(s,t) = |T_n|^s U_n |T_n|^t \to |T|^s U |T|^t$$

である。ここで $T_n(s,t), T(s,t)$ は $\frac{\rho p}{s+t}$-hyponormal となるので、

$$\sigma(T(s,t)) = \lim\inf_n \sigma(T_n(s,t))$$

となる。また。

$$\sigma(|T|^s U |T|^t) = \sigma(U|T|^{s+t}), \sigma(|T_n|^s U_n |T_n|^t) = \sigma(U_n|T_n|^{s+t})$$

が成り立ち、

$$\sigma(U|T|^{s+t}) = \{r^{s+t}e^{i\theta} : re^{i\theta} \in \sigma(T)\}, \sigma(U_n|T_n|^{s+t}) = \{r^{s+t}e^{i\theta} : re^{i\theta} \in \sigma(T_n)\}$$

であるから

$$\sigma(T) = \lim\inf_n \sigma(T_n)$$

となる。

この定理から、ワイルスペクトラム、ブラウダースペクトラムについても連続であることがわかる。

定理 13. [3] $T_n, T \in B(\mathcal{H})$ は p-$wA(s,t)$ 作用素で $0 < s, t, s+t \leq 1, 0 < p \leq 1$ とする。 もし $\|T_n - T\| \to 0$ なら ワイルスペクトラム $\sigma_w(T)$, ブラウダースペクトラム $\sigma_b(T)$ についても $\lim \sigma_w(T_n) = \sigma_w(T), \lim \sigma_b(T_n) = \sigma_b(T)$ である。

以上これまでわかっていることを紹介したが、まだ多くの問題が残っている。多くの定理は $s+t \leq 1$ を仮定しているが、この条件が本質的な条件であるかどうかはよくわからない。つまり $1 < s+t$ の場合はよくわからない。また、class $wA(s,t)$ 作用素の場合は伊藤、山崎によって

$$|T|^{2t} \leq |T(s,t)|^{\frac{2t}{s+t}} \Longrightarrow |T(s,t)^*|^{\frac{2t}{s+t}} \leq |T|^{2s}$$

が示されたが、class p-$wA(s,t)$ 作用素でも同じような性質が成立するか未解決である。

References

[1] A. Aluthge, *On p-hyponormal operators for* $0 < p < 1$, Integral Equations Operator Theory., **13** (1990), 307 – 315.

[2] M. Chō, T. Prasad, M.H.M Rashid, K. Tanahashi and A. Uchiyama, *Fuglede-Putnam theorem and quasisimilarity of class* p-$wA(s,t)$ *operators*, Operators and Matrices, **13**(2019), 293–299.

[3] M. Chō, T. Prasad, M.H.M Rashid, K. Tanahashi and A. Uchiyama, *Continuity of spectra on class of* p-$wA(s,t)$ *operators*, preprint.

[4] M. Chō, M. H. M. Rashid, K. Tanahashi and A. Uchiyama, *Spectrum of class* p-$wA(s,t)$ *operators, Acta Sci. Math. (Szeged)*, **82**(2016), 641–659.

[5] T. Furuta, M. Ito and T. Yamazaki, *A subclass of paranormal operators including class of log-hyponormal and several related clsses*, Scientiae Mathematicae, **1**(1998),389-403.

[6] I. S. Hwang and W. Y. Lee, *The spectrum is continuous on the set of p-hyponormal operators*, Math. Z. **235**(2000), no. 1, 151-157.

[7] In Ho Jeon and In Hyoun Kim, *Continuity of the spectrum on a class* $A(k)$, Korean J. Math. **21** (2013), No. 1, pp. 75-80.

[8] M. Ito, *Some classes of operators with generalised Aluthege transformations*, SUT J. Math., **35** (1999), 149–165.

[9] T. Prasad, M. Chō, M. H. M. Rashid, K. Tanahashi and A. Uchiyama, *Class* p-$wA(s,t)$ *operators and range kernel orthogonality*, Scientiae Mathematicae Japonicae e-2017 (30) 2017-13.

[10] T. Prasad and K. Tanahashi, *On class* p-$wA(s,t)$ *operators*, Functional Analysis, Approximation Computation, **6** (2) (2014), 39–42.

[11] M. H. M. Rashid, M. Cho, T. Prasad, K. Tanahashi and A. Uchiyama, *Weyls theorem and Putnam's inequality for* p-$wA(s,t)$ *operators*, Acta Sci. Math. (Szeged), **84**(2018), 573–589.

[12] K. Tanahashi, T. Prasad and A. Uchiyama, *Quasinormality and subscalarity of class* p-$wA(s,t)$ *operators*, Functional Analysis, Approximation Computation, **9**(1)(2017), 61–68.

[13] J. Yuan and C. Yang, *Spectrum of class* $wF(p,r,q)$ *operators for* $p + r \leq 1$ *and* $q \geq 1$, Acta Sci. Math., **71** (2005), no.(3-4), 767–779.