作用素平均による n 変数版作用素平均から生じる作用素平均について
On the deformed means from n-variable operator mean by operator means

大阪教育大学・数学教育　　瀬尾　祐貴

Yuki Seo
Department of Mathematics Education, Osaka Kyoiku University

1. はじめに

本稿は、[5, 6] に基づいている。

まず、Karcher 幾何平均と作用素べき平均の復習から始める。ヒルベルト空間上の可逆正作用素 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ と確率ベクトル $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ に対して、Karcher 方程式

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j \log\left(X^{-\frac{1}{2}} A_j X^{-\frac{1}{2}}\right) = 0$$

を満たす可逆正作用素の解がただ一つ存在し、これを $X = G_\omega(A_1, \ldots, A_n)$ とかき、可逆正作用素 $A_1, \ldots, A_n$ の Karcher 幾何平均と呼ぶ。詳しくは、[9, 8] などを参照。$n = 2$ の場合は、$t \in [0,1]$ に対して、$G_{(1-t,t)}(A, B) = A \sharp_t B$ となり、2 変数版の作用素幾何平均

$$A \sharp_t B = A^{1/2}\left(A^{-1/2} B A^{-1/2}\right)^t A^{1/2}$$

に一致する [7]。A_j がすべて可換の場合は、

$$G_\omega(A_1, A_2, \ldots, A_n) = A_1^{\omega_1} A_2^{\omega_2} \cdots A_n^{\omega_n}$$

となり、可換の場合の拡張であることもわかる。また、各 $\alpha \in (0, 1]$ に対して、非線形方程式

$$X = \sum_{j=1}^{n} \omega_j (X \sharp_\alpha A_j)$$

を満たす可逆正作用素の解がただ一つ存在し、これを $X = P_{\omega,\alpha}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ とかき、可逆正作用素 $A_1, \ldots, A_n$ の作用素べき平均と呼ぶ。$\alpha \in [-1, 0)$ に対しては、

$$P_{\omega,\alpha}(A_1, A_2, \ldots, A_n) = P_{\omega,-\alpha}(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \ldots, A_n^{-1})^{-1}$$

と定義する。このとき、作用素べき平均は算術・調和平均を補完する。即ち、すべての $\alpha \in [-1, 1] \backslash \{0\}$ に対して、

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \omega_j A_j^{-1}\right)^{-1} \leq P_{\omega,\alpha}(A_1, \ldots, A_n) \leq \sum_{j=1}^{n} \omega_j A_j$$

であり、$\alpha=1$ のときは、算術平均 $P_{\omega,1}(A_1,\ldots,A_n)=\sum_{j=1}^n \omega_j A_j$、$\alpha=-1$ のときは、調和平均 $P_{\omega,-1}(A_1,\ldots,A_n)=\left(\sum_{j=1}^n \omega_j A_j^{-1}\right)^{-1}$ となる。A_j がすべて可換の場合は、

$$P_{\omega,\alpha}(A_1,\ldots,A_n)=\left(\sum_{j=1}^n \omega_j A_j^\alpha\right)^{1/\alpha}$$

となり、可換の場合の算術べき平均の拡張であることもわかる。$n=2$ のときは、$\alpha\in[-1,1]$ と $\omega=(1-t,t), t\in[0,1]$ に対して

$$P_{\omega,\alpha}(A,B)=A\natural_{\alpha,t}B=A^{1/2}\left((1-t)I+t(A^{-1/2}BA^{-1/2})^\alpha\right)^{1/\alpha}A^{1/2}$$

となる。これは A と B を結ぶ 2 変数のべき平均 [2, pp156] であり、$t\in[0,1]$ に対して

$$\begin{aligned}A\natural_{1,t}B&=(1-t)A+tB\\ A\natural_{0,t}B&=A\natural_t B\\ A\natural_{-1,t}B&=\left((1-t)A^{-1}+tB^{-1}\right)^{-1}\end{aligned}$$

となる。$A\natural_{\alpha,t}B$ の定義式より、任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して、$A\natural_{\alpha,t}B$ は定義でき、そのとき、この path $A\natural_{\alpha,t}B$ は、$\alpha\in\mathbb{R}$ に対して単調増加になる。ただ、$|\alpha|\le 1$ の時しか、久保-安藤 [7] の意味で作用素平均にならないことも分かっている。この path $A\natural_{\alpha,t}B$ の n 変数版である作用素べき平均 $P_{\omega,\alpha}(A_1,\ldots,A_n)$ も同様に $\alpha\in[-1,1]$ に関して単調性を持つ。

$$P_{\omega,\alpha}(A_1,\ldots,A_n)\le P_{\omega,\beta}(A_1,\ldots,A_n)\quad \text{for } -1\le\alpha<\beta\le 1.$$

そして、$\alpha=0$ のとき、$A\natural_{0,t}B=A\natural_t B$ と作用素幾何平均になるのと、同様に、作用素べき平均の $\alpha\to\pm 0$ の作用素強極限は、Karcher 幾何平均

$$G_\omega(A_1,\ldots,A_n)=\operatorname*{s-lim}_{\alpha\to\pm 0}P_{\omega,\alpha}(A_1,\ldots,A_n)\quad \text{in strong operator topology}$$

になり、任意の $\alpha\in(0,1]$ に対して、

$$P_{\omega,-\alpha}(A_1,\ldots,A_n)\le G_\omega(A_1,\ldots,A_n)\le P_{\omega,\alpha}(A_1,\ldots,A_n)$$

が成り立つ。さて、$t\in[0,1]$ に対して、$A\natural_{\alpha,t}B$ は α について、実数全体で定義できるが、$P_{\omega,\alpha}(A_1,\ldots,A_n)$ は $|\alpha|\le 1$ の範囲でしか定義されていない。しかし、これは、[10] により、$|\alpha|<2$ までその定義の範囲が拡張されたが、$|\alpha|\ge 2$ に対しては定義ができるかどうかもわかっていない。Karcher 幾何平均と作用素べき平均の性質については、[9, 8] に詳しく論じられている。

次に、Ando-Hiai 不等式を思い出そう [1]。各 $\alpha\in(0,1]$ に対して、

$$A\natural_\alpha B\le I\qquad\Longrightarrow\qquad A^r\natural_\alpha B^r\le I\qquad \text{for all } r\ge 1$$

が成立する。これは、作用素ノルム $\|\cdot\|_\infty$ に対して、$\|A^r\natural_t B^r\|_\infty\le\|(A\natural_t B)^r\|_\infty$ $(r\ge 1)$ を導く。勿論、$A^r\natural_t B^r$ と $(A\natural_t B)^r$ には、作用素順序での関係はない。Karcher 幾何平均は Kubo-Ando の作用素幾何平均の n 変数版であるから、Ando-Hiai 不等式の成立がどうなるのかは問題であったが、2012 年に山崎 [14] により肯定的に解決された。

$$G_\omega(A_1,\ldots,A_n)\le I\qquad\Longrightarrow\qquad G_\omega(A_1^r,\ldots,A_n^r)\le I\qquad \text{for all } r\ge 1.$$

さらに、2019 年に作用素べき平均における Ando-Hiai 型不等式も導いた [15]。各 $\alpha\in(0,1]$ に対して、

$$P_{\omega,-\alpha}(A_1,\ldots,A_n)\le I\quad\Longrightarrow\quad P_{\omega,-\alpha}(A_1^r,\ldots,A_n^r)\le I\quad \text{for all } r\ge 1.$$

また、これらの Ando-Hiai 型不等式は次のように改良されている [4]。$\alpha \in (0,1]$ と任意の $r \geq 1$ に対して、

$$P_{\omega,-\alpha}(A_1^r,\dots,A_n^r) \leq \|P_{\omega,-\alpha}(A_1,\dots,A_n)\|_\infty^{r-1} P_{\omega,-\alpha}(A_1,\dots,A_n).$$

$\alpha \to 0$ として、任意の $r \geq 1$ に対して

$$G_\omega(A_1^r,\dots,A_n^r) \leq \|G_\omega(A_1,\dots,A_n)\|_\infty^{r-1} G_\omega(A_1,\dots,A_n).$$

最後に、作用素論に現れる重要な定数を 2 つ紹介する。算術調和平均の不等式の逆不等式に現れるのが Kantorovich 定数である。可逆正作用素 $A_1, A_2, \dots, A_n$ が、ある正の定数 $0 < m < M$ に対して、$mI \leq A_j \leq MI$ を満たしているとする。このとき、

$$\sum_{j=1}^n \omega_j A_j \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm}\left(\sum_{j=1}^n \omega_j A_j^{-1}\right)^{-1}$$

が成り立つ [2, Theorem 4.4]。この $\frac{(M+m)^2}{4Mm}$ は Kantorovich 定数と呼ばれている。また、これに関連して、$y = t^p$ の凸関数に関して、次の結果が知られている [2, Lemma 4.3]。

$$\left(\sum_{j=1}^n \omega_j A_\mathrm{J}\right)^p \leq K(h,p)\sum_{j=1}^n \omega_j A_j^p \qquad \text{for } p \leq -1, 2 \leq p.$$

ただし、$h = \frac{M}{m}$ に対して、一般化された Kantorovich 定数 $K(h,p)$ は

$$K(h,p) = \frac{h^p - h}{(p-1)(h-1)}\left(\frac{p-1}{p}\frac{h^p-1}{h^p-h}\right)^p \quad \text{for } p \in \mathbb{R}$$

で定義されている [2, Definition 2.2]。なお、$K(h,-1) = K(h,2) = \frac{(M+m)^2}{4Mm}$ である。もう一つは、算術幾何平均の不等式の逆不等式に現れる Specht 商である [11]。正の実数 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [m, M]$ に対して、

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq S(h)\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

ただし、Specht 商は、

$$S(h) = \frac{(h-1)h^{\frac{1}{h-1}}}{e \log h} \quad (h \neq 1) \quad \text{and} \quad S(1) = 1$$

で定義される [2, Lemma 2.47]。このとき、$K(h^r, s/r) \mapsto S(h^s)$ as $r \to 0$ が成り立つ。富永 [12] はこの Specht 不等式の作用素版を示した。$0 < mI \leq A, B \leq MI$ のとき、

$$(1-t)A + tB \leq S(h)A \natural_t B \qquad \text{for } t \in [0,1]. \tag{1.1}$$

この結果の一般化として、次が知られている [2, Corollary 5.26]。$h = \frac{M}{m}$ とおくとき、$r < 0 < s$ と $t \in (0,1]$ に対して

$$S(h^s)^{-1/s} A \natural_{s,t} B \leq A \natural_t B \leq S(h^r)^{-1/r} A \natural_{r,t} B$$

が成り立つ。特に、$s = 1, r = -1$ とすれば

$$S(h)^{-1}\left((1-t)A + tB\right) \leq A \natural_t B \leq S(h)\left((1-t)A^{-1} + tB^{-1}\right)^{-1}$$

となり、Specht 商の意味を作用素論の中で明確にしていることが分かる。これらの事実から n 変数版の Specht 不等式

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j A_j \le S(h) G_\omega(A_1, \dots, A_n) \tag{1.2}$$

が成り立つことが期待されたが、現在は、

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j A_j \le \frac{(M+m)^2}{4Mm} G_\omega(A_1, A_2, \dots, A_n) \tag{1.3}$$

までしかわかっていない。実際、$0 < m < M$ と $h = \frac{M}{m}$ に対して、

$$S(h) \le \frac{(M+m)^2}{4Mm} \le S(h)^2 \le S(h^2)$$

なので、不等式 (1.3) は評価としてはかなり甘い。しかし、(1.2) が成立する見込みは少ないのではないかと思われる。このカントロヴィチ定数を Specht 商に直すことができるかどうかは現在も未解決である。

さて、作用素べき平均は、作用素幾何平均 $\sharp_\alpha$ の加重算術平均 $\mathcal{A}_\omega$ に対する deformed mean として、実現できる。Deformed mean は、[3, 4] で、詳しく論じられている。そこで、本稿では、特に、作用素べき平均に対する Ando-Hiai 型不等式の補完不等式とその応用として、ノルム不等式の評価式を導く。これは、従来知られている結果の改良になっている。

2. これまでの結果

まず、2 変数での結果をまとめておく。可逆正作用素 A, B が $mI \le A, B \le MI$ を満たしているとする。$h = \frac{M}{m}$ とおく。このとき、Specht 不等式 (1.1) により、$t \in [0,1]$ に対して

$$A^r \sharp_t B^r \le S(h)^r (A \sharp_t B)^r \qquad \text{for } r \in (0,1]$$

がわかる。これは、Ando-Hiai 不等式の作用素順序における補完不等式を表わしている。これを用いて、次のノルム不等式を得る。

$$\left\| (A^q \sharp_t B^q)^{1/q} \right\|_\infty \le S(h^p)^{1/p} \left\| (A^p \sharp_t B^p)^{1/p} \right\|_\infty \quad \text{for } 0 < q < p$$

がわかり、$q \to 0$ とすれば、

$$\| \exp((1-t)\log A + t \log B) \|_\infty \le S(h^p)^{1/p} \left\| (A^p \sharp_t B^p)^{1/p} \right\|_\infty \quad \text{for } p > 0 \tag{2.1}$$

を得る。これは、Chaotic 幾何平均の上からの評価を与えている。では、これらの n 変数版である Karcher 幾何平均ではどうなるのか？そのために、作用素べき平均で考えてみる。一般的に、$0 < r < 1$ に対して、$P_{\omega.\alpha}(A_1^r, A_2,^r, \dots, A_n^r)$ と $P_{\omega,\alpha}(A_1, A_2, \dots, A_n)^r$ の間には、代数的な関係も作用素順序での順序もつかない。しかし、(1.3) により、Kantorovich 定数を用いて、次のような不等式が成り立つ。

$$P_{\omega,\alpha}(A_1^r, \dots, A_n^r) \le \left(\frac{(M+m)^2}{4Mm} \right)^r P_{\omega,\alpha}(A_1, \dots, A_n)^r \qquad \text{for } 0 < r < 1. \tag{2.2}$$

これを用いると、次のノルム不等式を得る。

(2.3)

$$\left\| P_{\omega,\alpha}(A_1^q, A_2^q, \dots, A_n^q)^{1/q} \right\|_\infty \le \left(\frac{(M^p + m^p)^2}{4M^p m^p} \right)^{1/p} \left\| P_{\omega,\alpha}(A_1^p, A_2^p, \dots, A_n^p)^{1/p} \right\|_\infty \text{ for } 0 < q \le p.$$

ここで、$\alpha \to 0$ とすれば、Karcher 幾何平均に対するノルム不等式を得る。

$$\left\| G_\omega(A_1^q, A_2^q, \ldots, A_n^q)^{1/q} \right\|_\infty \le \left(\frac{(M^p + m^p)^2}{4M^p m^p} \right)^{1/p} \left\| G_\omega(A_1^p, A_2^p, \ldots, A_n^p)^{1/p} \right\|_\infty \ \text{ for } 0 < q \le p.$$

さらに、$q \to 0$ とすれば、Lie-Trotter の公式より、

(2.4)

$$\left\| \exp\left(\sum_{j=1}^n \omega_j \log A_j \right) \right\|_\infty \le \left(\frac{(M^p + m^p)^2}{4M^p m^p} \right)^{1/p} \left\| G_\omega(A_1^p, A_2^p, \ldots, A_n^p)^{1/p} \right\|_\infty \quad \text{for } p > 0.$$

この不等式の右辺は、$p \to 0$ としたとき、左辺に収束するので、その意味では、評価できる。しかし、(2.4) は、2 変数版 (2.1) と比べると、Specht 商ではなく、Kantorovich 定数での評価なので、やや甘いと言わざる負えない。さらなる精密化が求められていた。今回は、その改良ができたので、報告をしたい。

3. 結果

2 節での議論を踏まえれば、(2.2) 式の改良が必要であることがわかる。得られた結果は次である。

定理 1 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ を可逆正作用素で、各 j に対して、$0 < mI \le A_j \le MI$ を満たしているとする。$h = M/m$ とおく。各 $0 < \alpha < 1$ に対して、

$$P_{\omega,\alpha}(A_1^r, \ldots, A_n^r) \le K(h, -r) P_{\omega,\alpha}(A_1, \ldots, A_n)^r \qquad \text{for } 0 < r < 1.$$

この定理 1 は不等式 (2.2) の改良になっている。実際、富永 [13] の結果により、

$$K(h, -r) < \left(\frac{(M+m)^2}{4Mm} \right)^r \qquad \text{for } 0 < r < 1$$

が一般的に成立する。このとき、次のノルム不等式を得ることができる。

定理 2 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ を可逆正作用素で、各 j に対して、$0 < mI \le A_j \le MI$ を満たしているとする。$h = M/m$ とおく。各 $0 < \alpha < 1$ に対して、

$$\| P_{\omega,-\alpha}(A_1^q, \ldots, A_n^q) \|_\infty^{1/q} \le K(h^p, -q/p)^{1/q} \| P_{\omega,-\alpha}(A_1^p, \ldots, A_n^p) \|_\infty^{1/p} \tag{3.1}$$

が、任意の $0 < q < p$ に対して成立する。特に、$\alpha \to 0$ のとき、

$$\| G_\omega(A_1^q, \ldots, A_n^q) \|_\infty^{1/q} \le K(h^p, -q/p)^{1/q} \| G_\omega(A_1^p, \ldots, A_n^p) \|_\infty^{1/p}$$

が、任意の $0 < q < p$ に対して成立する。さらに、$q \to 0$ とすれば、

$$\left\| \exp\left(\sum_{j=1}^n \omega_j \log A_j \right) \right\|_\infty \le S(h^p)^{1/p} \| G_\omega(A_1^p, \ldots, A_n^p) \|_\infty^{1/p} \tag{3.2}$$

が、任意の $p > 0$ に対して成立する。

n 変数版の算術幾何平均の逆不等式である Specht 型不等式 (1.2) が成立するかどうかは現在も分かっていないが、Karcher 幾何平均ではなく作用素べき平均を考察することにより、私たちはノルム不等式 (3.2) を得た。これは 2 変数版の不等式 (2.1) のちょうど n 変

数版であり、n 変数版の Karcher 幾何平均に対して期待されていた評価式でもある。さらに、定理 2 の (3.1) は (2.3) の改良である。実際、$0 < q < p$ に対して、

$$K(h^p, -q/p)^{1/q} < \left(\frac{(M^p + m^p)^2}{4M^p m^p}\right)^{1/p}$$

が成立する。これらの結果は、Deformed means の一般的な性質を述べたものではないが、deformed mean を考察する中で、これまでの結果との比較の中で明確になったことである。

Acknowledgements. The author is partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP19K03542.

References

[1] T. Ando and F. Hiai, *Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequality*, Linear Algebra Appl. **197** (1994), 113–131.
[2] T. Furuta, J. Mićić Hot, J. Pečarić, and Y. Seo, *Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, Monographs in Inequalities 1, Element, Zagreb, 2005.
[3] F. Hiai, *Operator means deformed by a fixed point method*, to appear in Adv. Oper. Theory.
[4] F. Hiai, Y. Seo, and S. Wada, *Ando–Hiai type inequalities for multivariate operator means*, Linear Multilinear Algebra, **67** (2019), 2253–2281.
[5] M. Kian, M. S. Moslehian, and Y. Seo, *Variants of Ando–Hiai inequality for operator power means*, Linear Multilinear Algebra, Online: http://doi.org/10.1080/03081087.2019.1635981.
[6] M. Kian, M. S. Moslehian, and Y. Seo, *Variants of Ando-Hiai type inequalities for deformed means from an n-variable operator mean*, preprint.
[7] F. Kubo and T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann. **246** (1980), 205–224.
[8] J. Lawson and Y. Lim, *Karcher means and Karcher equations of positive definite operators*, Trans. Amer. Math. Soc. Series B **1** (2014), 1–22.
[9] Y. Lim and M. Pálfia, *Matrix power means and the Karcher mean*, J. Funct. Anal. **262** (2012), 1498–1514.
[10] Y. Seo, *Operator power means due to Lawson-Lim-Pálfia for* $1 < t < 2$, Linear Algebra Appl. **459** (2014), 342–356.
[11] W. Specht, *Zur Theorie der elementaren Mittel*, Math. Z. **74** (1960), 91–98.
[12] M. Tominaga, *Specht's ratio in the Young inequality*, Sci. Math. Japon. **55** (2002), 585–588.
[13] M. Tominaga, *Estimates of Ando-Hiai type inequalities on operator power means*, preprint.
[14] T. Yamazaki, *The Riemannian mean and matrix inequalities related to the Ando–Hiai inequality and chaotic order*, Oper. Matrices **6** (2012), 577–588.
[15] T. Yamazaki, *The Ando–Hiai inequalities for the solution of the generalized Karcher equation and related results*, J. Math. Anal. Appl. **479** (2019), 531–545.