Ando-Hiai type inequalities for multivariate operator means and operator perspectives

和田州平 (Shuhei Wada)
木更津高専 (Kisarazu KOSEN)
日合文雄 (Fumio Hiai)
東北大学 (Tohoku University)
瀬尾祐貴 (Yuki Seo)
大阪教育大学 (Osaka Kyoiku University)

1 序

Hilbert 空間上の可逆有界線形作用素 A, B と $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して，

$$A\#_\alpha B := A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^\alpha A^{1/2}$$

で定義される 2 項演算 $\#_\alpha$ は A と B の幾何平均と呼ばれています．$\alpha = 1/2$ の場合は Pusz と Woronowicz [26] によって定義され，Kubo と Ando [17] によって作用素平均の理論として考察されました．上記幾何平均について成立する関係式：

$$A\#_\alpha B \leq I \ \Rightarrow \ A^r\#_\alpha B^r \leq I, \qquad r \geq 1$$

は Ando と Hiai [3] によって示され，関連する多くの結果が知られています [13, 16, 24, 27, 28, 29, 30]．本稿では上記命題を AH 不等式と呼びます．

幾何平均を 3 つ以上の行列または作用素の場合に拡張することは，長年の未解決問題でした．問題は [2] の反復法と [23, 4] のリーマン幾何学法によって最終的に解決され，それ以来，後者のアプローチは，[18, 21, 20, 25] のように，多くの著者によって考察されています．現在，リーマン幾何学的アプローチの多変数幾何平均は，いわゆる Karcher 方程式の解として決定された平均 (Karcher 平均) を意味します．

AH 不等式の Karcher 平均への拡張は Yamazaki [32] によって行われました．本稿では，[29] と同様の考え方で，一般的な n 変数平均についても様々な Ando-Hiai 型不等式が生産できることを示します．そのために，まず，n 変数作用素平均の**変形平均**を定義します．変形平均は与えられた多変数平均と 2 変数平均から定まる方程式の解（不動点）によって定義します．

多変数平均を定義する方法として Pálfia [25] のラムダ平均が知られています．変形平均の方法は，ラムダ平均より広い範囲の多変数平均にも適用できます．本稿前半では，多変数平均 M の AH 型不等式：

$$M(A_1,\ldots,A_n)\geq I\Rightarrow M(A_1^r,\ldots,A_n^r)\geq I \tag{1.1}$$

について，ラムダ平均との関連も含めて，議論します．

連続関数 $f : (0,\infty)\to(0,\infty)$ と可逆正作用素 A,B に対し

$$P_f(A,B):=B^{1/2}f(B^{-1/2}AB^{-1/2})B^{1/2} \tag{1.2}$$

を対応させる作用素値 2 変数関数 P_f を考えます．P_f は作用素遠近法 (operator perspective) と呼ばれています．本稿後半では，これを作用素平均の一般化と考え，一般化 AH 型不等式：

$$A,B>0, P_f(A,B)\leq I\Rightarrow P_f(A^p,B^p)\leq I$$

あるいは

$$A,B>0, P_f(A,B)\geq I\Rightarrow P_f(A^p,B^p)\geq I$$

について議論します．

2 多変数作用素平均と変形平均

2.1 n 変数平均

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体を $B(\mathcal{H})$ とし，$B(\mathcal{H})$ に属する正作用素全体を $B(\mathcal{H})^+$, 可逆正作用素全体を $\mathbb{P}=\mathbb{P}(\mathcal{H})$ と書きます．作用素 $X\in\mathbb{P}$ に対して, $\|X\|$ は X の作用素ノルム，$\lambda_{\min}(X)$ は X のスペクトルの最小値を意味します．

以下の性質を満たす多変数の作用素値関数 $M : \mathbb{P}^n\to\mathbb{P}$ を n 変数の作用素平均と呼びます：

(I) **単調性**: $A_j,B_j\in\mathbb{P}$, $A_j\leq B_j$ $(1\leq j\leq n)$ ならば

$$M(A_1,\ldots,A_n)\leq M(B_1,\ldots,B_n).$$

(II) **合同不変性**: $A_1,\ldots,A_n\in\mathbb{P}$ と可逆な $S\in B(\mathcal{H})$ に対して,

$$S^*M(A_1,\ldots,A_n)S=M(S^*A_1S,\ldots,S^*A_nS).$$

(III) **単調連続性**: $A_j,A_{jk}\in\mathbb{P}$ $(1\leq j\leq n, k\in\mathbb{N})$. 各 j に対して $A_{jk}\searrow A_j$, または各 j に対して $A_{jk}\nearrow A_j$ ならば,

$$M(A_{1k},\ldots,A_{nk})\longrightarrow M(A_1,\ldots,A_n)\quad\text{in SOT}.$$

(IV) 正規性: $M(I, \ldots, I) = I$.

Remark 1. M が n 変数作用素平均なら，次の M^* は n 変数作用素平均になり，M の随伴 *(adjoint)* と呼ばれます：

$$M^*(A_1, \ldots, A_n) := M(A_1^{-1}, \ldots, A_n^{-1})^{-1}, \qquad A_j \in \mathbb{P}.$$

2.2 変形平均

M が n 変数の作用素平均で σ が（Kubo と Ando の意味での）2 変数作用素平均とします．σ が左自明平均 $\mathfrak{l}$ $(A\mathfrak{l}B = A)$ でないとき，次の方程式は唯一解を持ちます：

$$X = M(X\sigma A_1, \ldots, X\sigma A_n) \qquad \text{for} \quad X \in \mathbb{P}. \tag{2.1}$$

上の方程式の解を σ による M の変形平均 **(deformed mean)** と呼び M_σ と書きます [12].

Theorem 2.1. (1) *For every $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{P}$ there exists a unique $X_0 \in \mathbb{P}$ which satisfies* (2.1)*.*

(2) *Write $M_\sigma(A_1, \ldots, A_n)$ for the unique solution X_0 to* (2.1) *given in* (1)*. Then $M_\sigma : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ is an n-variable mean satisfying* (I)–(IV) *again.*

(3) *If $Y \in \mathbb{P}$ and $Y \le M(Y\sigma A_1, \ldots, Y\sigma A_n)$, then $Y \le M_\sigma(A_1, \ldots, A_n)$. If $Y \in \mathbb{P}$ and $Y \ge M(Y\sigma A_1, \ldots, Y\sigma A_n)$, then $Y \ge M_\sigma(A_1, \ldots, A_n)$.*

Remark 2. $(M_\sigma)^* = (M^*)_{\sigma^*}$ が成り立ちます.

Example 2.2. (1) 確率ベクトル $\omega = (w_1, \ldots, w_n)$ に対し，算術平均 $\mathcal{A}_\omega$ と調和平均 $\mathcal{H}_\omega = (\mathcal{A}_\omega)^*$ を以下のように定義すれば上述の (I)–(IV) を満たします：

$$\mathcal{A}_\omega(A_1, \ldots, A_n) := \sum_{j=1}^n w_j A_j, \qquad \mathcal{H}_\omega(A_1, \ldots, A_n) := \left(\sum_{j=1}^n w_j A_j^{-1} \right)^{-1}.$$

(2) $\alpha \in [-1,1] \setminus \{0\}$ に対し,（重み付き）べき平均 $P_{\omega,\alpha}(A_1,\ldots,A_n)$ は次の方程式の唯一解として定義されます [21, 19, 20]：

$$X = \mathcal{A}_\omega(X\#_\alpha A_1,\ldots,X\#_\alpha A_n) \qquad \text{for } 0<\alpha\le 1,$$
$$X = \mathcal{H}_\omega(X\#_{-\alpha} A_1,\ldots,X\#_{-\alpha} A_n) \quad \text{for } -1\le\alpha< 0.$$

言い換えれば $0<\alpha\le 1$ に対し,

$$P_{\omega,\alpha} = (\mathcal{A}_\omega)_{\#_\alpha}, \qquad P_{\omega,-\alpha} = (\mathcal{H}_\omega)_{\#_\alpha} = (P_{\omega,\alpha})^*$$

となり上述の (I)–(IV) を満たします.

(3) 多変数幾何平均 (Karcher 平均） $G_\omega(A_1,\ldots,A_n)$ は次の方程式の解として定義されます：

$$\sum_{j=1}^n w_j \log(X^{-1/2}A_jX^{-1/2}) = 0$$

(see [23, 21, 20]). [20] で指摘されているように

$$P_{\omega,-\alpha}(A_1,\ldots,A_n) \le G_\omega(A_1,\ldots,A_n) \le P_{\omega,\alpha}(A_1,\ldots,A_n), \quad 0<\alpha\le 1$$

および $\alpha \searrow 0$ の極限が,

$$P_{\omega,\alpha}(A_1,\ldots,A_n) \ \searrow\ G_\omega(A_1,\ldots,A_n), \tag{2.2}$$
$$P_{\omega,-\alpha}(A_1,\ldots,A_n) \ \nearrow\ G_\omega(A_1,\ldots,A_n). \tag{2.3}$$

となることから，G_ω が上述の (I)–(IV) を満たすことが分かります.

2.3 2 変数の変形平均

Kubo と Ando の意味での 2 変数平均 τ と σ に対し，σ が左自明平均でないとき，変形平均 τ_σ を考えることができます．τ_σ の表現関数 f_{τ_σ} を計算すると

$$x = f_{\tau_\sigma}(t) = 1\tau_\sigma t = (x\sigma 1)\tau(x\sigma t) \tag{2.4}$$

という方程式ができます．即ち，方程式 (2.4) の解が τ_σ の表現関数です．よく知られた 2 変数平均について計算してみます.

(1) $\tau = \triangledown_w$, $\sigma = !_\alpha$ の場合.

$$1(\triangledown_w)_{\#_\alpha} t = (1-w+wt^\alpha)^{1/\alpha}.$$

つまり，$(\triangledown_w)_{\#_\alpha} = P_{w,\alpha}$ です.

(2) $\tau = \triangledown_w, \sigma = \#_\alpha$ の場合．

$$1(\triangledown_w)_{!_\alpha} t$$
$$= \frac{\sqrt{((1-\alpha-w)t+w-\alpha)^2+4\alpha(1-\alpha)t}-((1-\alpha-w)t+w-\alpha)}{2\alpha}.$$

特に，$\triangledown_! = \#$ です．$\#$ は $*$ 演算で不変ですから $!_\triangledown = \#$ も分かります．

(3) $\tau = \#, \sigma = \triangledown_\alpha$ の場合．

$$1\#_{\triangledown_\alpha} t = \frac{(1-\alpha)(1+t)+\sqrt{(1-\alpha)^2(1+t)^2+4\alpha(2-\alpha)t}}{2(2-\alpha)}, \qquad t>0.$$

Remark 3. $w \neq \frac{1}{2}$ の時，$\#_w = (\triangledown_w)_\sigma$ となる σ は存在しません *[14]*．

Remark 4. $w \neq \frac{1}{2}$ の時，$1(\#_w)_{\triangledown_\alpha} t$ を書き下すのは難しそうです．

3 Pálfia の lambda 平均

3.1 ラムダ平均

文献 [25] において Pálfia が導入したラムダ作用素平均を，多変数作用素平均の場合に限定して述べてみます．確率ベクトル $\omega = (\omega_j)$ と $(0, \infty)$ 上の実数値作用素単調関数 g を考えます．Pálfia は g が $g(1) = 0$ and $g'(1) = 1$ を満たすとき，GKE (generalized Karcher equation)：

$$\sum_{i=1}^{n} w_j g(X^{-1/2} A_i X^{-1/2}) = 0, \tag{3.1}$$

の解 $X \in \mathbb{P}$ が一意に決まることを示しました．解 X を $\Lambda(\omega; g; A_1, \ldots, A_n)$ もしくは $\Lambda_{\omega,g}((A_i))$ と書きます．$\Lambda_{\omega,g}$ は 2.1 節の意味で n 変数作用素平均です．

Remark 5. ラムダ作用素平均で書けない多変数作用素平均もあります．例えば $M(A,B,C,D) := \frac{1}{2}[(A+B)\#(C+D)]$.

3.2 OM_+^1 と $\mathcal{L}$

作用素単調関数のクラスを以下のように定義します：

$$OM_+^1 := \{f \mid f : (0,\infty) \to (0,\infty), \text{ operator monotone}, f(1) = 1\},$$

$$\mathcal{L} := \{g \mid g : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \text{ operator monotone}, g(1) = 0,\ g'(1) = 1\}.$$

次の事実に注意すれば，幾つかの有名な多変数平均がラムダ平均であることは明らかです：

$$\mathcal{L} \supseteq \left\{ \frac{\log f}{f'(1)},\ \frac{f-1}{f'(1)},\ \frac{f^{-1}-1}{-f'(1)} \;\middle|\; f \in OM_+^1 \backslash \{1\} \right\}.$$

Example 3.1. $\mathcal{A}_\omega = \Lambda_{\omega,t-1}$（算術平均），$G_\omega = \Lambda_{\omega,\log t}$（*Karcher* 平均），$\mathcal{H}_\omega = \Lambda_{\omega,\frac{t^{-1}-1}{-1}}$（調和平均）.

3.3　ラムダ平均と変形平均

3.3.1　ラムダ平均の変形

ラムダ平均の変形平均について考えてみます．任意の $g \in \mathcal{L}$ と $f \in OM^1_+\backslash\{1\}$ について

$$\begin{aligned} X = (\Lambda_{\omega,g})_{\sigma_f}((A_i)) &\iff X = (\Lambda_{\omega,g})((X\sigma_f A_i)) \\ &\iff I = (\Lambda_{\omega,g})((f(X^{-1/2}A_iX^{-1/2})) \\ &\iff X = (\Lambda_{\omega,g\circ f/f'(1)})((A_i)) \end{aligned}$$

となるので次が言えます：

$$(\Lambda_{\omega,g})_{\sigma_f} = \Lambda_{\omega,\frac{g\circ f}{f'(1)}}. \tag{3.2}$$

3.3.2　算術平均の変形

$OM^1_+\backslash\{1\}$ から $\mathcal{L}_0 := \{g \in \mathcal{L} \mid \lim_{t\to 0^+} g(t) > -\infty\}$ への写像 $\varphi(f) := \frac{f-1}{f'(1)}$ を考えます．この写像 φ は全射なので，適当な $f \in OM^1_+\backslash\{1\}$ を使って $\Lambda_{\omega,g} = \Lambda_{\omega,\varphi(f)}$ と書けます．したがって

$$\begin{aligned} X = \Lambda_{\omega,g}((A_i)) &\iff 0 = \sum_i \omega_i \varphi(f)(X^{-1/2}A_iX^{-1/2}) \\ &\iff X = \sum_i \omega_i X\sigma_f A_i \\ &\iff X = (\mathcal{A}_\omega)_{\sigma_f}((A_i)). \end{aligned}$$

即ち次が分かります（ω を固定します）：

$$\{\Lambda_{\omega,g} \mid g \in \mathcal{L}_0\} = \{(\mathcal{A}_\omega)_{\sigma_f} \mid f \in OM^1_+\backslash\{1\}\}. \tag{3.3}$$

Remark 6. $\varphi(\sqrt{t}) = \varphi\left(\frac{\sqrt{t}+1}{2}\right)$ となりますので φ は単射ではありません．

3.3.3　幾何平均 (Karcher 平均) の変形

上の (3.2), (3.3) から以下が分かります（ω を固定します）：

$$\{(G_\omega)_{\sigma_f} \mid f \in OM^1_+\backslash\{1\}\} = \{\Lambda_{\omega,\log f/f'(1)} \mid f \in OM^1_+\backslash\{1\}\}.$$

$$\begin{aligned} \{(G_\omega)_{\sigma_f} \mid f \in OM^1_+\backslash\{1\}, f(0) > 0\} &= \{\Lambda_{\omega,\log f/f'(1)} \mid f \in OM^1_+\backslash\{1\}, f(0) > 0\} \\ &\subset \{\Lambda_{\omega,g} \mid g \in \mathcal{L}_0\} \\ &= \{(\mathcal{A}_\omega)_{\sigma_f} \mid f \in OM^1_+\backslash\{1\}\}. \end{aligned}$$

Remark 7. $\mathcal{L}_1 := \{g \in \mathcal{L} \mid \lim_{t\to 0^+} g(t) = -\infty\}$ とすると $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{L}_1 = \varnothing$ ですが

$$\{\Lambda_{\omega,g} \mid g \in \mathcal{L}_0\} \cap \{\Lambda_{\omega,g} \mid g \in \mathcal{L}_1\} = \varnothing$$

とは限りません．例えば 2 変数平均の結果 $\# = \triangledown_!$ *(Remark 3* 参照*)* を言い換えると

$$\Lambda_{\omega,\log t} = \Lambda_{\omega,2\left(\frac{2x}{x+1}-1\right)}, \quad (\omega = (1/2, 1/2))$$

となり，上の 2 つの集合は共通部分を持ちます．

Example 3.2. $\alpha \in (0,1)$ に対して

$$P_{\omega,\alpha} = (\mathcal{A}_\omega)_{\#_\alpha} = \Lambda_{\omega,(t^\alpha-1)/\alpha}, \qquad P_{\omega,-\alpha} = (\mathcal{H}_\omega)_{\#_\alpha} = \Lambda_{\omega,(t^{-\alpha}-1)/(-\alpha)}.$$

4 多変数平均に関する AH 型不等式

4.1 ＡＨ型不等式と pmi 性

序文で述べた AH 不等式の一般化となる次の命題：

$$M(A_1, \ldots, A_n) \geq I \Rightarrow M(A_1^r, \ldots, A_n^r) \geq I \quad \text{for } r \geq 1 \tag{4.1}$$

を AH 型不等式と呼びます．上の命題を満たす 2 変数もしくは多変数の平均を pmi 平均と呼びます．2 変数作用素平均（Kubo と Ando の意味での作用素平均）については，σ_f が pmi であることと表現関数 f の性質：

$$f(t)^p \leq f(t^p) \quad (p \geq 1, t > 0)$$

は同値です [29]．多変数幾何平均 (Karcher 平均) の pmi 性は Yamazaki によって示されました [32]．

4.2 ラムダ平均の pmi 性

ラムダ平均が pmi になる為の条件が知られています [33, Theorem 8]．以後，$\Delta_n := \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in (0,1)^n \mid \sum_{i=1}^n \omega_i = 1\}$ とします．

Proposition 4.1. *Let $g \in \mathcal{L}$. Assume f_λ is the representing function of an operaotr mean $\Lambda((1-\lambda, \lambda), g, A, B)$. Then the following are equivalent:*

(1) $f_\lambda(x)^p \leq f_\lambda(x^p)$ holds for all $p \geq 1, \lambda \in [0,1]$ and $x \in (0,\infty)$;

(2) $pg(x) \leq g(x^p)$ for all $p \geq 1$ and $x \in (0,\infty)$;

(3) $\Lambda_{\omega,g}(\mathbb{A}) \geq I$ implies $\Lambda_{\omega,g}(\mathbb{A}^p) \geq I$ for all $\omega \in \Delta_n, \mathbb{A} \in \mathbb{P}^n$ and $p \geq 1$.

4.3　変形平均の pmi 性

前節までの考察を合わせれば，以下の関係が分かります．

$$
\begin{aligned}
(G_\omega)_{\sigma_f}\ \ : \text{pmi for all } \omega \in \Delta_n \iff & \ g(x) := \frac{\log f}{f'(1)} \text{ が (2) を満たす} \\
\iff & \ f(x)^p \le f(x^p) \text{ for } p \ge 1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}_\omega)_{\sigma_f}\ \ : \text{pmi for all } \omega \in \Delta_n \iff & \ g(x) := \frac{f(x)-1}{f'(1)} \text{ が (2) を満たす} \\
\iff & \ pf(x) - p \le f(x^p) - 1 \text{ for } p \ge 1 \\
\Longleftarrow & \ f(x)^p \le f(x^p) \text{ for } p \ge 1.
\end{aligned}
$$

Remark 8. $f(x) := \frac{x+2x^{1/3}}{1+2x^{1/3}}$ は，最後から 2 番目の不等式を満たす作用素単調関数です．しかし最後の不等式は満たしません．

本節の最後に，変形平均の pmi 性をチェックする方法をご紹介します [14]．

Theorem 4.2. *Let $M : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ be an n-variable operator mean. Let σ be a pmi operator mean with $\sigma \neq \mathfrak{l}$. If M satisfies* (4.1) *for every $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{P}$, then M_σ does the same.*

Remark 9. 2 変数平均の例を考えます．幾何平均 $\#$ は *pmi* 平均なので上の定理から $(\#)_\triangledown$ も *pmi* 平均です．*2.3* 節で見たように，$(\#)_\triangledown$ の表現関数は $1(\#)_\triangledown t = \frac{(t+1)+\sqrt{t^2+14t+1}}{6}$ となります．この平均の *pmi* 性を計算で確認するのは容易ではありませんが上の定理を使うと簡単です．

Remark 10. 上の定理はラムダ平均でない *pmi* 平均についても有効です．*Remark 5* で見た 4 変数平均 $M(A,B,C,D) := \frac{1}{2}[(A+B)\#(C+D)]$ は *pmi* 平均 *(*$1 \le r \le 2$ のときは直ちに分かり，さらに繰り返し法で $r > 2$ でも成立する*)* ですから $M_\triangledown(A,B,C,D) = \frac{1}{2}[(A+B)\#_\triangledown(C+D)]$ も *pmi* 平均です．

5　作用素遠近法

5.1　定義と目的

作用素遠近法（operator perspective）P_f を (1.2) のように定義すれば，以下は直ちに分かります：

$$
\begin{aligned}
P_{f^*}(A,B) &= P_f(A^{-1}, B^{-1})^{-1}, \\
P_{f'}(A,B) &= P_f(B,A), \\
XP_f(A,B)X &= P_f(XAX, XBX) \qquad (X > 0).
\end{aligned}
$$

ここで，$f^*(t) := 1/f(1/t), f'(t) := tf(1/t)$ です．

以後、命題

$$A, B > 0, P_f(A, B) \leq I \Rightarrow P_f(A^p, B^p) \leq I \tag{5.1}$$

あるいは

$$A, B > 0, P_f(A, B) \geq I \Rightarrow P_f(A^p, B^p) \geq I$$

を AH 型不等式と呼ぶことにします．本節では、表現関数 f が作用素凹の場合と作用素凸の場合について AH 型不等式を論じます．

5.2 作用素平均の不等式

正規化された連続関数 f が作用素凹の場合（即ち $f \in OM_+^1$ の場合），P_f の代わりに σ_f をつかって，命題を記述します [15]．

Theorem 5.1. *Let $h \in OM_+^1$ and $A, B > 0$. Set $C := A^{-1/2}BA^{-1/2}$. Then the following inequalities hold:*

$$\begin{aligned}
A^p\sigma_h B^p &\geq \lambda_{\min}\left(\frac{h(C^p)}{h(C)^p}\right)\lambda_{\min}^{p-1}(A\sigma_h B)(A\sigma_h B) && \text{for } 1 \leq p \leq 2,\\
A^p\sigma_h B^p &\leq \left\|\frac{h(C^p)}{h(C)^p}\right\|_\infty \|A\sigma_h B\|_\infty^{p-1}(A\sigma_h B) && \text{for } 1 \leq p \leq 2,\\
A^p\sigma_h B^p &\leq \left\|\frac{h(C^p)}{h(C)^p}\right\|_\infty \lambda_{\min}^{p-1}(A\sigma_h B)(A\sigma_h B) && \text{for } 0 < p \leq 1,\\
A^p\sigma_h B^p &\geq \lambda_{\min}\left(\frac{h(C^p)}{h(C)^p}\right)\|A\sigma_h B\|_\infty^{p-1}(A\sigma_h B) && \text{for } 0 < p \leq 1,
\end{aligned}$$

where $\|X\|_\infty$ be the operator norm of X and $\lambda_{\min}(X)$ be the minimum of the spectrum of X.

Corollary 5.1. *Let $h \in OM_+^1$. The following are equivalent:*

(1) $h(t^p) \geq h(t)^p$ *for* $1 \leq p \leq 2$;

(2) $A^p\sigma_h B^p \geq \lambda_{\min}^{p-1}(A\sigma_h B)(A\sigma_h B)$ *for* $1 \leq p \leq 2,\ A, B > 0$;

(3) $A^p\sigma_h B^p \leq \lambda_{\min}^{p-1}(A\sigma_h B)(A\sigma_h B)$ *for* $0 < p \leq 1,\ A, B > 0$;

(4) $A, B > 0, A\sigma_h B \geq I \Rightarrow A^p\sigma_h B^p \geq I$ *for* $1 \leq p \leq 2$.

5.3 冪単調な作用素単調関数

Cor. 5.1 の不等式 (1) を満たす関数 $f \in OM_+^1$ を pmi 関数，σ_f を pmi 平均と呼びます (4.1 節も参照)．さらに pmi 関数全体を PMI と書きます:

$$PMI = \{f \in OM_+^1 \mid f(t)^p \leq f(t^p) \text{ for all } t > 0, p \in (1, 2)\},$$

Kubo–Ando 理論によれば，PMI は pmi 平均の全体と同一視できます．PMI は簡単な不等式で特徴づけられますが，与えられた関数が PMI に属しているかを判断することは簡単ではありません．

5.4 pmi の部分クラス

冪関数 t^α $(0 \le \alpha \le 1)$ および冪関数の確率測度 ν を用いた積分で定義される関数は PMI の要素です．それらの全体

$$GM := \left\{ f \;\middle|\; f(t) = \int_{[0,1]} t^\alpha d\nu(\alpha),\ \ \nu \text{ は } [0,1] \text{ の確率測度} \right\}$$

は重要な作用素平均（算術平均，対数平均，幾何平均）を含んでいます．GM と PMI の間には隔たりがあり [4]，さらに，作用素平均の部分クラス GCV を次のように定義すると，$GM \subsetneq GCV \subsetneq PMI$ が成り立ちます [31]:

$$GCV := \{f \in OM_+^1 \mid f(\sqrt{xy}) \le \sqrt{f(x)f(y)}\}.$$

PMI を含むクラスも一つ考えましょう．幾何平均より大きな平均のクラス

$$PMI_\infty := \{f \in OM_+^1 \mid \exists\alpha \in [0,1]; f(t) \ge t^\alpha\}$$

を考えると $PMI \subsetneq PMI_\infty \subsetneq OM_+^1$ となります [31]．

6 同時凸な作用素遠近法と AH 型不等式

6.1 作用素凸性と同時凸性

連続関数 $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ が任意の $\lambda \in (0,1)$ と任意の $A, B > 0$ に対して，不等式

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) \le \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B)$$

を満たすとき，f を作用素凸関数と呼びます．f の作用素凸性は P_f の同時凸性：

$$P_f(\lambda A + (1-\lambda)B, \lambda C + (1-\lambda)D) \le \lambda P_f(A,C) + (1-\lambda) P_f(B,D) \qquad (\lambda \in (0,1))$$

と同値であることが知られています ([6],[5])．以後，正規化された ($f(1) = 1$ となる) 作用素凸関数全体を OC_+^1 と書きます．

以後，$f(0+) := \lim_{t\to 0+} f(t)$ とします．境界条件（$f(0+) = 0$) を仮定したときには以下が分かります：

Proposition 6.1. *The following are equivalent:*

(1) $f(t) = th(t)$ *for some* $h \in OM_+^1$*;*

(2) $f(0+) = 0$ *and* P_f *is jointly convex;*

(3) $P_f(A, B_1) \geq P_f(A, B_2) \quad (B_1 \leq B_2)$*.*

6.2 pmi 性

関数 f が作用素凸の場合に AH 型不等式を考察すると，前節（Cor. 5.1 の (4) 参照）で述べた命題:

$$h \in PMI, \quad P_h(A, B) \geq I \Rightarrow P_h(A^p, B^p) \geq I \qquad \text{for } 1 \leq p \leq 2$$

と対をなす命題が得られます.

Theorem 6.1. *([15]) Let* $f \in OC_+^1$*. If* $f(0+) = 0$*, then the following are equivalent:*

(1) $f(t^p) \geq f(t)^p \quad$ *for* $1 \leq p \leq 2$;

(2) $f(t) = th(t)$ *for some* $h \in PMI$;

(3) $A, B > 0, P_f(A, B) \leq I \Rightarrow P_f(A^p, B^p) \leq I \qquad$ *for* $0 < p \leq 1$*.*

Corollary 6.2. *([16],[13]) For* $\alpha \in [-1, 0) \cup (1, 2]$*,* P_{t^α} *satisfies (5.1) for* $0 < p \leq 1$*.*

さらに

$$\Gamma_\alpha := \{p > 0 \mid A, B > 0, P_{t^\alpha}(A, B) \leq I \Rightarrow P_{t^\alpha}(A^p, B^p) \leq I\}$$

とすると

$$\Gamma_\alpha = \begin{cases} (0, 1] & \text{if } \alpha \in [-1, 0) \cup (1, 2]; \\ [1, \infty) & \text{if } \alpha \in (0, 1); \end{cases}$$

となります ([30],[15]).

6.3 拡張

前節の結果の拡張として，次の結果が得られています [15].

Theorem 6.2. *Let* $h \in PMI$ *and* $n \geq 2$*. Then*

$$A, B > 0, P_{t^n h}(A, B) \leq I \Rightarrow P_{t^n h}(A^p, B^p) \leq I \qquad \textit{for } \; 0 < p \leq 1/2.$$

Remark 11. 関数族 $\{t^n h \mid h \in OM_+^1\}$ は作用素 k-単調関数としての意味があります *[7].*

参考文献

[1] T. Ando and F. Hiai, *Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequality*, Linear Algebra Appl. **197** (1994), 113–131.

[2] T. Ando, C.-K. Li and R. Mathias, *Geometric means*, Linear Algebra Appl. **385** (2004), 305–334.

[3] T. Ando and F. Hiai, *Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequality*, Linear Algebra Appl. **197** (1994), 113–131.

[4] J.-C. Bourin and F. Hiai, *Jensen and Minkowski inequalities for operator means and anti-norms*, Linear Algebra Appl. **456** (2014), 22–53.

[5] A. Ebadian, I. Nikoufar, and M. E. Gordji, *Perspectives of matrix convex functions*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **108** (2011), 7313–7314.

[6] E. G. Effros, *A matrix convexity approach to some celebrated quantum inequalities*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **106** (2009), 1006–1008.

[7] U. Franz, F. Hiai and É. Ricard, *Higher order extension of Löwner's theory: operator k-tone functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), 3043–3074.

[8] J. I. Fujii, M. Fujii and Y. Seo, *The Golden-Thompson-Segal type inequalities related to the weighted geometric mean due to Lawson-Lim*, J. Math. Inequal. **3** (2009), 511–518.

[9] J. I. Fujii and Y. Seo, *The relative operator entropy and the Karcher mean*, Linear Algebra Appl. **542** (2018), 4–34.

[10] J. I. Fujii, Y. Seo and T. Yamazaki, *Norm inequalities for matrix geometric means of positive definite matrices*, Linear Multilinear Algebra **64** (2016), 512–526.

[11] T. Furuta, J. Mićić Hot, J. Pečarić and Y. Seo, *Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, Zagreb, Element, 2005.

[12] F. Hiai, *Operator means deformed by a fixed point method*, Adv. Oper. Theory, to appear, arXiv:1711.10170 [math.FA].

[13] F. Hiai, *Log-majorization related to Rényi divergences*, Linear Algebra Appl. **563** (2019), 255–276.

[14] F. Hiai, Y. Seo and S. Wada, *Ando–Hiai type inequalities for multivariate operator means*, Linear Multilinear Algebra **67** (2019), 2253–2281. Online: http://www.tandfonline.com/loi/glma20.

[15] F. Hiai, Y. Seo and S. Wada, *Ando-Hiai type inequalities for operator means and operator perspectives* , Internat. J. Math., to appear, arXiv:1905.01929

[16] M. Kian and Y. Seo, *Norm inequalities related to the matrix geometric mean of negative power*, Sci. Math. Japon., Online, e-2018, http://www.jams.or.jp/notice/scmjol/index.html.

[17] F. Kubo and T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann. **246** (1980), 205–224.

[18] J. Lawson and Y. Lim, *Monotonic properties of the least squares mean*, Math. Ann. **351** (2011) 267–279.

[19] J. Lawson and Y. Lim, *Weighted means and Karcher equations of positive operators*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **110** (2013), 15626–15632.

[20] J. Lawson and Y. Lim, *Karcher means and Karcher equations of positive definite operators*, Trans. Amer. Math. Soc. Series B **1** (2014), 1–22.

[21] Y. Lim and M. Pálfia, *Matrix power means and the Karcher mean*, J. Funct. Anal. **262** (2012), 1498–1514.

[22] Y. Lim and T. Yamazaki, *On some inequalities for the matrix power and Karcher means*, Linear Algebra Appl. **438** (2013), 1293–1304.

[23] M. Moakher, *A differential geometric approach to the geometric mean of symmetric positive-definite matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **26** (2005), 735–747.

[24] R. Nakamoto and Y. Seo, *A complement of the Ando-Hiai inequality and norm inequalities for the geometric mean*, Nihonkai Math. J. **18** (2007), 43–50.

[25] M. Pálfia, *Operator means of probability measures and generalized Karcher equations*, Adv. Math. **289** (2016), 951–1007.

[26] W. Pusz and S. L. Woronowicz, *Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map*, Rep. Math. Phys. **8** (1975), 159–170.

[27] Y. Seo, *On a reverse of Ando-Hiai inequality*, Banach J. Math. Anal., **4** (2010), 87–91.

[28] Y. Seo, *Matrix trace inequalities on Tsallis relative entropy of negative order*, J. Math. Anal. Appl. **472** (2019), 1499–1508.

[29] S. Wada, *Some ways of constructing Furuta-type inequalities*, Linear Algebra Appl. **457** (2014), 276–286.

[30] S. Wada, *When does Ando–Hiai inequality hold?*, Linear Algebra Appl. **540** (2018), 234–243.

[31] S. Wada, *Geometric convexity of an operator mean*, Positivity, to appear, arXiv:1903.10785 [math.FA].

[32] T. Yamazaki, *Riemannian mean and matrix inequalities related to the Ando-Hiai inequality and chaotic order*, Oper. Matrices **6** (2012), 577–588.

[33] T. Yamazaki, *The Ando–Hiai inequalities for the solution of the generalized Karcher equation and related results*, J. Math. Anal. Appl. **479** (2019), 531–545.