作用素の順序に基づく不定値内積空間への埋め込みとその応用*

防衛大学校・数学教育室　瀬戸　道生
Michio Seto
Department of Mathematics,
National Defense Academy

1　はじめに

Wu-S-Yang [14] にて，

$$T_{\varphi_1}T_{\varphi_1}^* + T_{\varphi_2}T_{\varphi_2}^* - T_{\varphi_3}T_{\varphi_3}^* \tag{1.1}$$

が射影作用素となるテープリッツ作用素の族に遭遇した．この小論ではこの発見をきっかけとして始めた研究について報告する．前半では (1.1) を抽象化した作用素不等式が導く作用素論について解説する．これは内山氏（東北医科薬科大）との共同研究 (S-Uchiyama [13]) である．後半では，(1.1) の応用として，複素関数論と双曲幾何で重要な Schwarz-Pick の不等式の不定値的な多変数版が得られることを解説する (S [12])．

2　不定値内積空間への埋め込み

2.1　問題の設定

(1.1) を抽象化して，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上で

$$0 \leq T_1T_1^* + T_2T_2^* - T_3T_3^* \leq I \tag{2.1}$$

*This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University

を満たす有界線型作用素の三つ組 (T_1, T_2, T_3) を考える．このとき，

$$T = \sqrt{T_1 T_1^* + T_2 T_2^* - T_3 T_3^*}$$

と定め，T_1, T_2, T_3, T の de Branges-Rovnyak 空間を導入する．ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素 A に対し，$\mathcal{M}(A)$ を A により定まる de Branges-Rovnyak 空間とする．すなわち，$\mathcal{M}(A)$ は A の値域に引き戻しノルム

$$\|Ax\|_{\mathcal{M}(A)} = \|P_{(\ker A)^\perp} x\|_{\mathcal{H}} = \min\{\|y\|_{\mathcal{H}} : Ay = Ax\}$$

を入れて得られるヒルベルト空間である．このとき，de Branges-Rovnyak 理論の基本定理により，

$$\mathcal{M}(T) \hookrightarrow \mathcal{M}(T) + \mathcal{M}(T_3) = \mathcal{M}(\sqrt{T_1 T_1^* + T_2 T_2^*}) = \mathcal{M}(T_1) + \mathcal{M}(T_2) \tag{2.2}$$

が得られる（de Branges-Rovnyak 理論の詳細については Ando [4] を参照）．このように $\mathcal{M}(T)$ は $\mathcal{M}(T_1) + \mathcal{M}(T_2)$ に埋め込まれるのだが，この方法では T_3 と T の関連が読み取れない．そこで，(2.2) から導かれる形式的な等式

$$\mathcal{M}(T) = \mathcal{M}(T_1) + \mathcal{M}(T_2) - \mathcal{M}(T_3) \tag{2.3}$$

を何らかの意味で正当化できないか考えたい．

2.2 不定値内積空間

問題 (2.3) を不定値内積空間の中の正定値部分空間の問題として考える．まず，

$$\mathcal{H}_+ = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_- = \mathcal{H} \quad \text{and} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定め，不定値内積空間 $\mathcal{K} = (\mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-, J)$ を考える．すなわち，ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t, \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^t \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, に対し，（不定値）内積を

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{K}} = \langle J\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} = \langle x_1, y_1 \rangle_{\mathcal{H}} + \langle x_2, y_2 \rangle_{\mathcal{H}} - \langle x_3, y_3 \rangle_{\mathcal{H}}.$$

と定める．このような不定値内積空間は Kreĭn 空間と呼ばれる．Kreĭn 空間の幾何については Dritschel-Rovnyak [6] が簡潔にまとまっており読みやすい．さて，(2.1) をみたす (T_1, T_2, T_3) に対し，

$$\mathbb{T} : \mathcal{K} \to \mathcal{H}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto T_1 x_1 + T_2 x_2 - T_3 x_3$$

と定める．このとき，$\mathbb{T}$ の共役作用素 $\mathbb{T}^\sharp$ は

$$\mathbb{T}^\sharp : \mathcal{H} \to \mathcal{K}, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} T_1^* x \\ T_2^* x \\ T_3^* x \end{pmatrix}$$

となる．特に，

$$\mathbb{T}\mathbb{T}^\sharp x = T_1 T_1^* x + T_2 T_2^* x - T_3 T_3^* x$$

が成り立つ．ここで，

$$T = (T_1 T_1^* + T_2 T_2^* - T_3 T_3^*)^{1/2}$$

に対し，次のように定められる $V : \operatorname{Im} T \to \mathbb{T}^\sharp (\ker T)^\perp$ を考える．

$$VTx = \begin{pmatrix} T_1^* x \\ T_2^* x \\ T_3^* x \end{pmatrix} \quad (x \in (\ker T)^\perp).$$

このとき，等式

$$\|Tx\|_{\mathcal{H}}^2 = \|T_1^* x\|_{\mathcal{H}}^2 + \|T_2^* x\|_{\mathcal{H}}^2 - \|T_3^* x\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle \mathbb{T}^\sharp x, \mathbb{T}^\sharp x \rangle_{\mathcal{K}} \tag{2.4}$$

から，V は等距離かつ $\mathbb{T}^\sharp (\ker T)^\perp$ が前ヒルベルト空間であることがわかる． そこで，$\mathcal{K}_0$ を (2.4) から定められるノルムに関する $\mathbb{T}^\sharp (\ker T)^\perp$ の完備化ヒルベルト空間とし，$\widetilde{V} : \overline{\mathrm{Im}} T \to \mathcal{K}_0$ を V のユニタリ拡張とする．このとき，

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \xrightarrow{\mathbb{T}^\sharp} & \mathcal{K}_0 \\ {\scriptstyle T}\big\downarrow & \nearrow_{\widetilde{V}} & \\ \mathcal{L} & & \end{array} \qquad (\mathcal{L} := (\ker T)^\perp = \overline{\mathrm{Im}} T) \tag{2.5}$$

は可換である．このようにして，問題 (2.3) を扱うための舞台が整った．

2.3 不定値的な range inclusion

次の定理が [13] の主結果である．

定理 2.1. 任意の $u \in \mathcal{M}(T)$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，次の (i), (ii) を満たすベクトル $\mathbf{z}_\varepsilon = (z_1(\varepsilon), z_2(\varepsilon), z_3(\varepsilon))^t \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ が存在する．

(i) $T_1 z_1(\varepsilon) + T_2 z_2(\varepsilon) - T_3 z_3(\varepsilon) \to u$ $(\varepsilon \to 0)$,

(ii) $0 \leq \|z_1(\varepsilon)\|_{\mathcal{H}}^2 + \|z_2(\varepsilon)\|_{\mathcal{H}}^2 - \|z_3(\varepsilon)\|_{\mathcal{H}}^2 \uparrow \|u\|_{\mathcal{M}(T)}^2$ $(\varepsilon \downarrow 0)$,

(iii) $\mathcal{K}_0$ の中で $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{z}_\varepsilon$ が存在する．

ここでいくつか注意したい．まず，(i) だけでは自明な命題である．しかし，今は (ii) のノルム評価がある．(ii) の不等式の中に負の項があるが，それは図式 (2.5) の $\mathcal{K}_0$ のノルムの定め方に起因するものである．次に，(2.3) は形式的な等式であったが，定理 2.1 の意味で

$$\mathcal{M}(T) \hookrightarrow \mathcal{M}(T_1) + \mathcal{M}(T_2) - \mathcal{M}(T_3)$$

と表してもよいだろう．また，本質的な話ではないが，(2.1) を

$$0 \le \sum_{j=1}^{n} T_j T_j^* - \sum_{j=n+1}^{m} T_j T_j^* \le I$$

のように一般化しても同様な結果が得られる．

2.4 応用

H^2 を $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ 上の Hardy 空間とし，T_f を関数 f から定まる Toeplitz 作用素とする．このとき，

$$\exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad T_{\varphi_1} T_{\varphi_1}^* + T_{\varphi_2} T_{\varphi_2}^* - T_{\varphi_3} T_{\varphi_3}^* \ge \delta I_{H^2}$$

をみたす $\mathbb{D}$ 上の有界正則関数 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ を考えよう．この設定に定理 2.1 を適用できる．まず，

$$T = (T_{\varphi_1} T_{\varphi_1}^* + T_{\varphi_2} T_{\varphi_2}^* - T_{\varphi_3} T_{\varphi_3}^*)^{1/2}$$

とおくと，T は可逆であり，$\|T^{-1}\| \le 1/\sqrt{\delta}$ である．特に，$1 \in \mathcal{M}(T)$ であり，

$$\|1\|_{\mathcal{M}(T)} = \|T^{-1}1\|_{H^2} \le \frac{1}{\sqrt{\delta}}$$

が成り立つ．よって，定理 2.1 により，次の (i), (ii) を満たす $\psi_{1,n}, \psi_{2,n}, \psi_{3,n} \in H^2$ $(n \in \mathbb{N})$ が存在する．

(i) $\|\varphi_1 \psi_{1,n} + \varphi_2 \psi_{2,n} - \varphi_3 \psi_{3,n} - 1\|_{H^2} \to 0 \ (n \to 0)$,

(ii) $0 \le \|\psi_{1,n}\|_{H^2}^2 + \|\psi_{1,n}\|_{H^2}^2 - \|\psi_{1,n}\|_{H^2}^2 \le \dfrac{1}{\delta} \ (n \in \mathbb{N})$.

さらに，$\psi_{1,n}, \psi_{2,n}, \psi_{3,n}$ の構成法から

(iii) 任意の $\lambda \in \mathbb{D}$ に対し，

$$|\varphi_1(\lambda)\psi_{1,n}(\lambda) + \varphi_2(\lambda)\psi_{2,n}(\lambda) - \varphi_3(\lambda)\psi_{3,n}(\lambda)|^2 \le \frac{|\varphi_1(\lambda)|^2 + |\varphi_2(\lambda)|^2 - |\varphi_3(\lambda)|^2}{\delta(1 - |\lambda|^2)}$$

も導かれる．

3　Schwarz-Pick の不等式

3.1　Schwarz の補題

$\mathbb{D}$ を複素平面内の単位開円板とし，

$$\mathcal{S}(\mathbb{D}) = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : |f(z)| \leq 1 \ (z \in \mathbb{D})\}$$

と定める．複素関数論における Schwarz の補題

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{D}) \text{ and } f(0) = 0 \Rightarrow |f(z)| \leq |z| \quad (z \in \mathbb{D})$$

は基本的である．また，Schwarz の補題は次のように一般化される．

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{D}) \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w} z} \right| \quad (z, w \in \mathbb{D}).$$

これは Schwarz-Pick の不等式とよばれる．ここで

$$\rho_{\mathbb{D}}(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w} z} \right|$$

とおくと，$\rho_{\mathbb{D}}$ は $\mathbb{D}$ 上の距離となる（擬双曲距離とよばれる）．このとき，Schwarz-Pick の不等式は

$$\rho_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)) \leq \rho_{\mathbb{D}}(z, w) \quad (z, w \in \mathbb{D})$$

と書き換えることができる．すなわち，$\mathbb{D}$ 上の正則自己写像 f は距離 $\rho_{\mathbb{D}}$ に関する縮小写像である．Schwarz-Pick の不等式は複素解析だけでなく双曲幾何でも基本的な不等式である．

ところで，Schwarz の補題には次のような証明がある．

（Schwarz の補題のヒルベルト空間論的証明）．まず，H^2 を $\mathbb{D}$ 上の Hardy 空間とし，T_f を f から定まる Toeplitz 作用素，$P_{\mathcal{M}}$ を閉部分空間 $\mathcal{M}$ に対応する直交射影とする．このとき，$f(0) = 0$ をみたす $f \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ に対し $f \in zH^2$ であることから，Douglas の range inclusion theorem により，

$$\exists \gamma > 0 \quad \text{s.t.} \quad T_f T_f^* \leq \gamma P_{zH^2} = \gamma T_z T_z^*$$

が成り立つ．ここで，P_{zH^2} が直交射影であることと $\|T_f\| \leq 1$ から $\gamma = 1$ と選べることがわかる．よって，k_λ を H^2 の再生核とすれば，

$$\frac{|f(\lambda)|^2}{1 - |\lambda|^2} = \langle T_f T_f^* k_\lambda, k_\lambda \rangle \leq \langle T_z T_z^* k_\lambda, k_\lambda \rangle = \frac{|\lambda|^2}{1 - |\lambda|^2} \quad (\lambda \in \mathbb{D})$$

が成り立つ．　□

この証明は通常の複素解析の講義で使えるものではないが，H^2 を含む広いクラスに適用可能である．$\mathbb{D}$ 上の Bergman 空間に適用した場合については，Kuwahara-S [10] で現在まとめている．$\mathbb{D}^2$ 上の Hardy 空間へ適用した結果を次に紹介する．

3.2　不定値的な Schwarz-Pick の不等式

Schwarz の補題，Schwarz-Pick の不等式には関数解析的側面がある．例えば，作用素論と関係するものでは Anderson-Rovnyak [2], Anderson-Dritschel-Rovnyak [3], Knese [8], MacCluer-Stroethoff-Zhao [9, 11] 等の研究がある．バナッハ空間論との関係は Dineen [5] にまとめられている．ここではこれらの研究とは異なる観点から Schwarz-Pick の不等式の多変数化を考える．

まず，$z=(z_1,z_2), w=(w_1,w_2)\in\mathbb{D}^2$ に対し，

$$\rho(z,w)=\sqrt{\left|\frac{z_1-w_1}{1-\overline{w_1}z_1}\right|^2+\left|\frac{z_2-w_2}{1-\overline{w_2}z_2}\right|^2-\left|\frac{z_1-w_1}{1-\overline{w_1}z_1}\cdot\frac{z_2-w_2}{1-\overline{w_2}z_2}\right|^2}$$

と定める．これも $\mathbb{D}^2$ 上の距離を与える（これは既に知られていることのようであるが後で証明を与える）．この ρ の出自について簡単に解説しよう．一次分数変換で調整すれば $w=0$ と仮定してよい．このとき，

$$(\rho(z,0))^2=|z_1|^2+|z_2|^2-|z_1z_2|^2=1-(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2) \tag{3.1}$$

と表される．ここに Kreĭn 空間が隠れている．$\mathbb{C}^3$ 上に

$$\langle z,w\rangle_{\mathcal{K}}=z_1\overline{w_1}+z_2\overline{w_2}-z_3\overline{w_3}\quad(z=(z_1,z_2,z_3),w=(w_1,w_2,w_3)\in\mathbb{C}^3).$$

と（不定値）内積を定めよう．このようにして得られる Kreĭn 空間を $\mathcal{K}$ と表す．次に，Φ を以下のように定められる写像とする．

$$\Phi:\mathbb{D}^2\to\mathcal{K},\quad(z_1,z_2)\mapsto(z_1,z_2,z_1z_2).$$

このとき，

$$\begin{aligned}\Omega&=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:0\le|z_1|^2+|z_2|^2-|z_1z_2|^2<1\}\\&=\{z\in\mathbb{C}^2:0\le\langle\Phi(z),\Phi(z)\rangle_{\mathcal{K}}<1\}.\end{aligned}$$

とおけば，(3.1) から，$\mathbb{D}^2$ は Ω の有界な連結成分であることがわかる．このように，ρ は $\mathbb{D}^2$ の形状を定める関数である．次に，

$$\mathcal{S}(\mathbb{D}^2;2,1)=\{(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)\in(\mathrm{Hol}(\mathbb{D}^2))^3:0\le T_{\varphi_1}T_{\varphi_1}^*+T_{\varphi_2}T_{\varphi_2}^*-T_{\varphi_3}T_{\varphi_3}^*\le I\}$$

と定める．$\mathcal{S}(\mathbb{D}^2;2,1)$ は $\mathcal{S}(\mathbb{D})$ の $\mathbb{D}^2$ への拡張の一つである．このように作用素の正定値性を用いて定められる正則関数のクラスは Schur-Agler クラスと呼ばれることが多い（例えば，Jury [7] を参照）．さて，[12] にて次が得られた．

定理 3.1. $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ を $\mathbb{D}^2$ 上の正則自己写像とする．このとき，

$$0 \le \rho(\psi(z), \psi(w)) \le \sqrt{2}\rho(z, w) < \sqrt{2} \quad (z, w \in \mathbb{D}^2)$$

が成り立つ．さらに，$(\psi_1, \psi_2, \psi_1\psi_2) \in \mathcal{S}(\mathbb{D}^2; 2, 1)$ ならば

$$0 \le \rho(\psi(z), \psi(w)) \le \rho(z, w) < 1 \quad (z, w \in \mathbb{D}^2)$$

が成り立つ．

証明では前述の Schwarz の補題のヒルベルト空間論的証明を $\mathbb{D}^2$ 上の Hardy 空間に適用する（実際は定理 3.1 に先に気づいたのだが）．ついでに，$\mathbb{D}^2$ 上の正則自己写像 ψ が ρ に関する等距離写像ならば ψ は $\mathbb{D}^2$ の正則自己同型写像である．

3.3 ρ が距離関数であること

定理 3.1 に出てきた ρ が距離関数になることは既に知られているようである．例えば，Agler-McCarthy [1] の Lemma 9.9 は抽象的に述べてあるが，それを $\mathbb{D}^2$ 上の Hardy 空間の場合に翻訳すると ρ が距離関数になることが得られる．このような事情があり，[12] の査読の過程で次の Proposition と証明は外された．しかしながら，将来何らかの役に立つこともあるかもしれないのでここに掲載する．

Proposition 3.2. *ρ is a distance on $\mathbb{D}^2$.*

Proof. Let z and w be two points in $\mathbb{D}^2$. We denote $z = (z_1, z_2)$ and $w = (w_1, w_2)$. Then, it is trivial that $\rho(z, w) = \rho(w, z)$ by the definition of ρ. Next, let $\rho_j(z_j, w_j)$ be the usual pseudo-hyperbolic distance between z_j and w_j in $\mathbb{D}$. Then we have

$$1 - (\rho(z, w))^2 = \{1 - (\rho_1(z_1, w_1))^2\}\{1 - (\rho_2(z_2, w_2))^2\}. \tag{3.2}$$

Hence, if $\rho(z, w) = 0$ then $\rho_j(z_j, w_j) = 0$ for each $j = 1, 2$, that is, $z_1 = w_1$ and $z_2 = w_2$. Thus, we have that $\rho(z, w) = 0$ if and only if $z = w$. We shall show the triangle inequality. Since ρ is invariant under the action of $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}^2)$, it suffices to show that

$$\rho(z, w) \le \rho(z, 0) + \rho(0, w).$$

We set $|z_j| = r_j$ and $|w_j| = s_j$ for $j = 1, 2$. Then the inequality

$$\rho_j(z_j, w_j) \le \frac{r_j + s_j}{1 + r_j s_j} \tag{3.3}$$

is well known, in fact, which implies the triangle inequality for ρ_j. Moreover we note that

$$1 - (\rho(z, 0))^2 = 1 - (r_1^2 + r_2^2 - r_1^2 r_2^2) = (1 - r_1^2)(1 - r_2^2). \tag{3.4}$$

Then, it follows from (3.2), (3.3) and (3.4) that

$$\begin{aligned}(\rho(z,w))^2 &= 1-\{1-(\rho_1(z_1,w_1))^2\}\{1-(\rho_2(z_2,w_2))^2\}\\ &\le 1-\left\{1-\left(\frac{r_1+s_1}{1+r_1s_1}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{r_2+s_2}{1+r_2s_2}\right)^2\right\}\\ &= 1-\frac{(1-r_1^2)(1-s_1^2)(1-r_2^2)(1-s_2^2)}{(1+r_1s_1)^2(1+r_2s_2)^2}\\ &= 1-\frac{\{1-(\rho(z,0))^2\}\{1-(\rho(0,w))^2\}}{(1+r_1s_1)^2(1+r_2s_2)^2}.\end{aligned}$$

Hence, we have

$$\begin{aligned}&(1+r_1s_1)^2(1+r_2s_2)^2\{(\rho(z,0)+\rho(0,w))^2-(\rho(z,w))^2\}\\ &\ge (1+r_1s_1)^2(1+r_2s_2)^2\\ &\qquad\times\left\{(\rho(z,0)+\rho(0,w))^2-\left(1-\frac{\{1-(\rho(z,0))^2\}\{1-(\rho(0,w))^2\}}{(1+r_1s_1)^2(1+r_2s_2)^2}\right)\right\}\\ &= (1+r_1s_1)^2(1+r_2s_2)^2\left\{(\rho(z,0)+\rho(0,w))^2-1\right\}\\ &\qquad\qquad+\{1-(\rho(z,0))^2\}\{1-(\rho(0,w))^2\}\\ &\ge (\rho(z,0)+\rho(0,w))^2-1+\{1-(\rho(z,0))^2\}\{1-(\rho(0,w))^2\}\\ &= 2\rho(z,0)\rho(0,w)+(\rho(z,0)\rho(0,w))^2\\ &\ge 0.\end{aligned}$$

Therefore we have

$$(\rho(z,0)+\rho(0,w))^2-(\rho(z,w))^2\ge 0.$$

This concludes the proof. □

参考文献

[1] J. Agler and J. E. McCarthy, *Pick interpolation and Hilbert function spaces.* Graduate Studies in Mathematics, 44. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[2] J. M. Anderson and J. Rovnyak, *On generalized Schwarz-Pick estimates.* Mathematika 53 (2006), no. 1, 161–168 (2007).

[3] J. M. Anderson and M. A. Dritschel and J. Rovnyak, *Schwarz-Pick inequalities for the Schur-Agler class on the polydisk and unit ball.* Comput. Methods Funct. Theory 8 (2008), no. 1-2, 339–361.

[4] T. Ando, *de Branges spaces and analytic operator functions.* Lecture notes, Sapporo, Japan, 1990.

[5] S. Dineen, *The Schwarz lemma.* Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1989.

[6] M. A. Dritschel and J. Rovnyak *Operators on indefinite inner product spaces.* Lectures on operator theory and its applications (Waterloo, ON, 1994), pp. 141–232, Fields Inst. Monogr., 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[7] M. T. Jury, *Norms and spectral radii of linear fractional composition operators on the ball.* J. Funct. Anal. 254 (2008), no. 9, 2387–2400.

[8] G. Knese, *A Schwarz lemma on the polydisk.* Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), no. 9, 2759–2768.

[9] B. D. MacCluer, K. Stroethoff and R. Zhao, *Generalized Schwarz-Pick estimates.* Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 2, 593–599.

[10] S. Kuwahara and M. Seto, 準備中.

[11] B. D. MacCluer, K. Stroethoff and R. Zhao, *Schwarz-Pick type estimates.* Complex Var. Theory Appl. 48 (2003), no. 8, 711–730.

[12] M. Seto, *Indefinite Schwarz-Pick inequalities on the bidisk*, New York J. Math. 26 (2020), pp. 116–128.

[13] M. Seto and A. Uchiyama, *An indefinite range inclusion theorem for triplets of bounded linear operators on a Hilbert space*, to appear in Oper. Matrices.

[14] Y. Wu, M. Seto and R. Yang, *Kreĭn space representation and Lorentz groups of analytic Hilbert modules.* Sci. China Math. 61 (2018), no. 4, 745–768.

Michio Seto
National Defense Academy
Yokosuka 239-8686 JAPAN
E-mail: mseto@nda.ac.jp