The n-th residual relative operator entropy

Hiroshi Isa*, Eizaburo Kamei,
Hiroaki Tohyama*and Masayuki Watanabe*
(*Maebashi Institute of Technology)

1. Introduction.

ヒルベルト空間上の strictly positive operator A と B に対して relative operator entropy $S(A|B)$，generalized relative operator entropy $S_x(A|B)$，Tsallis relative operator entropy $T_x(A|B)$ は次のように定義されている [3, 7, 17].

$$
\begin{aligned}
S(A|B) &\equiv \frac{d}{dt}\, A \natural_t B \Big|_{t=0} = A^{\frac{1}{2}}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}},\\
S_x(A|B) &\equiv \frac{d}{dt}\, A \natural_t B \Big|_{t=x} = (A \natural_x B)A^{-1}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} \quad (x \in \mathbb{R}),\\
T_x(A|B) &\equiv \frac{A \natural_x B - A}{x} \quad (x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}),\\
T_0(A|B) &\equiv \lim_{x\to 0} T_x(A|B) = S(A|B) = S_0(A|B).
\end{aligned}
$$

ここで，$A \natural_t B \equiv A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}}$ $(t \in \mathbb{R})$ は A と B を通る path である ([4, 5, 14, etc.])．また，t の範囲が $[0,1]$ のとき，$A \natural_t B$ は weighted geometric operator mean $A \sharp_t B$ に一致する (cf. [15])．さらに，$B \natural_{1-t} A = A \natural_t B$ に注意する．

次に，$T_x(A|B)$ の区間 $[0,x]$ での平均変化率を考え，これを 2 次 Tsallis relative operator entropy と呼び，$T_x^{[2]}(A|B)$ と表すことにする．すなわち，

$$
T_x^{[2]}(A|B) \equiv \frac{T_x(A|B) - S(A|B)}{x} = A^{\frac{1}{2}}\frac{(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^x - I - x(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})}{x^2}A^{\frac{1}{2}}
$$

である．$T_x^{[2]}(A|B)$ の corresponding function は $\dfrac{a^x - 1 - x\log a}{x^2}$ $(a > 0)$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1 - x\log a}{x^2} = \frac{1}{2}(\log a)^2$ であることから $T_0^{[2]}(A|B) \equiv \displaystyle\lim_{x\to 0} T_x^{[2]}(A|B)$ $= \dfrac{1}{2}A^{\frac{1}{2}}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^2 A^{\frac{1}{2}}$ である．$T_0^{[2]}(A|B)$ を $S^{[2]}(A|B)$ で表し，これを 2 次 relative operator entropy と呼ぶ．次に，$T_x^{[2]}(A|B)$ の区間 $[0,x]$ での平均変化率を同様に 3 次 Tsalis relative operator entropy と呼び，$T_x^{[3]}(A|B)$ と表す．すなわち，

$$
\begin{aligned}
T_x^{[3]}(A|B) &\equiv \frac{T_x^{[2]}(A|B) - S^{[2]}(A|B)}{x}\\
&= A^{\frac{1}{2}}\frac{(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^x - I - x(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}x^2(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^2}{x^3}A^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

であり，$T_0^{[3]}(A|B) \equiv \displaystyle\lim_{x\to 0} T_x^{[3]}(A|B) = \frac{1}{3!}A^{\frac{1}{2}}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^3 A^{\frac{1}{2}}$ である．$T_0^{[3]}(A|B)$ を $S^{[3]}(A|B)$ で表し，3 次 relative operator entropy と呼ぶ．

そこで，我々は[12]において，任意の自然数nに対して$S^{[n]}(A|B), T_x^{[n]}(A|B), S_x^{[n]}(A|B)$を次で与えた．まず，$S^{[n]}(A|B)$を

$$S^{[n]}(A|B) \equiv \frac{1}{n!}A^{\frac{1}{2}}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^n A^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n!}A(A^{-1}S(A|B))^n$$

で定義する．$\dfrac{d^n}{dt^n}\ a^t = a^t(\log a)^n$であるから

(1) $$S^{[n]}(A|B) = \frac{1}{n!}\ \frac{d^n}{dt^n}\ A \natural_t B \Big|_{t=0}$$

が成立する．次に$T_x^{[n]}(A|B)$を帰納的に定義する．

$$T_x^{[1]}(A|B) \equiv T_x(A|B),$$

$$T_x^{[n]}(A|B) \equiv \frac{T_x^{[n-1]}(A|B) - S^{[n-1]}(A|B)}{x}\ (x \neq 0),\quad T_0^{[n]}(A|B) \equiv S^{[n]}(A|B)\ \ if\ n \geq 2.$$

このとき，$\lim_{x\to 0} T_x^{[n]}(A|B) = T_0^{[n]}(A|B)$が成立する．さらに，$S_x^{[n]}(A|B)$を次で定義する．

$$S_x^{[n]}(A|B) \equiv \frac{1}{n!}\ \frac{d^n}{dt^n}\ A \natural_t B \Big|_{t=x}.$$

(1) 式より，$S_0^{[n]}(A|B) = S^{[n]}(A|B)$である．$S^{[n]}(A|B)$ をn次relative operator entropy，$T_x^{[n]}(A|B)$ をn次Tsallis relative operator entropy，$S_x^{[n]}(A|B)$ をn次generalized relative operator entropy と呼ぶ．$S_x^{[n]}(A|B)$，$T_x^{[n]}(A|B)$は

$$S_x^{[n]}(A|B) = \frac{1}{n!}(A \natural_x B)(A^{-1}S(A|B))^n,$$

(2) $$T_x^{[n]}(A|B) = \frac{1}{x^n}\left(A \natural_x B - A - \sum_{k=1}^{n-1} x^k S^{[k]}(A|B)\right)(x \neq 0)$$

と表せる．

$S^{[n]}(A|B), T_x^{[n]}(A|B), S_x^{[n]}(A|B)$の間には次に示す不等式が成立している．

Theorem A. ([12]) *Let* $\alpha \in [0,1]$. *Then*

(a) $S^{[n]}(A|B) \leq T_\alpha^{[n]}(A|B) \leq S_\alpha^{[n]}(A|B) \leq (-1)^n T_{1-\alpha}^{[n]}(B|A) \leq S_1^{[n]}(A|B)$ *if* n *is odd or* $A \leq B$,

(b) $S^{[n]}(A|B) \geq T_\alpha^{[n]}(A|B) \geq S_\alpha^{[n]}(A|B) \geq T_{1-\alpha}^{[n]}(B|A) \geq S_1^{[n]}(A|B)$ *if* n *is even and* $A \geq B$.

$n=1$の場合を考えると，$0 \leq \alpha \leq 1$ に対して

(3) $$S(A|B) \leq T_\alpha(A|B) \leq S_\alpha(A|B) \leq -T_{1-\alpha}(B|A) \leq S_1(A|B)$$

が成立する [8]．[11] で，(3) の不等式の各項の差を operator valued divergence とみなし，$0 < \alpha < 1$ に対して

$$\Delta_{1,\alpha}(A|B) \equiv T_\alpha(A|B) - S(A|B), \qquad \Delta_{2,\alpha}(A|B) \equiv S_\alpha(A|B) - T_\alpha(A|B),$$
$$\Delta_{3,\alpha}(A|B) \equiv -T_{1-\alpha}(B|A) - S_\alpha(A|B), \quad \Delta_{4,\alpha}(A|B) \equiv S_1(A|B) + T_{1-\alpha}(B|A)$$

を定義した．これらと，Petz-Bregman divergence $D_{FK}(A|B) = T_1(A|B) - S(A|B)$ との間には，次の関係が成立している [11, 16]．

$$\begin{aligned}
\Delta_{1,\alpha}(A|B) &= \frac{1}{\alpha} D_{FK}(A|A \sharp_\alpha B),\\
\Delta_{2,\alpha}(A|B) &= \frac{1}{\alpha} D_{FK}(A \sharp_\alpha B|A),\\
\Delta_{3,\alpha}(A|B) &= \frac{1}{1-\alpha} D_{FK}(A \sharp_\alpha B|B),\\
\Delta_{4,\alpha}(A|B) &= \frac{1}{1-\alpha} D_{FK}(B|A \sharp_\alpha B).
\end{aligned}$$

また，$D_{FK}(A|B)$ に対する n 次operator valued divergence を $D_{FK}^{[n]}(A|B) \equiv T_1^{[n]}(A|B) - S^{[n]}(A|B)$ と定義し，上と同様なことが成立するように n 次operator valued divergence $\Delta_{1,\alpha}^{[n]}(A|B), \cdots, \Delta_{4,\alpha}^{[n]}(A|B)$ を定義することを考えた．$\Delta_{i,\alpha}(A|B)$ は

$$\begin{aligned}
\Delta_{1,\alpha}(A|B) &= T_\alpha(A|B) - S(A|B),\\
\Delta_{2,\alpha}(A|B) &= -(A \natural_\alpha B)A^{-1}(T_{-\alpha}(A|B) - S(A|B)),\\
\Delta_{3,\alpha}(A|B) &= -(B \natural_{1-\alpha} A)B^{-1}(T_{-(1-\alpha)}(B|A) - S(B|A)),\\
\Delta_{4,\alpha}(A|B) &= T_{1-\alpha}(B|A) - S(B|A)
\end{aligned}$$

のように書き直すことができる．そこで，このことを基に，$0 < \alpha < 1$ に対して次のような定義を行った [13]．

$$\begin{aligned}
\Delta_{1,\alpha}^{[n]}(A|B) &\equiv T_\alpha^{[n]}(A|B) - S^{[n]}(A|B),\\
\Delta_{2,\alpha}^{[n]}(A|B) &\equiv -(A \natural_\alpha B)A^{-1}\left(T_{-\alpha}^{[n]}(A|B) - S^{[n]}(A|B)\right),\\
\Delta_{3,\alpha}^{[n]}(A|B) &\equiv (-1)^n(B \natural_{1-\alpha} A)B^{-1}\left(T_{-(1-\alpha)}^{[n]}(B|A) - S^{[n]}(B|A)\right),\\
\Delta_{4,\alpha}^{[n]}(A|B) &\equiv (-1)^{n+1}\left(T_{1-\alpha}^{[n]}(B|A) - S^{[n]}(B|A)\right).
\end{aligned}$$

一方，Fujii [2] はoperator valued α-divergence を次のように定義した．

$$D_\alpha(A|B) \equiv \frac{A \nabla_\alpha B - A \sharp_\alpha B}{\alpha(1-\alpha)} \quad (\alpha \in (0,1)).$$

これはAmari [1] が定義した α-divergence を基にしている．ここで，$A \nabla_\alpha B \equiv (1-\alpha)A + \alpha B$ は weighted arithmetic operator mean である．$D_\alpha(A|B)$ は次のように書き

直せる [9, 10].

$$\begin{aligned} D_\alpha(A|B) &= -T_{1-\alpha}(B|A) - T_\alpha(A|B) \\ &= (A \natural_\alpha B)A^{-1}\left(T_{1-\alpha}(A|B) - T_{-\alpha}(A|B)\right). \end{aligned}$$

この最後の式を基にして，n 次 operator valued divergence $\Lambda_\alpha^{[n]}(A|B)$ を次で定義した [13].

$$\Lambda_\alpha^{[n]}(A|B) \equiv (A \natural_\alpha B)A^{-1}\left(T_{1-\alpha}^{[n]}(A|B) - T_{-\alpha}^{[n]}(A|B)\right).$$

$\Lambda_\alpha^{[1]}(A|B) = D_\alpha(A|B)$ であり，$\Lambda_\alpha^{[n]}(A|B) = \Delta_{2,\alpha}^{[n]}(A|B) + \Delta_{3,\alpha}^{[n]}(A|B)$ が成立している．

ところで，(2) 式は次のように書き換えられる．

$$A \natural_x B = A + \sum_{k=1}^{n-1} x^k S^{[k]}(A|B) + x^n T_x^{[n]}(A|B). \tag{4}$$

(1) 式より，これは $A \natural_x B$ の原点を中心とした Taylor 展開であり，$x^n T_x^{[n]}(A|B)$ はその剰余項である．そこで，$A \natural_x B$ の y を中心とした Taylor 展開

$$A \natural_x B = A \natural_y B + \sum_{k=1}^{n-1}(x-y)^k S_y^{[k]}(A|B) + R_n$$

の剰余項 R_n を用いて，[12] で $\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B)$ を次のように定義した．

Definition 1. Let $n \in \mathbb{N}$ and x, $y \in \mathbb{R}$ with $x \neq y$.

$$\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B) \equiv \frac{R_n}{(x-y)^n}.$$

この $\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B)$ を n 次 residulal reative operator entropy と呼ぶことにする．定義より，$x \neq 0$ のとき $\mathfrak{R}_{x,0}^{[n]}(A|B) = T_x^{[n]}(A|B)$ である．

Section 2 では $\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B)$ の基本的な性質を示し，以前示した n 次 operator valued divergence $\Delta_{i,\alpha}^{[n]}(A|B)$ や $\Lambda_\alpha^{[n]}(A|B)$ に関する結果が，その応用として得られることを Section 3 で示す．

2. The n-th residual relative operator entropy $\mathfrak{R}_{x,y}^{[n]}(A|B)$.

一般に，関数 $f(x)$ の y を中心とした Taylor 展開の剰余項は

$$\frac{(x-y)^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(y+t(x-y))(1-t)^{n-1}dt$$

と表せる．$f(x) = a^x$ の場合にこれを適用すると，$f^{(n)}(y+t(x-y)) = a^{y+t(x-y)}(\log a)^n$ であることより，上式を $(x-y)^n$ で割ったものは

$$\frac{a^y(\log a)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}a^{t(x-y)}dt$$

となる．そこで，これを $\Psi^{[n]}(a,x,y)$ と表すと

$$\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A|B) = A^{\frac{1}{2}}\Psi^{[n]}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}},x,y\right)A^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

である．$x=y$のときは

$$\Psi^{[n]}(a,x,x) = \frac{a^x(\log a)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}dt = \frac{1}{n!}a^x(\log a)^n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\,a^t\,\bigg|_{t=x}$$

であるから，$\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A|B)$ は $x=y$ の場合も定義され，$\mathfrak{R}^{[n]}_{x,x}(A|B) = S^{[n]}_x(A|B)$ となる．また，$x=0$ の場合も含めて $\mathfrak{R}^{[n]}_{x,0}(A|B) = T^{[n]}_x(A|B)$ であり，$\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A|B)$ と $T^{[n]}_x(A|B)$，$S^{[n]}_x(A|B)$，$S^{[n]}(A|B)$ の関係は Table 1 のようになる．

Table 1

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A|B) & \underset{y=0}{\longrightarrow} & T^{[n]}_x(A|B) \\
\downarrow_{x=y} & & \downarrow_{x=0} \\
S^{[n]}_x(A|B) & \underset{x=0}{\longrightarrow} & S^{[n]}(A|B)
\end{array}$$

まず，n 次 residual relative operator entropy $\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A|B)$ の単調性について，次のことが成立する．

Theorem 1. *Let A, $B > O$, $n \in \mathbb{N}$ and x, $y \in \mathbb{R}$. Then*

(a) $\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A|B)$ *is monotone increasing for each x and y if n is odd or $A \le B$,*

(b) $\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A|B)$ *is monotone decreasing for each x and y if n is even and $A \ge B$.*

Proof. (a) を示すには，n が奇数または $a \ge 1$ のとき，x についても y についても $\Psi^{[n]}(a,x,y)$ が単調増加であることを示せばよい．そのためには，$\frac{\partial}{\partial x}\Psi^{[n]}(a,x,y) \ge 0$, $\frac{\partial}{\partial y}\Psi^{[n]}(a,x,y) \ge 0$ を示せばよい．まず，

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi^{[n]}(a,x,y) = \frac{a^y(\log a)^{n+1}}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}ta^{t(x-y)}dt$$

であるが，$a \ge 1$ または n が奇数ならば $(\log a)^{n+1} \ge 0$ であり，$0 \le t \le 1$ のとき $(1-t)^{n-1}ta^{t(x-y)} \ge 0$ であるから

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi^{[n]}(a,x,y) \ge 0$$

である．また，

$$\frac{\partial}{\partial y}\Psi^{[n]}(a,x,y) = \frac{a^y(\log a)^{n+1}}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n}a^{t(x-y)}dt$$

であるから，同様にして

$$\frac{\partial}{\partial y}\Psi^{[n]}(a,x,y) \geq 0$$

である．

一方，$0 < a \leq 1$ かつ n が偶数ならば $(\log a)^{n+1} \leq 0$ であることから，同様にして $\frac{\partial}{\partial x}\Psi^{[n]}(a,x,y) \leq 0$, $\frac{\partial}{\partial y}\Psi^{[n]}(a,x,y) \leq 0$ であり，(b) も成立する． □

次に，$\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A|B)$ は interpolational な性質を持つことがわかる．

Theorem 2. *Let A, $B > O$, $n \in \mathbb{N}$ and r, s, x, $y \in \mathbb{R}$. Then*

$$\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A \natural_r B|A \natural_s B) = (s-r)^n \mathfrak{R}^{[n]}_{(1-x)r+xs,(1-y)r+ys}(A|B).$$

まず，次の lemma を示す．

Lemma 3. *Let A, $B > O$, $n \in \mathbb{N}$ and t, x, $y \in \mathbb{R}$. Then*

(a) $\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(B|A) = (-1)^n \mathfrak{R}^{[n]}_{1-x,1-y}(A|B)$,

(b) $\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A|A \natural_t B) = t^n \mathfrak{R}^{[n]}_{tx,ty}(A|B)$.

Proof.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(B|A) &= B^{\frac{1}{2}}\Psi^{[n]}(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}},x,y)B^{\frac{1}{2}} \\
&= B^{\frac{1}{2}}\Psi^{[n]}((B^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}})^{-1},x,y)(B^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} \\
&= B^{\frac{1}{2}}(B^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}})\Psi^{[n]}((A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}})^{-1},x,y)A^{\frac{1}{2}} \\
&= A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})\Psi^{[n]}((A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{-1},x,y)A^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

であり

$$\mathfrak{R}^{[n]}_{1-x,1-y}(A|B) = A^{\frac{1}{2}}\Psi^{[n]}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}},1-x,1-y)A^{\frac{1}{2}}$$

であるから，(a) を示すには

$$a\Psi^{[n]}(a^{-1},x,y) = (-1)^n\Psi^{[n]}(a,1-x,1-y)$$

となることを示せばよい．実際，

$$\begin{aligned}
a\Psi^{[n]}(a^{-1},x,y) &= a\frac{a^{-y}(\log a^{-1})^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}a^{-t(x-y)}dt \\
&= (-1)^n\frac{a^{1-y}(\log a)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}a^{t((1-x)-(1-y))}dt \\
&= (-1)^n\Psi^{[n]}(a,1-x,1-y)
\end{aligned}$$

である．また，

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A|A \natural_t B) &= A^{\frac{1}{2}}\Psi^{[n]}(A^{-\frac{1}{2}}(A \natural_t B)A^{-\frac{1}{2}}, x, y)A^{\frac{1}{2}} \\ &= A^{\frac{1}{2}}\Psi^{[n]}((A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^t, x, y)A^{\frac{1}{2}}, \\ \mathfrak{R}^{[n]}_{tx,ty}(A|B) &= A^{\frac{1}{2}}\Psi^{[n]}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}, tx, ty)A^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

であるから，(b) を示すには

$$\Psi^{[n]}(a^t, x, y) = t^n\Psi^{[n]}(a, tx, ty)$$

が成立することを示せばよい．実際，

$$\begin{aligned}\Psi^{[n]}(a^t, x, y) &= \frac{(a^t)^y(\log a^t)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-u)^{n-1}(a^t)^{u(x-y)}du \\ &= t^n\frac{a^{ty}(\log a)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-u)^{n-1}a^{u(tx-ty)}du \\ &= t^n\Psi^{[n]}(a, tx, ty)\end{aligned}$$

である． □

Proof of Theorem 2. $r = 0$ の場合は Lemma 3 の (b) そのものであるから $r \neq 0$ とする．この場合は

$$A \natural_s B = (A \natural_r B) \natural_{1-\frac{s}{r}} A$$

であるから，

$$\begin{aligned}&\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A \natural_r B|A \natural_s B) \\ &= \mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A \natural_r B|(A \natural_r B) \natural_{1-\frac{s}{r}} A) \\ &= \left(1-\frac{s}{r}\right)^n \mathfrak{R}^{[n]}_{(1-\frac{s}{r})x,(1-\frac{s}{r})y}(A \natural_r B|A) && \text{((b) in Lemma 3)} \\ &= \left(1-\frac{s}{r}\right)^n (-1)^n\mathfrak{R}^{[n]}_{1-(r-s)\frac{x}{r},1-(r-s)\frac{y}{r}}(A|A \natural_r B) && \text{((a) in Lemma 3)} \\ &= r^n\left(\frac{s}{r}-1\right)^n \mathfrak{R}^{[n]}_{r\left(1-(r-s)\frac{x}{r}\right),r\left(1-(r-s)\frac{y}{r}\right)}(A|B) && \text{((b) in Lemma 3)} \\ &= (s-r)^n\mathfrak{R}^{[n]}_{(1-x)r+sx,(1-y)r+sy}(A|B).\end{aligned}$$

□

Corollary 4. *Let* A, $B > O$, $n \in \mathbb{N}$ *and* r, x, $y \in \mathbb{R}$. *Then*

(a) $\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A \natural_r B|A) = (-r)^n\mathfrak{R}^{[n]}_{(1-x)r,(1-y)r}(A|B)$,

(b) $\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A \natural_r B|B) = (1-r)^n\mathfrak{R}^{[n]}_{(1-x)r+x,(1-y)r+y}(A|B)$.

Theorem 5. *Let A, $B > O$, $n \in \mathbb{N}$ and r, s, x, $y \in \mathbb{R}$. Then*

(a) $\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A|B) = O$ *if and only if* $A = B$,

(b) $\mathfrak{R}^{[n]}_{x,r}(A|B) = \mathfrak{R}^{[n]}_{x,s}(A|B)$ *if and only if* $r = s$ *or* $A = B$,

(c) $\mathfrak{R}^{[n]}_{r,y}(A|B) = \mathfrak{R}^{[n]}_{s,y}(A|B)$ *if and only if* $r = s$ *or* $A = B$.

Proof. (5) 式より，$\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A|B) = O$ が成立することと $\Psi^{[n]}(a, x, y) = 0$ が成立することは同値である．

$$\Psi^{[n]}(a, x, y) = \frac{a^y(\log a)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}a^{t(x-y)}dt$$

であり，かつ

$$\frac{a^y}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}a^{t(x-y)}dt > 0$$

であるから，$\Psi^{[n]}(a, x, y) = 0$ と $a = 1$ は同値であり (a) がいえる．また，(b) を示すには，$\Psi^{[n]}(a, x, r) = \Psi^{[n]}(a, x, s)$ であることと $r = s$ または $a = 1$ であることが同値であることを示せばよい．

$$\Psi^{[n]}(a, x, r) - \Psi^{[n]}(a, x, s) = \frac{(\log a)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}a^{tx}\left(a^{(1-t)r} - a^{(1-t)s}\right)dt$$

である．$r = s$ または $a = 1$ とすると，この式の右辺は 0 になるから，$\Psi^{[n]}(a, x, r) = \Psi^{[n]}(a, x, s)$ が成立する．

逆に，$r \neq s$ かつ $a \neq 1$ とする．まず，$r > s$ の場合を考える．$a > 1$ ならば $\log a > 0$，$(1-t)^{n-1}a^{tx}(a^{(1-t)r} - a^{(1-t)s}) > 0$ $(0 \leq t < 1)$ であるから，

$$\frac{(\log a)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}a^{tx}(a^{(1-t)r} - a^{(1-t)s})dt > 0$$

となり，

$$\Psi^{[n]}(a, x, r) > \Psi^{[n]}(a, x, s)$$

である．また，$0 < a < 1$ ならば $\log a < 0$，$(1-t)^{n-1}a^{tx}(a^{(1-t)r} - a^{(1-t)s}) < 0$ $(0 \leq t < 1)$ であるから，

$$\frac{(\log a)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}a^{tx}\left(a^{(1-t)r} - a^{(1-t)s}\right)dt \begin{cases} > 0 & \textit{if } n \textit{ is odd}, \\ < 0 & \textit{if } n \textit{ is even} \end{cases}$$

となる．したがって

$$\Psi^{[n]}(a, x, r)\begin{cases} > \Psi^{[n]}(a, x, s) & \textit{if } n \textit{ is odd}, \\ < \Psi^{[n]}(a, x, s) & \textit{if } n \textit{ is even} \end{cases}$$

がいえる．

同様にして，$r<s$の場合は，$a>1$のとき

$$\Psi^{[n]}(a,x,r)<\Psi^{[n]}(a,x,s)$$

であり，$0<a<1$ のとき

$$\Psi^{[n]}(a,x,r)\begin{cases} <\Psi^{[n]}(a,x,s) & \textit{if } n \textit{ is odd},\\ >\Psi^{[n]}(a,x,s) & \textit{if } n \textit{ is even}\end{cases}$$

である．以上のことから，$r\neq s$かつ$a\neq 1$ならば，$\Psi^{[n]}(a,x,r)\neq\Psi^{[n]}(a,x,s)$である．

また，

$$\Psi^{[n]}(a,r,y)-\Psi^{[n]}(a,s,y)=\frac{(\log a)^n}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}a^{(1-t)y}\left(a^{tr}-a^{ts}\right)dt$$

であるから，(c) も同様にして示すことができる． □

non-commutative ratio $(A\natural_r B)A^{-1}$ を $\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A|B)$ に左からかけると x も y も r だけ移動する．

Theorem 6. *Let A, $B>O$, $n\in\mathbb{N}$ and r, x, $y\in\mathbb{R}$. Then*

$$(A\natural_r B)A^{-1}\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A|B)=\mathfrak{R}^{[n]}_{x+r,y+r}(A|B).$$

Proof.

$$\begin{aligned}(A\natural_r B)A^{-1}\mathfrak{R}^{[n]}_{x,y}(A|B)&=A^{\frac12}(A^{-\frac12}BA^{-\frac12})^rA^{\frac12}A^{-1}A^{\frac12}\Psi^{[n]}(A^{-\frac12}BA^{-\frac12},x,y)A^{\frac12}\\&=A^{\frac12}(A^{-\frac12}BA^{-\frac12})^r\Psi^{[n]}(A^{-\frac12}BA^{-\frac12},x,y)A^{\frac12},\\ \mathfrak{R}^{[n]}_{x+r,y+r}(A|B)&=A^{\frac12}\Psi^{[n]}(A^{-\frac12}BA^{-\frac12},x+r,y+r)A^{\frac12}\end{aligned}$$

であるから，

$$a^r\Psi^{[n]}(a,x,y)=\Psi^{[n]}(a,x+r,y+r)$$

となることを示せばよい．実際，

$$\begin{aligned}a^r\Psi^{[n]}(a,x,y)&=a^r\frac{a^y(\log a)^n}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}a^{t(x-y)}dt\\&=\frac{a^{y+r}(\log a)^n}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}a^{t((x+r)-(y+r))}dt\\&=\Psi^{[n]}(a,x+r,y+r)\end{aligned}$$

である． □

Corollary 7. *Let A, $B>O$, $n\in\mathbb{N}$ and r, $x\in\mathbb{R}$. Then*

(a) $(A\natural_r B)A^{-1}T^{[n]}_{x-r}(A|B)=\mathfrak{R}^{[n]}_{x,r}(A|B)$,

(b) $(A\natural_r B)A^{-1}S^{[n]}_{x-r}(A|B)=\mathfrak{R}^{[n]}_{x,x}(A|B)=S^{[n]}_{x}(A|B)$.

3. Some applications to the n-th operator valued divergences

この section では，Section 2 で得られた結果を用いて，n 次 relative operator entropy と n 次 operator valued divergence に関して既に知られている性質を示すことにする．

まず，Theorem 1 より特に次のことがいえる．

Proposition 8. *Let A, $B > O$, $n \in \mathbb{N}$ and assume $0 \leq \alpha \leq 1$. Then*

(a) $\mathfrak{R}^{[n]}_{0,0}(A|B) \leq \mathfrak{R}^{[n]}_{\alpha,0}(A|B) \leq \mathfrak{R}^{[n]}_{\alpha,\alpha}(A|B) \leq \mathfrak{R}^{[n]}_{\alpha,1}(A|B) \leq \mathfrak{R}^{[n]}_{1,1}(A|B)$ *if n is odd or $A \leq B$,*

(b) $\mathfrak{R}^{[n]}_{0,0}(A|B) \geq \mathfrak{R}^{[n]}_{\alpha,0}(A|B) \geq \mathfrak{R}^{[n]}_{\alpha,\alpha}(A|B) \geq \mathfrak{R}^{[n]}_{\alpha,1}(A|B) \geq \mathfrak{R}^{[n]}_{1,1}(A|B)$ *if n is even and $A \geq B$.*

ここで，Table 1 の関係から $\mathfrak{R}^{[n]}_{0,0}(A|B) = S^{[n]}(A|B)$, $\mathfrak{R}^{[n]}_{\alpha,0}(A|B) = T^{[n]}_{\alpha}(A|B)$, $\mathfrak{R}^{[n]}_{\alpha,\alpha}(A|B) = S^{[n]}_{\alpha}(A|B)$，$\mathfrak{R}^{[n]}_{1,1}(A|B) = S^{[n]}_{1}(A|B)$ であり，一方，Theorem 2 より，$\mathfrak{R}^{[n]}_{\alpha,1}(A|B) = (-1)^n\mathfrak{R}^{[n]}_{1-\alpha,0}(B|A) = (-1)^n T^{[n]}_{1-\alpha,0}(B|A)$ となることから，Proposition 8 は Theorem A と同じである．

次に，n 次 Petz-Bregman divergence は $D^{[n]}_{FK}(A|B) = \mathfrak{R}^{[n]}_{1,0}(A|B) - \mathfrak{R}^{[n]}_{0,0}(A|B)$ と書き換えられる．したがって，Theorem 1 と Theorem 5 の (c) より次の命題が得られる．

Proposition 9. ([12]) *Let A, $B > O$ and $n \in \mathbb{N}$. Then*

(a) $D^{[n]}_{FK}(A|B) \begin{cases} \geq O, & \textit{if } n \textit{ is odd or } A \leq B, \\ \leq O, & \textit{if } n \textit{ is even and } A \geq B. \end{cases}$

(b) $D^{[n]}_{FK}(A|B) = O$ *if and only if* $A = B$.

また，$D^{[n]}_{FK}(A|B)$ と $\Delta^{[n]}_{i,\alpha}(A|B)$ との間には次のことが成立することがわかる．

Proposition 10. ([13]) *Let A, $B > O$, $n \in \mathbb{N}$ and assume $0 < \alpha < 1$. Then*

(a) $\Delta^{[n]}_{1,\alpha}(A|B) = \dfrac{1}{\alpha^n} D^{[n]}_{FK}(A|A \natural_\alpha B)$,

(b) $\Delta^{[n]}_{2,\alpha}(A|B) = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{\alpha^n} D^{[n]}_{FK}(A \natural_\alpha B|A)$,

(c) $\Delta^{[n]}_{3,\alpha}(A|B) = \dfrac{1}{(1-\alpha)^n} D^{[n]}_{FK}(A \natural_\alpha B|B)$,

(d) $\Delta^{[n]}_{4,\alpha}(A|B) = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{(1-\alpha)^n} D^{[n]}_{FK}(B|A \natural_\alpha B)$.

Proof.

$$\begin{aligned} D^{[n]}_{FK}(A|A \natural_\alpha B) &= \mathfrak{R}^{[n]}_{1,0}(A|A \natural_\alpha B) - \mathfrak{R}^{[n]}_{0,0}(A|A \natural_\alpha B) \\ &= \alpha^n \mathfrak{R}^{[n]}_{\alpha,0}(A|B) - \alpha^n \mathfrak{R}^{[n]}_{0,0}(A|B) && \text{((b) in Lemma 3)} \\ &= \alpha^n (T^{[n]}_{\alpha}(A|B) - S^{[n]}(A|B)) = \alpha^n \Delta^{[n]}_{1,\alpha}(A|B) \end{aligned}$$

であり，$\alpha \neq 0$ であるので，(a) を得る．次に

$D_{FK}^{[n]}(A \natural_\alpha B|A) = \mathfrak{R}_{1,0}^{[n]}(A \natural_\alpha B|A) - \mathfrak{R}_{0,0}^{[n]}(A \natural_\alpha B|A)$

$= (-\alpha)^n \mathfrak{R}_{0,\alpha}^{[n]}(A|B) - (-\alpha)^n \mathfrak{R}_{\alpha,\alpha}^{[n]}(A|B)$ ((a) in Corollary 4)

$= (-\alpha)^n ((A \natural_\alpha B)A^{-1}T_{-\alpha}^{[n]}(A|B) - (A \natural_\alpha B)A^{-1}S^{[n]}(A|B))$ (Corollary 7)

$= (-1)^{n+1}\alpha^n \Delta_{2,\alpha}^{[n]}(A|B)$

であり，$\alpha \neq 0$ であるので，(b) が得られる．次に

$D_{FK}^{[n]}(A \natural_\alpha B|B) = \mathfrak{R}_{1,0}^{[n]}(A \natural_\alpha B|B) - \mathfrak{R}_{0,0}^{[n]}(A \natural_\alpha B|B)$

$= (1-\alpha)^n \mathfrak{R}_{1,\alpha}^{[n]}(A|B) - (1-\alpha)^n \mathfrak{R}_{\alpha,\alpha}^{[n]}(A|B)$ ((b) in Corollary 4)

$= (\alpha-1)^n \mathfrak{R}_{0,1-\alpha}^{[n]}(B|A) - (\alpha-1)^n \mathfrak{R}_{1-\alpha,1-\alpha}^{[n]}(B|A)$ ((a) in Lemma 3)

$= (\alpha-1)^n ((B \natural_{1-\alpha} A)B^{-1}T_{-(1-\alpha)}^{[n]}(B|A) - (B \natural_{1-\alpha} A)B^{-1}S^{[n]}(B|A))$ (Corollary 7)

$= (1-\alpha)^n \Delta_{3,\alpha}^{[n]}(A|B)$

であるので，$\alpha \neq 1$ より (c) を得る．最後に

$D_{FK}^{[n]}(B|A \natural_\alpha B) = \mathfrak{R}_{1,0}^{[n]}(B|A \natural_\alpha B) - \mathfrak{R}_{0,0}^{[n]}(B|A \natural_\alpha B)$

$= \mathfrak{R}_{1,0}^{[n]}(B|B \natural_{1-\alpha} A) - \mathfrak{R}_{0,0}^{[n]}(B|B \natural_{1-\alpha} A)$

$= (1-\alpha)^n \mathfrak{R}_{1-\alpha,0}^{[n]}(B|A) - (1-\alpha)^n \mathfrak{R}_{0,0}^{[n]}(B|A)$ ((b) in Lemma 3)

$= (1-\alpha)^n (T_{1-\alpha}^{[n]}(B|A) - S^{[n]}(B|A)) = (1-\alpha)^n (-1)^{n+1} \Delta_{4,\alpha}^{[n]}(A|B)$

であり，$\alpha \neq 1$ であるから (d) を得る． □

このことから，$\Delta_{i,\alpha}^{[n]}(A|B)$ $(i = 1,2,3,4)$ も $D_{FK}^{[n]}(A|B)$ と同様の性質を持つことがわかる．

Proposition 11. ([13]) *Let* A, $B > O$, $n \in \mathbb{N}$ *and assume* $0 < \alpha < 1$. *Then*

(a) $\Delta_{i,\alpha}^{[n]}(A|B) \begin{cases} \geq O & \textit{if } n \textit{ is odd or } A \leq B, \\ \leq O & \textit{if } n \textit{ is even and } A \geq B \end{cases}$ *for* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$

(b) $\Delta_{i,\alpha}^{[n]}(A|B) = O$ *if and only if* $A = B$ *for* $i = 1$, 2, 3, 4.

Proof. $A \leq B$ ならば $A \leq A \natural_\alpha B$，$A \geq B$ ならば $A \geq A \natural_\alpha B$ であり，また，$A = B$ と $A = A \natural_\alpha B$ は同値であるから，Proposition 9 より $i = 1$ のときの主張 (a) と (b) および $i = 2$ のときの主張 (b) は成立する．また，n が奇数ならば $D_{FK}^{[n]}(A \natural_\alpha B|A) \geq O$, n が偶数ならば $A \leq B$ のとき $D_{FK}^{[n]}(A \natural_\alpha B|A) \leq O$，$A \geq B$ のとき $D_{FK}^{[n]}(A \natural_\alpha B|A) \geq O$ であるから，Proposition 10 の (b) より $i = 2$ のときの主張 (a) も成立する．

また，$A \natural_\alpha B = B \natural_{1-\alpha} A$ だから，$i = 1$, 2 の場合と同様にして $i = 3$, 4 の場合も主張 (a) および (b) が成立する． □

Remark. $\Delta_{i,\alpha}^{[n]}(A|B)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ は $\alpha \in \mathbb{R}$ に拡張して定義でき，$i = 1, 2$ のときは $\alpha > 0$ で (a) が，$\alpha \neq 0$ で (b) がいえる．また，$i = 3, 4$ のときは $\alpha < 1$ で (a) が，$\alpha \neq 1$ で (b) がいえる．

最後に，Corollary 7 の (a) より

$$\Lambda_\alpha^{[n]}(A|B) = (A \natural_\alpha B)A^{-1}\left(T_{1-\alpha}^{[n]}(A|B) - T_{-\alpha}^{[n]}(A|B)\right) = \mathfrak{R}_{1,\alpha}^{[n]}(A|B) - \mathfrak{R}_{0,\alpha}^{[n]}(A|B)$$

と書き換えられるので，Theorem 1 と Theorem 5 の (c) から $\Lambda_\alpha^{[n]}(A|B)$ も $D_{FK}^{[n]}(A|B)$ と同様の性質を持つことがわかる．

Proposition 12. ([13]) *Let A, $B > O$, $n \in \mathbb{N}$. Then*

(a) $\Lambda_\alpha^{[n]}(A|B) \begin{cases} \geq O & \text{if } n \text{ is odd or } A \leq B, \\ \leq O & \text{if } n \text{ is even and } A \geq B. \end{cases}$

(b) $\Lambda_\alpha^{[n]}(A|B) = O$ *if and only if* $A = B$.

参考文献

[1] S. Amari, Differential Geometrical Methods in Statistics, Springer Lecture Notes in Statistics, **28**(1985).

[2] J. I. Fujii, On the relative operator entropy, RIMS Kôkyûroku, **903**(1995), 49–56.

[3] J. I. Fujii and E. Kamei, Relative operator entropy in noncommutative information theory, Math. Japon., **34**(1989), 341–348.

[4] J. I. Fujii and E. Kamei, Interpolational paths and their derivatives, Math. Japon., **39**(1994), 557–560.

[5] J. I. Fujii and E. Kamei, Path of Bregman-Petz operator divergence, Sci. Math. Jpn., **70**(2009), 329–333.

[6] J. I. Fujii, Interpolationality for symmetric operator means, Sci. Math. Jpn., **75**(2012), 267–274.

[7] T. Furuta, Parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbert space operators, Linear Algebra Appl., **381**(2004), 219–235.

[8] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Relative operator entropy, operator divergence and Shannon inequality, Sci. Math. Jpn., **75**(2012), 289–298.

[9] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, On relations between operator valued α-divergence and relative operator entropies, Sci. Math. Jpn., **78**(2015), 215–228. (online: e-2015 (2015), 215–228.)

[10] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Expanded relative operator entropies and operator valued α-divergence, J. Math. Syst. Sci., **5**(2015), 215–224. https://doi.org/10.17265/2159-5291/2015.06.001

[11] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Some operator divergences based on Petz-Bregman divergence, Sci. Math. Jpn., **80**(2017), 161–170.

[12] H. Isa, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, The n-th relative operator entropies and operator divergences, Ann. Funct. Anal. (2020). https://doi.org/10.1007/s43034-019-00004-5

[13] 伊佐浩史, 亀井栄三郎, 遠山宏明, 渡邉雅之, The n-th operator valued divergences, 日本数学会 2019 年度秋季総合分科会.

[14] E. Kamei, Paths of operators parametrized by operator means, Math. Japon., **39**(1994), 395–400.

[15] F. Kubo and T. Ando, Means of positive linear operators, Math Ann., **246**(1980), 205–224.

[16] D. Petz, Bregman divergence as relative operator entropy, Acta Math. Hungar., **116**(2007), 127–131.

[17] K. Yanagi, K. Kuriyama and S. Furuichi, Generalized Shannon inequalities based on Tsallis relative operator entropy, Linear Algebra Appl., **394**(2005), 109–118.