多重ゼータ関数の関数関係式について

池田創一 (芝浦工業大学)、松岡謙晶 (名古屋大学)

1. 序文

$k \in \mathbb{N}$, $s, s_1, \dots, s_k \in \mathbb{C}$ とする。k 重の Euler-Zagier 型多重ゼータ関数を以下のように定義する。

$$\zeta_k(s_1, \dots, s_k) = \sum_{0<n_1<n_2<\cdots<n_k} \frac{1}{n_1^{s_1}} \frac{1}{n_2^{s_2}} \cdots \frac{1}{n_k^{s_k}}$$

$s_1, \dots, s_k$ が正の整数のときの値を多重ゼータ値と呼び、様々な関係式が知られている。例えば、

$$\zeta_2(1,2) - \zeta(3) = 0 \tag{1}$$

$$\zeta(2)\zeta(3) = \zeta_2(2,3) + \zeta_2(3,2) + \zeta(5) \tag{2}$$

などの関係式が知られている。

(2) は多重ゼータ値の関係式であるが、実は、以下の関数関係式が成り立つことが知られている。

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2) = \zeta_2(s_1, s_2) + \zeta_2(s_2, s_1) + \zeta(s_1 + s_2) \tag{3}$$

(3) は任意の複素数（正確に言うと特異点をのぞいた領域）で成り立つので、(2) は (3) の特別な場合と言える。

上記のように、関数関係式 (3) は多重ゼータ値の関係式 (2) を補間した式と捉えることが出来るが、多重ゼータ値の関係式 (1) を補間した関数関係式は存在するのであろうか？例えば、次の（実際には成り立たない）関数関係式を考えてみる。

$$\zeta_2(s, 2s) - \zeta(3s) = 0 \tag{4}$$

(4) は $s = 1$ のとき (1) になるので、もし (4) が成り立てば、(4) が多重ゼータ値の関係式 (1) を補間した関数関係式と言える。しかし、残念ながら、(4) は成り立たない。なぜならば、(4) の左辺が $s = 1/2$ において 1 位の極を持つからである。このように、(4) が成り立たないことは簡単に分かるが、同じ要領で (1) を補間するような関数関係式の候補はいくらでも作ることが出来る。例えば、

$$\zeta_2(s_1, s_2) - \zeta(s_3) = 0$$

$$\frac{1}{\zeta(3)}\zeta_2(s, 2s) - \frac{1}{\zeta(5)}\zeta(5s) = 0$$

などが候補として考えられる。実際、$s_1 = 1, s_2 = 2, s_3 = 3, s = 1$ の場合は成り立つので、関数関係式としても成立して欲しいと期待するが、残念ながら、関数関係式の意味では成り立たないことが簡単に分かってしまう。このように、「特殊値で成り立つような関数関係式の候補は作れても、関数関係式の意味で成り立つ式を作るのは簡単なことではない」と考察できる。

さて、別の角度から (1) を補間する関数関係式を考えてみよう[1]。多重ゼータ値の関係式 (1) の証明はいくつもあるが、反復積分表示と呼ばれる表示を使って比較的簡単に証明が出来る。したがって、「この証明方法を一般化することで (1) を補間する関数関係式が作れるかもしれない」と期待できる。しかし、これを実現させるには大きな障害がある。$\zeta_2(1,2)$ を反復積分表示すると

$$\zeta_2(1,2) = \int_0^1 \frac{dt_1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{dt_2}{1-t_2} \int_0^{t_2} \frac{dt_3}{1-t_3}$$

となるが、この表示を複素変数の場合に拡張しようと試みると、「複素数」回の積分を定義する必要がある。もしかしたら、「複素数」回の積分というものが上手に定義されて、関数関係式を得ることが出来るかもしれないが、かなり難しそうな印象がある。

上記の考察をまとめると、「多重ゼータ値の関係式 (2) を補間した関数関係式は存在するが、多重ゼータ値の関係式 (1) を補間した関数関係式を探すのは非常に難しい。そもそも、(1) を補間した関数関係式は存在しないのかもしれない。」と言えそうである。

2. 多重ゼータ関数の関数関係式の先行研究

「序文」で述べた問題、すなわち、「多重ゼータ値の関係式を補間する関数関係式が存在するのか？」という問題は、松本氏が初めて考えたと思われる。松本氏の論説 [2, p. 173] を引用すると

「解析的な立場から見たときに自然に浮かぶひとつの疑問は、それらの関係式が整数点においてだけ成立しているものであるのか、それとも複素関数としての $\zeta_{EZ,r}$ たちの間に成り立っている関係式を整数点のところで 見ているに過ぎないのか、どちらであろう、ということである。筆者はこの疑問について 2000 年頃から、しばしば研究集会の場などで発言してきた」

と書いてある（ここで、$\zeta_{EZ,r}$ は Euler-Zagier 型の r 重ゼータ関数のことである）。このような問題提起が「2000 年頃」以前にあったのかは分からないが、この文章では、「多重ゼータ関数の関数関係式について松本氏が初めて問題提起した」として、次ページの問題を「松本の問題」と呼ぶことにする。

[1]松本氏の論説 [2] を参考にした。

松本の問題

多重ゼータ関数の関係式は、正の整数点だけで成り立つのか、関数関係式として成り立つのか？

この問題に関して、調和積公式がひとつの肯定的な解答と言える。調和積公式とは (3) のように多重ゼータ関数の積を多重ゼータ関数の線形和で表す公式であり、全ての多重ゼータ関数の積は多重ゼータ関数の線形和で表すことが出来る。例えば、次の式も調和積公式である。

$$\begin{aligned}\zeta(s_1)\zeta_2(s_2,s_3) &= \zeta_3(s_1,s_2,s_3)+\zeta_2(s_1+s_2,s_3)+\zeta_3(s_2,s_1,s_3)\\ &\quad +\zeta_2(s_2,s_1+s_3)+\zeta_3(s_2,s_3,s_1)\end{aligned}$$

さて、調和積公式が「松本の問題」の肯定的な解答と言えるが、次の問題として調和積公式以外に関数関係式は存在するのか？という問題が考えられる。このことに関しては、津村氏が肯定的な解答を初めて与えたとされる。津村氏の式は以下の式である。

$$\begin{aligned}&\zeta_{\mathfrak{sl}(3)}(k,l,s)+(-1)^l\zeta_{\mathfrak{sl}(3)}(s,l,k)+(-1)^k\zeta_{\mathfrak{sl}(3)}(s,k,l)\\
&=2\sum_{\substack{j=0\\ j\equiv k \pmod 2}}^{k}(2^{1-k+j}-1)\zeta(k-j)\\
&\quad\times\sum_{\mu=0}^{[j/2]}\frac{(i\pi)^{2\mu}}{(2\mu)!}\binom{l+j-2\mu-1}{j-2\mu}\zeta(s+l+j-2\mu)\\
&-4\sum_{\substack{j=0\\ j\equiv k \pmod 2}}^{k}(2^{1-k+j}-1)\zeta(k-j)\sum_{\mu=0}^{[(j-1)/2]}\frac{(i\pi)^{2\mu}}{(2\mu+1)!}\sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\equiv l \pmod 2}}^{l}\zeta(l-\nu)\\
&\quad\times\binom{\nu+j-2\mu-1}{j-2\mu-1}\zeta(s+\nu+j-2\mu)\end{aligned}$$

ここで、k,l は正の整数、ζ はリーマンゼータ関数、$\zeta_{\mathfrak{sl}(3)}$ は変数が３つの多重和である（詳しい定義は [3] および [4] を参照)。上記の式は任意の複素数 s で成り立つ式であるから、この式は松本の問題の１つの肯定的な結果と言える。津村氏の手法を用いることで、上記のような関数関係式が示されていて（例えば [3])、「多重ゼータ関数」を Euler-Zagier 型に限定しなければ、関数関係式として成り立つ式が存在すると言える。

3. 松本の問題の定式化の必要性

m, n を正の整数とする。まず

$$\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n}\right)\frac{1}{m^2}=\frac{1}{n(m+n)^2}+\frac{1}{m(m+n)^2} \tag{5}$$

が成り立つことが分かるので、両辺に n^{-s} をかけて m, n の和をとると、

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n}\right)\frac{1}{n^s m^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{s+1}(m+n)^2}+\frac{1}{n^s m(m+n)^2}\right) \tag{6}$$

となる。これを変形して

$$\frac{\pi^2}{6}\zeta(s+1)-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s(m+n)}\frac{1}{m^2}=\zeta_2(s+1,2)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s m(m+n)^2} \tag{7}$$

となる。(7) の二重和の部分を「多重ゼータ関数」と定義すれば、(7) は「多重ゼータ関数」の関数関係式と言える。(7) が成り立つことを認めれば、(7) から (6) に変形して、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n}\right)\frac{1}{m^2}=\frac{1}{m^3}+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{jm^2}$$

に注意すると (6) において $s=0$ とすれば、

$$\zeta(3)+\zeta_2(1,2)=2\zeta_2(1,2)$$

となるので (1) を得る。したがって、「多重ゼータ関数」の関数関係式 (7) は (1) を補間していると言える。

このように、全ての多重和を「多重ゼータ関数」と呼ぶことにすれば、多重ゼータ値の関係式を補間するような関数関係式を作ることはそれほど難しい問題ではない。したがって、松本の問題を考える際にどのような関数を「多重ゼータ関数」と定義するのかが非常に重要である。また、

$$\zeta(s)\zeta_2(1,2)=\zeta(s)\zeta(3) \tag{8}$$

は全ての s で成り立つので (8) は「(1) を補間している関数関係式」と認めることにすると、もはや何がなんだか分からなくなってくる。仮に (8) を自明な式として関数関係式と認めないと決めても、(8) を調和積公式で線形和に直した式が自明な式なのか？という問題に直面する。さらに、(8) の両辺に $\zeta_2(s,s)$ や $\zeta(2)$ などをかけた関数関係式を考えれば、問題は複雑化して収拾がつかない。

つまり、「松本の問題が何を問題としているのか？」は感覚的に分かるのだが、適切に問題の定式化を行わないと問題としての意味をなさないということである。

4. 松本の問題の定式化

松本の問題を Euler-Zagier 型に限定し、問題の定式化を試みる。

Definition 1. $n \in \mathbb{N}$ とする。

$$T_n = \{a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n | a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_1 + \cdots + a_n > 0\}$$

と定義する。

Definition 2. $n \in \mathbb{N}$ とする。

$$U_n = \{\zeta_d(t_1, \ldots, t_d) | d \in \mathbb{N}, t_1, \ldots, t_d \in T_n\}$$

として

$$\mathscr{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$$

とする。

特に、U_1 のみを扱うときは、U_1 の複素変数を s_1 ではなく、s と書くことにする。つまり、

$$U_1 = \{\zeta_d(a_1 s, \ldots, a_d s) | d \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{N}\}$$

と書く。

$\mathscr{U}$ の元が満たす関数関係式を考える。

例 1:

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2) - \zeta_2(s_1, s_2) - \zeta_2(s_2, s_1) - \zeta(s_1 + s_2) = 0 \tag{9}$$

が成り立つことを確かめよう。調和積により $\zeta(s_1)\zeta(s_2)$ の部分を線形和に直すと、(9) は

$$(\zeta_2(s_1, s_2) + \zeta_2(s_2, s_1) + \zeta(s_1 + s_2)) - \zeta_2(s_1, s_2) - \zeta_2(s_2, s_1) - \zeta(s_1 + s_2) = 0$$

となる。これを整理すると

$$(1-1)\zeta_2(s_1, s_2) + (1-1)\zeta_2(s_2, s_1) + (1-1)\zeta(s_1 + s_2) = 0$$

つまり

$$0 = 0$$

となる。

例 2:

(10)

$$\begin{aligned} &\zeta(s_1)^2\zeta(s_2) - 2\zeta(s_1 + s_2)\zeta(s_1) - 2\zeta_3(s_2, s_1, s_1) - 2\zeta_3(s_1, s_2, s_1) \\ &\quad - 2\zeta_3(s_1, s_1, s_2) - \zeta_2(s_2, 2s_1) + \zeta(2s_1 + s_2) - \zeta_2(2s_1, s_2) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つことを確かめよう。調和積により $\zeta(s_1)\zeta(s_1)\zeta(s_2)$ の部分と $\zeta(s_1+s_2)\zeta(s_1)$ を線形和に直すと、

$$\begin{aligned}(2-2)&(\zeta_3(s_2,s_1,s_1)+\zeta_3(s_1,s_2,s_1)+\zeta_3(s_1,s_1,s_2))+\\ &+(2-2)(\zeta_2(s_1+s_2,s_1)+\zeta_2(s_1,s_1+s_2))+\\ &+(1-1)(\zeta_2(s_2,2s_1)+\zeta_2(2s_1,s_2))+(1+1-2)\zeta(2s_1+s_2)=0\end{aligned}$$

つまり

$$0=0$$

となる。

例で見たように、調和積を使うことで $\mathscr{U}$ の元の積は $\mathscr{U}$ の元の線形和に書き直すことが出来る。上の 2 つの例では、$\mathscr{U}$ の元の関数関係式 (9)、(10) を調和積を使って変形していくと、$0=0$ という自明な式になってしまった。ここで、例 1 および例 2 の式変形において、$0=0$ という式に変形してきた過程を逆にたどることで、$0=0$ という式から関数関係式 (9)、(10) を得ることが出来ることに注意する。つまり、$0=0$ という式に調和積を使うことで関数関係式 (9)、(10) が得られたということになる。

さて、全ての $\mathscr{U}$ の元の関数関係式は、$0=0$ という式に調和積を使うことで得られるのか？という問題を考えてみる。この問題の定式化が次の「松本の問題の定式化」である。

松本の問題の定式化

主張 (P) は正しいか間違っているか判定しなさい。
(P): $Q(X_1,\dots,X_n)\in\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$, $z_1,\dots,z_n\in\mathscr{U}$ とする。

$$Q(z_1,\dots,z_n)=0 \tag{11}$$

という式は、全て、自明な関係式 $0=0$ と調和積により得ることが出来る。

問題の意味は、多重ゼータ値の関係式を補間する関数関係式 (11) が与えられたときに、関数関係式 (11) は果たして本質的には調和積に限定されるのか？ということである。関数関係式 (11) は複素係数の多変数多項式の形で書けていればよいので、考察している対象はそれなりに広いと言えると思う。しかし、例えば $\zeta_2(s_1+1,s_2)$ は $\mathscr{U}$ の元ではないので、このような項を含む式は考えていない。前節で、どのような関数を「多重ゼータ関数」とするのかを決める必要があると述べたが、$\mathscr{U}$ の元を「多重ゼータ関数」として松本の問題を定式化したと言うことが出来ると思う。

5. 主定理

主張 (P) が正しいことは次の主定理から導かれる。

Theorem 1. ベクトルの集合 $\{1\} \cup U_1$ は（複素関数として）$\mathbb{C}$ 上１次独立である。

Theorem 1 が正しいならば (P) が正しいことを示すために、次の定義を行う。

Definition 3. $d \in \mathbb{N}$ とする。$z = \zeta_d(t_1, \ldots, t_d) \in \mathscr{U}$ とする。

$$\mathrm{argument}(z) = (t_1, \ldots, t_d)$$

と定義する。

Remark 1. $z_1, z_2 \in \mathscr{U}$ とする。

$$\mathrm{argument}(z_1) = \mathrm{argument}(z_2)$$

ならば明らかに $z_1 = z_2$ であるが、逆が成り立つかは、現時点では自明なことではない。

Definition 4. $n \in \mathbb{N}$ とする。$t \in T_n$ とする。$t = a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n$ であるとき、$H(t) = \max_{1 \le i \le n}\{a_i\}$ で定義する。$z \in \mathscr{U}$ とする。$z = \zeta_d(t_1, \ldots, t_d)$ であるとき、$\mathrm{height}(z) = \max_{1 \le i \le d}\{H(t_i)\}$ と定義する。

$\{1\} \cup \mathscr{U}$ が１次独立ならば (P) は正しいこと、および、$\{1\} \cup U_1$ が１次独立ならば $\{1\} \cup \mathscr{U}$ が１次独立であることを示す。

$\{1\} \cup \mathscr{U}$ が１次独立ならば (P) は正しいことを示す。$Q(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, $Z_1, \ldots, Z_n \in \mathscr{U}$ とする。例１、例２と同様に、$Q(Z_1, \ldots, Z_n) = 0$ を調和積を使って変形すると

$$c_0 + c_1 F_1 + \cdots + c_\lambda F_\lambda = 0$$

と変形することが出来る。ここで、$c_0, c_1, \ldots, c_\lambda \in \mathbb{C}$ であり、$F_1, \ldots, F_\lambda \in \mathscr{U}$ である。ただし、$i \neq j$ に対して $\mathrm{argument}(F_i) \neq \mathrm{argument}(F_j)$ とする。例１、例２と同様に、$c_0 + c_1 F_1 + \cdots + c_\lambda F_\lambda = 0$ から調和積を使って式変形を逆にたどることにより、 $Q(Z_1, \ldots, Z_n) = 0$ を得ることが出来る。つまり

$$Q(Z_1, \ldots, Z_n) = 0 \Leftrightarrow c_0 + c_1 F_1 + \cdots + c_\lambda F_\lambda = 0$$

である。ベクトルの集合 $\{1, F_1, \ldots, F_\lambda\}$ が１次独立ならば、式 $c_0 + c_1 F_1 + \cdots + c_\lambda F_\lambda = 0$ は $0 = 0$ という自明な式になる。よって、ベクトルの集合 $\{1, F_1, \ldots, F_\lambda\}$ が１次独立ならば、(P) は正しいことが分かる。したがって、$\{1\} \cup \mathscr{U}$ が１次独立ならば (P) は正しいことが分かる。

次に、$\{1\} \cup U_1$ が１次独立ならば $\{1\} \cup \mathscr{U}$ が１次独立であることを示す。$z_1, \ldots, z_n \in \mathscr{U}$ とする。ただし、$i \neq j$ ならば $\mathrm{argument}(z_i) \neq \mathrm{argument}(z_j)$ とする。 $z_1, \ldots, z_n \in U_m$ となるように m をとる。

$$g = \max\{\mathrm{height}(z_i) | 1 \le i \le n\} + 1$$

とする。各 $z_i (1 \leq i \leq n)$ を $s_1, s_2, \ldots, s_m$ に依存する関数とみて、$z_i = z_i(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ と書くことにする。$f_1(s) = z_1(gs, \ldots, g^m s), \ldots, f_n(s) = z_n(gs, \ldots, g^m s)$ とすれば、 $f_1(s), \ldots, f_n(s) \in U_1$ であり、$i \neq j$ ならば $\mathrm{argument}(f_i(s)) \neq \mathrm{argument}(f_j(s))$ であることが分かる。このことは、正の整数の g 進数展開を考えれば分かる。例えば、$t_1, t_2 \in T_m$ として、$t_1 = a_1 s_1 + \cdots + a_m s_m, t_2 = b_1 s_1 + \cdots + b_m s_m$ とする。また、t_1, t_2 を $s_1, s_2, \ldots, s_m$ に依存する関数とみて、$t_1(s_1, s_2, \ldots, s_m), t_2(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ と書く。

$$g = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m\} + 1$$

として、各 i に対して、$s_i = g^i s$ とすれば、

$$t_1(gs, g^2 s, \ldots, g^m s) = (a_1 g + a_2 g^2 \cdots + a_m g^m) s$$

$$t_2(gs, g^2 s, \ldots, g^m s) = (b_1 g + b_2 g^2 \cdots + b_m g^m) s$$

となる。g 進数展開の一意性から $a_1 g + a_2 g^2 \cdots + a_m g^m = b_1 g + b_2 g^2 \cdots + b_m g^m$ ならば、$a_i = b_i$ が全ての i で成り立つ。よって

$$t_1(s_1, s_2, \ldots, s_m) \neq t_2(s_1, s_2, \ldots, s_m)$$

ならば

$$t_1(gs, g^2 s, \cdots, g^m s) \neq t_2(gs, g^2 s, \cdots, g^m s)$$

である。このような議論により

$$\mathrm{argument}(z_i(s_1, \ldots, s_m)) \neq \mathrm{argument}(z_j(s_1, \ldots, s_m))$$

ならば

$$\mathrm{argument}(f_i(s)) \neq \mathrm{argument}(f_j(s))$$

が成り立つことがわかる。したがって

$$c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i z_i = 0$$

ならば

$$c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i f_i = 0$$

であるので、ベクトルの集合 $\{1, z_1, \ldots, z_n\}$ が１次従属ならば、ベクトルの集合 $\{1, f_1(s), \ldots, f_n(s)\}$ は１次従属である。つまり、$\{1\} \cup \mathscr{U}$ が１次従属ならば、$\{1\} \cup U_1$ は１次従属である。対偶をとることにより、$\{1\} \cup U_1$ が１次独立ならば $\{1\} \cup \mathscr{U}$ は１次独立であることが分かる。

　つまり、(P) が正しいことを示すには Theorem 1 を示せばよいことがわかる。

6. 補題

定理を示すための補題を列挙する。

Definition 5. $a_1, a_2, ..., a_j \in \mathbb{N}$ とする。
$A_n(a_1, a_2, ..., a_j) = \#\{(q_1, q_2, ..., q_j) \in \mathbb{N}^j | q_1^{a_1} q_2^{a_2} \cdots q_j^{a_j} = n, q_1 < q_2 < \cdots < q_j\}$
とする。

$\Re s > 1$ に対して

$$\zeta_j(a_1 s, a_2 s, ..., a_j s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(a_1, a_2, ..., a_j)}{n^s}$$

が成り立つ。

Definition 6. $a_1, a_2, ..., a_j, a \in \mathbb{N}$ とする。
$B_n(a_1, a_2, ..., a_j; a) = \#\{(q_1, ..., q_j, q) \in \mathbb{N}^{j+1} | q_1^{a_1} \cdots q_j^{a_j} q^a = n, q_1 < q_2 < \cdots < q_j\}$
とする。

$\Re s > 1$ に対して

$$\zeta_j(a_1 s, a_2 s, ..., a_j s)\zeta(as) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(a_1, a_2, ..., a_j; a)}{n^s}$$

が成り立つ。

Lemma 1. $j \geq 2$, $m, N \in \mathbb{N}$ とする。p を素数とする。$N < p$ ならば

$$A_{Np^m}(a_1, a_2, ..., a_j) = \begin{cases} B_N(a_1, ..., a_{j-1}; a_j) & (m = a_j) \\ 0 & (m < a_j) \end{cases}$$

が成り立つ。

Proof. 最初の式を示す。$q_1 < \cdots < q_j$ かつ $Np^{a_j} = q_1^{a_1} \cdots q_j^{a_j}$ がなりたつような $q_1, \ldots, q_j \in \mathbb{N}$ の個数を考える。まず、$p | q_j$ を背理法で示す。 $p \nmid q_j$ とすると、$p^{a_j} | q_1^{a_1} \cdots q_{j-1}^{a_{j-1}}$ であることから、$q_j \leq N$ および $p | q_i$ を満たすような $q_i (i < j)$ が存在することが分かる。したがって、$q_j \leq N < p \leq q_i$ となるが、これはおかしいので、背理法から $p | q_j$ が成り立つことがわかる。 よって

$$\begin{aligned}
&A_{Np^{a_j}}(a_1, a_2, ..., a_j) \\
&= \#\{(q_1, ..., q_{j-1}, q_j) \in \mathbb{N}^j | q_1^{a_1} \cdots q_j^{a_j} = Np^{a_j}, q_1 < q_2 < \cdots < q_j\} \\
&= \#\{(n_1, ..., n_{j-1}, pn_j) \in \mathbb{N}^j | n_1^{a_1} \cdots n_j^{a_j} = N, n_1 < n_2 < \cdots < n_{j-1} < pn_j\} \\
&\qquad (\text{ここで } n_1 = q_1, \ldots, n_{j-1} = q_{j-1},\ q_j = pn_j \text{ とおく}) \\
&= \#\{(n_1, ..., n_{j-1}, n_j) \in \mathbb{N}^j | n_1^{a_1} \cdots n_j^{a_j} = N, n_1 < n_2 < \cdots < n_{j-1} < pn_j\} \\
&= \#\{(n_1, ..., n_{j-1}, n_j) \in \mathbb{N}^j | n_1^{a_1} \cdots n_j^{a_j} = N, n_1 < n_2 < \cdots < n_{j-1}\}
\end{aligned}$$

である。最初の等号は定義から成り立つ、2つめの等号は $p|q_j$ であることから成り立つ、3つめの等号は pn_j の値を決めることは n_j の値を決めることと同じであることから成り立つ。4つ目の等号を示すには、$n_{j-1} < pn_j$ が成り立つという条件を仮定しなくても、$n_{j-1} < pn_j$ が成り立ってしまうことを示せば良い。このことを示す。まず、$n_1^{a_1} \cdots n_j^{a_j} = N$ なので $n_{j-1} \leq N$ である。したがって、$n_{j-1} \leq N < p \leq pn_j$ が必ず成り立つ。よって、4つ目の等号が示せたので、補題の最初の式が成り立つことが分かる。

次に、補題の2つめの式を示す。背理法で示す。$q_1 < \cdots < q_j$ かつ $Np^m = q_1^{a_1} \cdots q_j^{a_j}$ が成り立つような $(q_1, ..., q_j) \in \mathbb{N}^j$ が存在すると仮定して矛盾を導く。まず、$p|q_j$ であるとすると、$Np^m < p^{m+1} \leq p^{a_j} \leq q_j^{a_j}$ となってしまうので、$p \nmid q_j$ である。したがって、$p^m|q_1^{a_1} \cdots q_{j-1}^{a_{j-1}}$ であることから、$q_j \leq N$ および $p|q_i$ を満たすような $q_i (i < j)$ が存在することが分かる。よって、$q_j \leq N < p \leq q_i$ となってしまうが、これはおかしいので、背理法により補題の2つめの式が成り立つことが分かる。 □

Lemma 2. $m, N \in \mathbb{N}$ とする。p を素数とする。$N < p$ ならば

$$A_{Np^m}(a_1) = \begin{cases} A_N(a_1) & (m = a_1) \\ 0 & (m < a_1) \end{cases}$$

が成り立つ。

Proof. 最初の式は、

$$A_{Np^{a_1}}(a_1) = \#\{q \in \mathbb{N} | q^{a_1} = Np^{a_1}\} = \#\{n \in \mathbb{N} | n^{a_1} = N\}$$

であることから成り立つ。次の式は $q^{a_1} = Np^m$ を満たす q が存在しないことから分かる。 □

Lemma 3. ベクトルの集合 $\{1\} \cup \{\zeta(a_l s) | a_l \in \mathbb{N}\}$ は（1変数複素関数として）$\mathbb{C}$ 上1次独立である。

Proof. この補題はリーマンゼータ関数の極の位置を考えれば明らかであるが、主定理の証明に用いる方法で証明を行う。

背理法で示す。補題の主張が成り立たないと仮定する。すると

$$c_0 + \sum_{1 \leq l \leq L} c_l \zeta(a_l s) = 0 \tag{12}$$

という式が存在することが分かる。ここで $L \in \mathbb{N}$, $c_0, \ldots, c_L \in \mathbb{C}$, $c_l \neq 0 (1 \leq l \leq L)$,$a_i \neq a_j (i \neq j)$ である。(12) から

$$c_0 + \sum_{1 \leq l \leq L} c_l \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a_l s} = 0$$

なので

$$c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{1\le l\le L}c_l n^{-a_l s}=0$$

であるから

$$c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{1\le l\le L}c_l A_n(a_l) n^{-s}=0$$

が成り立つ。よって

$$\sum_{1\le l\le L}c_l A_n(a_l)=0 \qquad (n\ge 2) \tag{13}$$

である。$M=\min_l a_l$ とし、また、k を $a_k=M$ を満たすものとする。また、任意の正の整数 N に対して $n(N)$ を $n(N)=Np_N^M$ で定義する。ここで p_N は N より大きい最小の素数である。全ての N に対して、$n(N)>1$ であることに注意すると、(13) と Lemma 2 から

$$\sum_{1\le l\le L}c_l A_{n(N)}(a_l)=\sum_{1\le l\le L}c_l A_{Np_N^M}(a_l)=c_k A_{Np_N^M}(a_k)=c_k A_N(a_k)=0$$

が全ての $N\in\mathbb{N}$ で成り立つ。よって

$$\sum_{N=1}^{\infty}c_k A_N(a_k)N^{-s}=0$$

となるので

$$c_k\zeta(a_k s)=0$$

であることが分かる。しかし、これはおかしいので、背理法から、補題が成り立つことがわかる。 □

7. 主定理の証明

主定理を証明する。まず、depth の定義を行う。

Definition 7. $z\in U_1$ とする。$z=\zeta_d(a_1 s,\dots,a_d s)\in U_1$ であるとき、$\mathrm{depth}(z)=d$ と定義する。

Remark 2. 多重ゼータ値では $\zeta_d(a_1,\dots,a_d)$ の depth を d と定義するので、上記の定義は多重ゼータ値の depth の一般化である。

主定理の証明を行う。

Proof. ベクトルの集合

$$\bigcup_{n=1}^{m}\{f\in U_1|\,\mathrm{depth}(f)=n\}\cup\{1\} \tag{14}$$

が全ての m で $\mathbb{C}$ 上 1 次独立であることを示す。このことを m の帰納法で示す。$m=1$ のときは、Lemma 3 から (14) は 1 次独立であることがわかる。(14) が 1 次独立であることが $m=d-1$ で成り立つと仮定する。以下では、(14) が $m=d$ で 1 次独立でないとして矛盾を導く。(14) が $m=d$ で 1 次独立でないとすると、

$$c_0+\sum_{j\le d}\sum_{1\le l\le L_j} c_{l,j}\zeta_j(a_{l,j,1}s,a_{l,j,2}s,...,a_{l,j,j}s)=0 \tag{15}$$

という式が存在する。ここで、$L_j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $a_{l,j,i}\in\mathbb{N}$ $(1\le j\le d, 1\le l\le L_j, 1\le i\le j,)$, $c_{l,j}\ne 0$ $(1\le l\le L_j, 1\le j\le d)$, および $k\ne l$ ならば $(a_{k,j,1}s,a_{k,j,2}s,...,a_{k,j,j}s)\ne(a_{l,j,1}s,a_{l,j,2}s,...,a_{l,j,j}s)$ とする。ただし、$L_j=0$ の場合、l の和は空和であるとする。仮定から、(15) の左辺は depth が d である項を含んでいる。(15) から

$$c_0+\sum_{j\le d}\sum_{1\le l\le L_j}\sum_{n=1}^{\infty} c_{l,j}A_n(a_{l,j,1},a_{l,j,2},...,a_{l,j,j})n^{-s}=0$$

なので

$$c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\le d}\sum_{1\le l\le L_j} c_{l,j}A_n(a_{l,j,1},a_{l,j,2},...,a_{l,j,j})n^{-s}=0$$

であるから

$$c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{1\le l\le L_1} c_{l,1}A_n(a_{l,1,1})n^{-s}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{2\le j\le d}\sum_{1\le l\le L_j} c_{l,j}A_n(a_{l,j,1},a_{l,j,2},...,a_{l,j,j})n^{-s}=0$$

つまり

$$\sum_{1\le l\le L_1} c_{l,1}A_n(a_{l,1,1})+\sum_{2\le j\le d}\sum_{1\le l\le L_j} c_{l,j}A_n(a_{l,j,1},a_{l,j,2},...,a_{l,j,j})=0 \qquad (n\ge 2) \tag{16}$$

$M=\min\limits_{l,j} a_{l,j,j}$ とする。また、任意の正の整数 N に対して $n(N)$ を $n(N)=Np_N^M$ で定義する。 ここで p_N は N より大きい最小の素数である。全ての N に対して、$n(N)>1$ であることに注意すると、 (16) より

$$\sum_{1\le l\le L_1} c_{l,1}A_{Np_N^M}(a_{l,1,1})+\sum_{2\le j\le d}\sum_{1\le l\le L_j} c_{l,j}A_{Np_N^M}(a_{l,j,1},a_{l,j,2},...,a_{l,j,j})=0 \qquad (N\ge 1)$$

である。よって、 Lemma 1 から

$$\sum_{1\le l\le L_1} c_{l,1}A_{Np_N^M}(a_{l,1,1})+\sum_{l,j} c_{l,j}B_N(a_{l,j,1},a_{l,j,2},...,a_{l,j,j-1};M)=0 \qquad (N\ge 1)$$

である。ここで、和は $j \neq 1$ かつ $a_{l,j,j} = M$ を満たす l, j を動く。さらに、Lemma 2 を用いると

(17)
$$c_{k,1}\chi(M; a_{k,1,1})A_N(M) + \sum_{l,j} c_{l,j}B_N(a_{l,j,1}, a_{l,j,2}, ..., a_{l,j,j-1}; M) = 0 \qquad (N \geq 1)$$

となる。ここで 、$a_{k,1,1} = \min_{1 \leq l \leq L_1}\{a_{l,1,1}\}$ であり

$$\chi(M; a_{k,1,1}) = \begin{cases} 1 & (M = a_{k,1,1}) \\ 0 & (M < a_{k,1,1}) \end{cases}$$

である。よって、(17) より

$$c_{k,1}\sum_{N=1}^{\infty}\chi(M; a_{k,1,1})A_N(M)N^{-s} + \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{l,j} c_{l,j}B_N(a_{l,j,1}, a_{l,j,2}, ..., a_{l,j,j-1}; M)N^{-s} = 0$$

なので

$$c_{k,1}\chi(M; a_{k,1,1})\zeta(Ms) + \sum_{l,j} c_{l,j}\zeta_{j-1}(a_{l,j,1}s, a_{l,j,2}s, ..., a_{l,j,j-1}s)\zeta(Ms) = 0$$

である。よって

(18)
$$c_{k,1}\chi(M; a_{k,1,1}) + \sum_{l,j} c_{l,j}\zeta_{j-1}(a_{l,j,1}s, a_{l,j,2}s, ..., a_{l,j,j-1}s) = 0$$

である。ここで、左辺に項は１つ以上ある（空ということはない）ことに注意する。また、左辺の和において $(l_1, j_1) \neq (l_2, j_2)$ ならば

(19)
$$(a_{l_1,j_1,1}s, a_{l_1,j_1,2}s, ..., a_{l_1,j_1,j_1-1}s) \neq (a_{l_2,j_2,1}s, a_{l_2,j_2,2}s, ..., a_{l_2,j_2,j_2-1}s)$$

であることにも注意する。なぜならば、$a_{l_1,j_1,j_1} = a_{l_2,j_2,j_2} (= M)$ なので、(19) が成り立たないとすると

$$(a_{l_1,j_1,1}s, a_{l_1,j_1,2}s, ..., a_{l_1,j_1,j_1}s) = (a_{l_2,j_2,1}s, a_{l_2,j_2,2}s, ..., a_{l_2,j_2,j_2}s)$$

となってしまい、(15) の式の条件に反してしまうからである。

(18) は、(14) が $m = d - 1$ で１次独立であることに反する。よって、背理法により、(14) が $m = d$ で１次独立であることがわかる. 帰納法により定理が成り立つ □

8. 主定理の系と今後の課題

主定理（U_1 の１次独立性）の系として主張 (P) が正しいことが証明できるが、U_1 の１次独立性が証明できたことで、次のことも簡単に確かめることが出来る。まず、weight の定義を行う。

Definition 8. $z \in U_1$ とする。$z = \zeta_d(a_1 s, \ldots, a_d s) \in U_1$ であるとき、$\mathrm{weight}(z) = a_1 + \cdots + a_d$ で定義する。

Remark 3. 多重ゼータ値では $\zeta_d(a_1,\ldots,a_d)$ の weight を $a_1+\cdots+a_d$ と定義するので、上記の定義は多重ゼータ値の weight の一般化である。

Corollary 1. $Z_w=\{z\in U_1|\,\mathrm{weight}(z)=w\}$, $V'_w=\operatorname{span}Z_w$,

$$V_w=\operatorname{span}\left(\bigcup_{j=1}^{w}Z_j\right)$$

とする。このとき $\dim_{\mathbb{C}}V'_w=2^{w-1}$, $\dim_{\mathbb{C}}V_w=2^w-1$, $\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{span}(V_w\cup\{1\}))=2^w$ および

$$\operatorname{span}U_1=\bigoplus_{j=1}^{\infty}V'_j$$

である。

多重ゼータ値の理論では、多重ゼータ値が張る $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間の構造が重要であり、次元予想や直和予想など様々な問題が知られている (例えば [1, 5])。しかし、ベクトル空間の構造の決定は非常に難しいとされている。一方で、この系により多重ゼータ関数が張る $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間の構造は決定されてしまった。

ただし、多重ゼータ関数が張る $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間の構造に関する問題と一言で言っても、様々な定式化を考えることが出来るので、ベクトル空間の構造を決定したと主張するのは無理があるかもしれない。上記の系のように定式化をするとベクトル空間の構造が単純なので、主定理から構造が簡単に求まってしまうが、適切な定式化を行うことで「多重ゼータ値が張る $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間の構造決定」の類似問題として「多重ゼータ関数が張る $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間の構造決定」という新しい問題を考えるのは面白いかもしれない。

ほかにも今後の問題は考えられる。例えば、$\zeta_2(s,s+1)$ は U_1 の元ではないので、$\{1,\zeta_2(s,s+1)\}\cup U_1$ が１次独立であるのかについては、主定理だけでは判定できない。また、この文章では $\mathbb{C}$ における１次独立性を考えていたが、例えば $\mathbb{C}$ 以外での１次独立性について考えるのも面白いかもしれない。このように、今後の問題はいくらでも考えることが出来て、（関数としての）多重ゼータ関数の性質はまだまだ分かっていないことが多いと思う。なにか面白いものが埋もれているのかもしれないし、そもそも面白いものがないのかもしれないが、探検してみる価値としては ϵ ぐらいはあるのかなと思う。

References

[1] H. Furusho, The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **39** (2003), 695-720.

[2] 松本耕二、ルート系のゼータ関数について、第 60 回代数学シンポジウム報告集 (2015), 162-194.

[3] K. Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras I, Ann. Inst. Fourier **56** (2006), 1457-1504.
[4] H. Tsumura, On functional relations between the Mordell-Tornheim double zeta functions and the Riemann zeta function, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **142** (2007) 395-405.
[5] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in Proc. First Congress of Math., Paris, vol.II, Progress in Math., **120** (1994), 497-512.