Riesz mean of Möbius function

名古屋大学・多元数理科学研究科 井上 翔太
Shōta Inoue
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

次のメビウス関数は素数分布の研究において重要な研究対象の 1 つである.

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & (n = 1), \\ (-1)^k & (n = p_1 \cdots p_k,\ \text{ただし}\ p_i \neq p_j\ \text{となる素数}), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

この関数についての重要な事実として次のことが知られている.

命題 1. リーマン予想が成り立つことと不等式

$$M(x) := \sum_{n \le x} \mu(n) \ll x^{1/2+\varepsilon} \tag{1}$$

が成り立つことは同値である.

このように関数 $M(x)$ は素数, とくにリーマン予想と深い関りがある. この関係がわかりやすい公式として次の式が知られている. これはメリン逆変換の例の 1 つでもある.
$c > 1$ に関して

$$M(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s\zeta(s)} ds, \qquad (1 < x \notin \mathbb{Z}). \tag{2}$$

ここで $\zeta(s)$ はリーマン-ゼータ関数 $\zeta(s) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ でありこれを解析接続して得られるものを考えている. 式 (2) の右辺は留数計算をすることで留数の和で書くことができる. そして主な留数はゼータ関数の非自明な零点によるものである. そのため $M(x)$ を調べることにより $\zeta(s)$ の零点の情報を得ることができる.
ゼータ関数の零点についてはリーマン予想を始め多くの問題が未解決であり現在でも様々な研究が行われている.
今回の私の研究のモチベーションとしては以下の 2 つ問題がある.

問題 1. リーマン-ゼータ関数 $\zeta(s)$ の零点は全て 1 位であるか.

この予想は肯定的に成り立つことが予想されている. そして数値計算によりかなりの数の零点の位数が計算されているが今のところ 2 位以上の位数の零点は見つかっていない. この問題に関する最近の結果については H. M. Bui と D. R. Heath-Brown の 2 人が 2013 年にリーマン予想の仮定の下で, 非自明な零点の中での 1 位の零点の割合が 70.37%以上であることを示している [1]. 主にこの問題に関する研究はリーマン予想の仮定の下で話をすることが多い. ここでもそれらの先行研究に沿ってリーマン予想の仮定の下で議論をする. 以下この問題が肯定的に成り立つことを simple zero conjecture (SZC) とよぶ.

2 つ目の問題は以下の問題である.

問題 2.

$$M(x) \ll x^{1/2} \tag{3}$$

は成り立つか.

よく知られたメルテンス予想は実際には

$$|M(x)| \leq x^{1/2}$$

であった. しかし, この不等式は Odlyzko と te Riele により 1984 年に否定された [7]. そしてこの問題 2 も多くの数学者が否定的に信じている. しかしその証明はされていない. 不等式 (3) は不等式 (1) を強めた不等式でありリーマン予想よりも強い命題として自然に考えられる問題の 1 つであると思う. この不等式が成り立たないと思われている理由はいくつかあるが次の結果が最も大きな理由の 1 つであろう.

命題 2. Linear Independence Conjecture が成り立つならば不等式 (3) は成り立たない.

これは A. E. Ingham により 1942 年に示された [5]. ここで Linear Independence Conjecture とは以下の予想である.

予想 1. (Linear Independence Conjecture)
リーマン予想の仮定の下で, ゼータ関数の非自明な零点を $\frac{1}{2} + i\gamma$ としたとき, 全ての $\gamma > 0$ は $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立である.

この予想は零点の分布が不規則であるという観点からすると尤もらしい予想である. そして, この予想の下では実際に $M(x)$ は

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{M(x)}{x^{1/2}} = \pm\infty$$

となり, $M(x) \ll x^{1/2}$ が成り立たないことがわかる. さらに Gonek が予想している次のような予想もある.

予想 2. 正の定数 $B > 0$ が存在して

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{M(x)}{x^{1/2}(\log\log\log x)^{5/4}} = \pm B$$

となる.

もし (3) が成り立つとするとリーマン予想, 問題 1 が成り立つことが知られている. そのため, 不等式 (3) の真偽を判定する上ではリーマン予想と問題 1 が成り立つ下で議論する.

以下に記すのが今回の結果らであり, 上記の問題をモチベーションとする結果である.

定理 1. リーマン予想が成り立つと仮定する.

もし, 非負実数 τ が存在して,

$$M_\tau(x) = \frac{1}{\Gamma(\tau+1)} \sum_{n \le x} \mu(n) \left(1 - \frac{n}{x}\right)^\tau \ll x^{1/2} (\log x)^\alpha$$

が成り立つとする. このとき, 不等式

$$m(\rho) \le 1 + \alpha$$

が任意の非自明な $\zeta(s)$ の零点 ρ について成り立つ. ただし, $m(\rho)$ は零点の重複度である.

この結果はよく知られた結果 $M(x) = \Omega_\pm(x^{1/2})$ の証明とほぼ同様に示すことができる. $M_\tau(x)$ は $\mu(n)$ のリース平均を取ったものであり, 本来の $M(x)$ より扱いやすい和である. 一方で, 定理 1 のようにリース平均を取った上でも本来の $M(x)$ により得られる重要な情報を得ることができることもわかる. もともとの $M(x)$ に関して上と同様の結果を考えると $M(x) = o(x^{1/2} \log x)$ としなければならず, それと比べると問題の緩和化に成功している思う. 実際に以下で述べるがある仮定の下では $\tau > 1/2$ に関して $M_\tau(x) \ll x^{1/2}$ を示すことができる. しかし, $M(x)$ では同様の仮定の下でも $M(x) \ll x^{1/2}(\log x)^{3/2}$ までしか示すことができていない.

今, リーマン予想の下で $M_\tau(x)$ に関する次の定理を得ることができる.

定理 2. リーマン予想が成り立つと仮定する. このとき定数 $C_0 > 0$ が存在して, 任意の $\tau = \tau(x) \ge \frac{C_0 \log\log x}{\log\log\log\log x}$ に関して

$$M_\tau(x) \ll x^{1/2}$$

が成り立つ.

この定理は τ が x に依存している下での結果である. しかし, 定理 1 については k は x に依存していない結果となっている. このことから (SZC) へのアプローチとして τ が x に依存しているような定理 1 の類似があるとよい. 今回そのような結果を示すことはできなかったがそのような結果を得ることはできると強く期待している. その根拠を述べるために $M_\tau(x)$ に関する明示公式を次に述べる. $M(x)$ に関する明示公式は昔から知られておりその式の拡張ともみれる.

定理 3. 任意の正の数 $\tau > 0$ に関してある無限大へ発散する数列 $\{T_\nu\}$ が存在して,

$$\begin{aligned} M_\tau(x) = &\lim_{T_\nu \to \infty} \sum_{|\gamma| < T_\nu} \frac{1}{(m(\rho)-1)!} \lim_{s \to \rho} \frac{d^{m(\rho)-1}}{ds^{m(\rho)-1}} \left((s-\rho)^{m(\rho)} \frac{x^s}{\zeta(s)} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1+\tau+s)} \right) \\ &+ \sum_{l=0}^{\infty} \operatorname*{Res}_{s=-l} \left(\frac{x^s}{\zeta(s)} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1+\tau+s)} \right), \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $m(\rho)$ は零点 ρ の位数である. そして, 最後の級数は $x \ge \delta$ に関して絶対かつ一様収束する級数である.

この式を用いて次のような考察を行うことができる．リーマン予想を仮定する．ρ' を $\zeta(s)$ の 1 位でない零点とすると微分のライプニッツの公式により,

$$
\begin{aligned}
M_\tau(x) = 2x^{1/2}(\log x)^{m(\rho')-1}m(\rho')\Re\left(\frac{\Gamma(\rho')}{\zeta^{(m(\rho'))}(\rho')\Gamma(1+\tau+\rho')}x^{i\gamma'}\right) \quad (4)\\
+\frac{2x^{1/2}}{(m(\rho')-1)!}\sum_{l=0}^{m(\rho')-2}\binom{m(\rho')-1}{l}(\log x)^l\times \\
\Re\left(\lim_{s\to\rho'}\frac{d^{m(\rho')-1-l}}{ds^{m(\rho')-1-l}}\left((s-\rho')^{m(\rho')}\frac{\Gamma(s)}{\zeta(s)\Gamma(1+\tau+s)}\right)x^{i\gamma'}\right) \\
+\lim_{T_\nu\to\infty}\sum_{\substack{|\gamma|<T_\nu\\|\gamma|\neq|\gamma'|}}\frac{1}{(m(\rho)-1)!}\lim_{s\to\rho}\frac{d^{m(\rho)-1}}{ds^{m(\rho)-1}}\left((s-\rho)^{m(\rho)}\frac{x^s}{\zeta(s)}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1+\tau+s)}\right) \\
+\sum_{l=0}^{\infty}\operatorname*{Res}_{s=-l}\left(\frac{x^s}{\zeta(s)}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1+\tau+s)}\right) \\
=: 2x^{1/2}(\log x)^{m(\rho')-1}m(\rho)\Re\left(\frac{x^{i\gamma'}\Gamma(\rho')}{\zeta^{(m(\rho'))}(\rho')\Gamma(1+\tau+\rho')}\right)+Y_{\tau,\rho'}(x)
\end{aligned}
$$

となることがわかる．この考察と $M_\tau(x)$ が正負の挙動が複雑であることから次の予想を提示する．

予想 3. リーマン予想を仮定する．任意の $\zeta(s)$ の複素零点 ρ, x に関して広義単調増加な関数 $\tau=\tau(x)$ に対して, 任意の十分大きな $K>0$ に対して

$$
\begin{aligned}
&Y_{\tau,\rho}(x)\geq -C(\rho)x^{1/2}(\log x)^{m(\rho)-2}(\tau/e)^{-\tau-1}\\
&\quad\text{and}\quad 2\Re\left(\frac{x^{i\gamma}\Gamma(\rho)}{\zeta^{(m(\rho))}(\rho)\Gamma(1+\tau+\rho)}\right)\geq\frac{|\Gamma(\rho)|}{2\left|\zeta^{(m(\rho))}(\rho)\Gamma(1+\tau+\rho)\right|}
\end{aligned}
$$

または

$$
\begin{aligned}
&Y_{\tau,\rho}(x)\leq C'(\rho)x^{1/2}(\log x)^{m(\rho)-2}(\tau/e)^{-\tau-1}\\
&\quad\text{and}\quad 2\Re\left(\frac{x^{i\gamma}\Gamma(\rho)}{\zeta^{(m(\rho))}(\rho)\Gamma(1+\tau+\rho)}\right)\leq\frac{-|\Gamma(\rho)|}{2\left|\zeta^{(m(\rho))}(\rho)\Gamma(1+\tau+\rho)\right|},
\end{aligned}
$$

をみたす $x>K$ が存在する．

(4) により, もし予想 3 が成り立つとすると

$$M_\tau(x)=\Omega\left(x^{1/2}(\log x)^{m(\rho')-1}(\tau/e)^{-\tau-1}\right)$$

が任意の $\zeta(s)$ の複素零点で成り立つことがわかる．このことから次の命題を得ることができる．

命題 3. 予想 3 が成り立つと仮定する．もし, $\tau=\tau(x)\leq\frac{\log\log x}{\log\log\log x}(\alpha+o(1))$ で $M_\tau(x)\ll x^{1/2}(\log x)^\beta$ をみたすような関数 $\tau(x)$ が存在すると仮定すると

$$m(\rho)\leq\alpha+\beta+1$$

が任意の $\zeta(s)$ の複素零点 ρ について成り立つ. 特に, $\alpha+\beta<1$ とできるとすると (SZC) が成り立つ.

次に以下の予想と $M_\tau(x)$ の関係を考える.

予想 4. (Gonek-Hejhal Hypothesis)
(SZC) の仮定の下で, 任意の $\lambda>-3/2$ に関して

$$J_\lambda(T):=\sum_{0<\gamma\le T}|\zeta'(\rho)|^{2\lambda}\asymp T(\log T)^{(\lambda+1)^2}$$

が成り立つ.

この予想は Gonek [2] と Hejhal [3] により独立に予想された. Gonek は Dirichlet polynomial の研究からこの予想を考え Hejhal は $\log\zeta'(s)$ の研究からこの予想を考えた. また, Gonek はリーマン予想と (SZC) の仮定の下で $\lambda=-1$ のとき,

$$J_{-1}(T)=\sum_{0<\gamma<T}\frac{1}{|\zeta'(\rho)|^2}\gg T$$

が成り立つことも示している [2]. さらに Hughes, Keating と O'Connell らはランダム行列を用いることで,

$$J_\lambda(T)\sim\frac{G^2(\lambda+2)}{G(2\lambda+3)}a_\lambda\frac{T}{2\pi}\left(\log\frac{T}{2\pi}\right)^{(\lambda+1)^2} \tag{5}$$

が成り立つこと予想した [4]. ただし,

$$a_\lambda=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\lambda^2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\Gamma(m+\lambda)}{m!\Gamma(\lambda)}\right)^2p^{-m}\right)$$

であり G は Barnes' 関数で

$$G(z+1)=(2\pi)^{z/2}\exp\left(-\frac{1}{2}(z^2+\gamma z^2+z)\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^ne^{-z+z^2/2n}\right)$$

であり γ はオイラー定数である.
今, 定理 3 により予想 4 とリーマン予想の下で次の結果が成り立つ.

系 4. リーマン予想と $J_{-1}(T)\ll T$ が成り立つとする. このとき,

$$M_\tau(x)\ll\begin{cases}x^{1/2} & (1\ll\tau),\\ \dfrac{x^{1/2}}{\tau^{3/2}} & \left(\dfrac{1}{\log x}\ll\tau=o(1)\right),\\ x^{1/2}(\log x)^{3/2} & \left(0\le\tau=o\left(\dfrac{1}{\log x}\right)\right)\end{cases}$$

が成り立つ.

系 4 の $\tau = 0$ の場合は N. Ng が [6] で示した結果と同様である．そして, 系 4 により $\tau \gg 1$ のとき $M_\tau(x)$ に関する不等式 (3) に対応するものを得ることができることがわかる．この結果を考えた最初の動機は $M_\tau(x)$ で $M(x)$ を近似することにより, $M(x)$ に関する最良の結果を得ることができないかというものであった．しかし, それに関しては失敗した．それに関して少しここで考察する．リーマン予想と $J_{-1}(T) \ll T$ を仮定する．このとき, $M(x), M_\tau(x)$ の明示公式により,

$$M(x) - M_\tau(x) = x^{1/2} \sum_{|\gamma|<T_*} \frac{1}{\zeta'(\rho)} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^{1+\tau}} \right) x^{i\gamma} + E(x, T_*)$$

となることが計算することでわかる．ただし, T_* はある都合の良い任意に大きくできる数であり, $E(x,T_*)$ は T_* が x に依存して十分大であるとき $E(x,T_*) \ll \tau^{-1/2} x^{1/2}$ となる項である．この最初の和の項であるが $\tau \ll \frac{1}{\log x}$ としなければ近似がうまくいかない．そのため, 上記の系 4 により $M_\tau(x)$ により $M(x)$ を近似して最良の結果を出すことは難しい．また, ここでリーマン予想と $J_{-1}(T) \ll T$ の仮定の下での $M(x)$ の結果を改善できないかと考えた理由は現在の最良の結果が非常に単純な方法でほとんど自明ともいえる結果であるからである．しかし, いくつかの方法でその改良を試みたが失敗した．上の考察もその 1 つの失敗例である．その失敗の原因だが明示公式の零点の和の中に三角不等式で項 1 つ 1 つに絶対値を取ることであると思う．その方法で得られる結果としては現在の N. Ng の最良の結果 $M(x) \ll x^{1/2}(\log x)^{3/2}$ が最良になるであろう．つまり, 和

$$\sum_{|\gamma|<T} \frac{x^{i\gamma}}{\rho\zeta'(\rho)}$$

を 1 つ 1 つの項の符号まで考え正負の打ち消しを正確に計算をしない限り N. Ng の結果を改善することはできないと思う．

次に, 以下の予想の下での考察を行う．この予想は 1950 年頃から考えられており E. C. Titchmarsh [8] がこの予想の下での議論を詳しく行っている．

予想 5. (弱メルテンス予想)

$$\int_1^x \left(\frac{M(u)}{u} \right)^2 du \ll \log x. \tag{6}$$

弱メルテンス予想は不等式 (3) を弱くしたものである．実際に不等式 (3) を仮定することで弱メルテンス予想が得られることはすぐにわかる．弱メルテンス予想からわかることは多く, 例えばリーマン予想, (SZC) と不等式,

$$J_{-1}(T) = \sum_{0<\gamma<T} \frac{1}{|\zeta'(\rho)|^2} = o\left(T^2\right)$$

が得られることがわかっている．

N. Ng はリーマン予想と Gonek-Hejhal Hypothesis から弱メルテンス予想が成り立つことを示した. つまり弱メルテンス予想はリーマン予想かつ Gonek-Hejhal Hypothesis よりも弱い予想である. さらに N. Ng は弱メルテンス予想よりもより精密な漸近式

$$\int_1^x \left(\frac{M(u)}{u}\right)^2 du \sim \log x \sum_\gamma \frac{1}{|\rho\zeta'(\rho)|^2}. \tag{7}$$

をリーマン予想と Gonek-Hejhal Hypothesis の仮定の下で示している.

弱メルテンス予想の仮定の下で以下の結果が成り立つ.

系 5. 弱メルテンス予想を仮定する. このとき, 任意の $\tau > 1/2$ に関して

$$M_\tau(x) = x^{1/2} \sum_\gamma \frac{x^{i\gamma}}{\zeta'(\rho)} \frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\tau+1)} + \sum_{l=0}^\infty \operatorname*{Res}_{s=-l} \left(\frac{x^s}{\zeta(s)} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1+\tau+s)}\right)$$

が成り立ち, 最初の級数は $x \geq \delta$ に関して, 絶対かつ一様収束する. 特に, $\tau \geq 1/2 + \varepsilon$ に関して

$$M_\tau(x) \ll_\varepsilon x^{1/2} \tag{8}$$

が成り立つ.

このように弱メルテンス予想の仮定の下では $M_\tau(x)$ に関して不等式 (3) に対応するものを得ることができることがわかる.

さらにこの系 5 により, 次の系らを得ることもできる.

系 6. 弱メルテンス予想を仮定する. このとき,

$$\int_1^x \frac{M(u)}{u^{3/2}} du = \sum_\gamma \frac{x^{i\gamma}}{\zeta'(\rho)(i\gamma)\rho} + A + O\left(x^{-1/2}\right)$$

が成り立つ. ただし,

$$A = 6 + \sum_{l=1}^\infty \frac{3(-1)^l (2l-2)!(2\pi)^l}{\{(2l)!\}^2 \left(2l+\frac{1}{2}\right)\zeta(2l+1)} - \frac{3}{2} \sum_\gamma \frac{1}{\zeta'(\rho)(i\gamma)\rho(\rho+1)} \tag{9}$$

である. 特に,

$$\int_1^x \frac{M(u)}{u^{3/2}} du \ll 1 \tag{10}$$

も成り立つ.

系 7. 任意の正の数 $\delta > 0$ に関して

$$\lim_{x\to\infty} \int_2^x \frac{M(u)}{u^{3/2}(\log u)^\delta} du$$

が弱メルテンス予想の下で収束する.

ここで, 弱メルテンス予想の仮定の下, コーシーシュワルツの不等式による簡単な考察により

$$\int_1^x \frac{M(u)}{u^{3/2}}du \leq \left(\int_1^x \left(\frac{M(u)}{u}\right)^2 du\right)^{1/2} \left(\int_1^x \frac{du}{u}\right)^{1/2} \ll \log x \tag{11}$$

となることはすぐにわかる.

また, N. Ng はリーマン予想と Gonek-Hejhal Hypothesis の仮定の下で

$$\int_1^x \frac{M(u)}{u^{3/2}}du = o(\log x)$$

となることも言及している. 不等式 (10) はこの結果の改良になっている. この改良は $M_\tau(x)$ の明示公式を弱メルテンス予想の下で考えることにより成功した. 実際に $M(x)$ の明示公式は弱メルテンス予想の仮定の下では $x > 1$ に関して一様収束せずそこから積分を考えることは簡単ではない. しかし系 5 により弱メルテンス予想の仮定の下では $\tau > 1/2$ において $M_\tau(x)$ の明示公式が一様収束することがわかる. そして $x\tau M_\tau(x) = \int_1^x M_{\tau-1}(u)du$ と書けることから $M_\tau(x)$ を調べることで私たちは $M(x)$ の積分の情報を得ることできる.

今, 上記の結果に関わるいくつかの簡単な定理も得ることができたので述べておく.

定理 8.

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{M(u)}{u^{3/2}}du$$

は発散する. 特に,

$$\int_1^\infty \frac{|M(x)|}{x^{3/2}}dx = \infty. \tag{12}$$

である.

注意 1. ここで, (12) はゼータ関数が $\sigma \geq 1/2$ で零点を持つことからすぐにわかる. 実際,

$$\frac{1}{s\zeta(s)} = \int_1^\infty \frac{M(x)}{x^{s+1}}dx$$

となることがわかっておりもし, (12) が収束するとすると, $\sigma \geq 1/2$ で零点がないことになり矛盾する.

また, 上からの評価として弱メルテンス予想の仮定の下では

$$\int_1^x \frac{|M(u)|}{u^{3/2}}dx \ll \log x \tag{13}$$

となることが (11) によりわかる.

さらにここで, Linear Independence Conjecture と弱メルテンス予想の仮定の下での考察も行う. 実際に以下の定理を得る.

定理 9. Linear Independence Conjecture を仮定する. このとき,

$$\limsup_{x\to\infty}\int_1^x \frac{M(u)}{u^{3/2}}du \geq \frac{2}{\zeta(1/2)}+\frac{1}{2}\sum_{\gamma}\frac{1}{|\rho\gamma\zeta'(\rho)|} \tag{14}$$

$$\liminf_{x\to\infty}\int_1^x \frac{M(u)}{u^{3/2}}du \leq \frac{2}{\zeta(1/2)}-\frac{1}{2}\sum_{\gamma}\frac{1}{|\rho\gamma\zeta'(\rho)|}, \tag{15}$$

が成り立つ. ただし, もし ρ が 1 位の零点でないとき $\dfrac{1}{|\rho\gamma\zeta'(\rho)|}=+\infty$ であるとする.

系 10. Linear Independence Conjecture と弱メルテンス予想が成り立つと仮定する. このとき,

$$\frac{2}{\zeta(1/2)}+\frac{1}{2}\sum_{\gamma}\frac{1}{|\rho\gamma\zeta'(\rho)|} \leq \limsup_{x\to\infty}\int_1^x \frac{M(u)}{u^{3/2}}du \leq A+\sum_{\gamma}\frac{1}{|\rho\gamma\zeta'(\rho)|},$$

$$A-\sum_{\gamma}\frac{1}{|\rho\gamma\zeta'(\rho)|} \leq \liminf_{x\to\infty}\int_1^x \frac{M(u)}{u^{3/2}}du \leq \frac{2}{\zeta(1/2)}-\frac{1}{2}\sum_{\gamma}\frac{1}{|\rho\gamma\zeta'(\rho)|},$$

が成り立つ. ただし, A は (9) で定義された定数とする.

系 10 は定理 9 と系 6 からすぐにわかる.

注意 2. 系 6, 系 7 と系 10 については仮定をリーマン予想, (SZC) と

$$J_{-1}(T) := \sum_{0<\gamma<T}\frac{1}{|\zeta'(\rho)|^2} \ll \frac{T^3}{(\log T)^{3+\delta}}$$

まで弱くしても成り立つ結果である.

N. Ng は

$$0<\delta(S) := \lim_{X\to\infty}\frac{1}{\log X}\int_{[2,X]\cap S}\frac{dt}{t}<1, \tag{16}$$

$$S=\{x\geq 1 \mid |M(x)|\leq\sqrt{x}\}$$

がリーマン予想, Linear Independence Conjecture と不等式,

$$\sum_{0<\gamma<T}\frac{1}{|\rho\zeta'(\rho)|}\asymp(\log T)^{5/4} \quad \text{and} \quad \sum_{\gamma>T}\frac{1}{|\rho\zeta'(\rho)|^2}\asymp\frac{1}{T}$$

の下で成り立つことを示した [6]. これを応用することで次の結果が成り立つことがわかる.

定理 11. リーマン予想, Linear Independence Conjecture, $J_{-1}(T)\ll T$, $\displaystyle\sum_{0<\gamma<T}\frac{1}{|\rho\zeta'(\rho)|}\asymp(\log T)^{5/4}$ が成り立つと仮定する. このとき,

$$\int_1^x \frac{|M(u)|}{u^{3/2}}du \asymp \log x.$$

が成り立つ．さらに，

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{1}{\log x}\int_1^x\frac{|M(u)|}{u^{3/2}}du\le\left(\sum_{\gamma}\frac{1}{|\rho\zeta'(\rho)|^2}\right)^{1/2}, \tag{17}$$

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{1}{\log x}\int_1^x\frac{|M(u)|}{u^{3/2}}du\ge 1-\delta(S). \tag{18}$$

が成り立つ．

参考文献

[1] H. M. Bui and D. R. Heath-Brown, On simple zeros of the Riemann zeta-function, *Bull. London Math. Soc.* **45** (2013), 953–961.

[2] S. M. Gonek, On negative moments of the Riemann zeta-function, *Mathematika.* **36** (1989), 71–88.

[3] D. Hejhal, On the distribution of $\log\left|\zeta'(\frac{1}{2}+it)\right|$, *Number theory, trace formula and discrete groups* (ed. K. E. Aubert, E. Bombieri and D. Goldfeld, Academic Press, San Diego, 1989) 343–370.

[4] C. P. Hughes, J. P. Keating and Neil O'Connell, Random matrix theory and the derivative of the Riemann zeta function, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **456** (2000), 2611–2627.

[5] A. E. Ingham, On two conjectures in the theory of numbers, *Amer. J. Math.* **64** (1942), 313–319.

[6] N. Ng, The distribution of the summatory function of the Möbius function, *London Math. Soc.* (3) 89 (2004), 361–389.

[7] A. M. Odlyzko and H. J. J. te Riele, Disproof of the Mertens conjecture, *J. Reine Angrew. Math.* **357** (1984), 138–160.

[8] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Second Edition, Edited and with a preface by D. R. Heath–Brown, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.