Transcendence of special values of power series in several variables

筑波大学数理物質科学研究科数学専攻　大音 智弘 *
Tomohiro Ooto
Graduate School of Pure and Applied Sciences,
University of Tsukuba

1　序論

本講究録は，2016 年 10 月から 11 月にかけて開催された研究集会「解析的整数論の諸問題と展望」にて講演した内容をまとめたものである．

第 1 節では，Borel 予想とよばれる正規数に関する予想を述べてから，その部分的な結果として non-zero digit に関する先行研究について述べる．第 2 節では，主結果である non-zero digit の多変数化について述べる．また，その系として超越数の判定法やその例も述べる．

1.1　Borel 予想

実数 x の整数部分を $\lfloor x \rfloor$，小数部分を $\{x\}$ と書く．実数 $\beta > 1$ に対して，β 変換 $T_\beta : [0,1] \to [0,1)$ を次のように定義する:

$$T_\beta(x) = \{\beta x\}.$$

このとき，実数 ξ は，

$$\xi = \lfloor \xi \rfloor + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n(\beta;\xi)}{\beta^n} \tag{1}$$

と書ける．ただし，整数 $n \geq 1$ に対して，$t_n(\beta,\xi) = \lfloor \beta T_\beta^{n-1}(\xi) \rfloor$．(1) を ξ の β 展開とよぶ．

$b \geq 2$ を整数とする．実数 ξ は次を満たすとき b 進正規数とよばれる: 任意の整数 $L \geq 1$ と任意の $w_1, \ldots, w_L \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ に対して，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{Card}\{n \mid 1 \leq n \leq N, w_m = t_{n+m-1}(\beta,\xi) \text{ for } 1 \leq m \leq L\}}{N} = \frac{1}{b^L}.$$

大雑把に言えば，ξ が b 進正規数であるとは，ξ の b 進展開のディジットがランダムに現れるということである．任意の整数 $b \geq 2$ に対して，実数 ξ が b 進正規数となるとき，ξ を正規数とよぶ．

Borel [5] は，(ルベーグ測度の意味で) ほとんどすべての実数は正規数になることを示した．一方で，具体的な正規数を構成することは非常に難しい．Champernowne [8] は，

$$0.123456789101112131415\ldots$$

*e-mail: ooto@math.tsukuba.ac.jp

という正の整数を小さい方から並べた実数が 10 進正規数になることを示した．この数は，Champernowne 数とよばれ，Mahler [13] によりその超越性が示されている．その他の正規数に関する結果は，[7] の 4,5,6 章に詳しく書いてある．

有理数の b 進展開は周期的になることはよく知られているが，代数的無理数の b 進展開に関して知られていることは非常に少ない．このことに関して，Borel は次のことを予想した．

予想 1.1 (Borel 予想)**.** すべての代数的実無理数は正規数となるだろう．

現時点では正規数となる代数的実無理数が存在するかどうかもわかっておらず，解決にはまだ程遠い予想である．

1.2 Non-zero digit

この 1.2 節では，β 展開の周期性について知られている結果を復習したのち，代数的無理数の β 展開のディジットに関する Bailey, Borwein, Crandall, Pomerance [3] の 2004 年の結果から始まる一連の研究を振り返りたい．

周期性に関して重要な役割を果たす，Pisot 数，Salem 数について復習する．実数 $\beta > 1$ が Pisot 数とは，β は代数的整数であって，その共役 $\beta^{(1)} = \beta, \beta^{(2)}, \ldots, \beta^{(d)}$ が $|\beta^{(n)}| < 1$ $(2 \leq n \leq d)$ をみたすことである．実数 $\beta > 1$ が Salem 数とは，β は代数的整数であって，その共役 $\beta^{(1)} = \beta, \beta^{(2)}, \ldots, \beta^{(d)}$ が $|\beta^{(n)}| \leq 1$ $(2 \leq n \leq d)$ かつある $2 \leq m \leq d$ に対して $|\beta^{(m)}| = 1$ となることである．例えば，2 以上の整数や黄金比 $(1+\sqrt{5})/2$ は Pisot 数である．Salem 数の例としては，多項式 $X^4 - X^3 - X^2 - X + 1$ の 1 より大きい実根などが挙げられる．Schmidt [14] は，各 $\xi \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ の β 展開が周期的ならば，β は Pisot 数もしくは Salem 数になることを示した．Bertand [4] と Schmidt [14] は独立に β が Pisot 数のとき，実数 $\xi \in (0,1]$ の β 展開が周期的なことと $\xi \in \mathbb{Q}(\beta)$ が同値であることを示した．Schmidt は，β が Salem 数のとき，有理数の β 展開は周期的になると予想したが，この予想はまだ未解決である．

$\beta > 1$ と ξ を実数とする．整数 $N \geq 1$ に対して，関数 $\lambda_N(\beta, \xi)$ を

$$\lambda_N(\beta, \xi) = \mathrm{Card}\{n \mid 1 \leq n \leq N, t_n(\beta, \xi) \neq 0\}$$

で定める．Borel 予想が正しいと仮定すると，代数的実無理数 ξ と整数 $b \geq 2$ に対して，

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\lambda_N(b, \xi)}{N} = \frac{b-1}{b}$$

となる．しかし，現在では

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\lambda_N(b, \xi)}{N} > 0$$

となる代数的実無理数 ξ の存在性も判明していない．

Bailey, Borwein, Crandall, Pomerance [3] は 2004 年に 2 進展開，つまり $\lambda_N(2, \xi)$ の下からの評価を得た．正確には，次数 $D \geq 2$ の実代数的数 ξ に対して，ξ のみに依存する正数 $C_1(\xi)$ と計算可能な正数 $C_2(\xi)$ が存在して，任意の整数 $N \geq C_1(\xi)$ に対して，

$$\lambda_N(2, \xi) \geq C_2(\xi) N^{1/D}$$

が成り立つことを示した．この結果は，Adamczewski と Faverjon [2] 及び Bugeaud [7] によって一般の b 進展開まで拡張された．つまり，彼らは次数 $D \geq 2$ の実代数的数 ξ と整数 $b \geq 2$ に対し

て，b, ξ のみに依存した計算可能な正数 $C_3(b,\xi), C_4(b,\xi)$ が存在して，任意の整数 $N \geq C_3(b,\xi)$ に対して，

$$\lambda_N(b,\xi) \geq C_4(b,\xi) N^{1/D}$$

が成り立つことを示した．

金子 [11] は，一般の Pisot 数もしくは Salem 数に対して，non-zero digit 関数の下からの評価を得た．正確には，β を Pisot 数もしくは Salem 数とし，実代数的数 ξ に対して，$D = [\mathbb{Q}(\beta,\xi) : \mathbb{Q}(\beta)]$ とおく．$t_n(\beta : \xi) \neq 0$ なる n が無数に存在すると仮定する．このとき，β, ξ のみに依存した計算可能な正数 $C_5(\beta,\xi), C_6(\beta,\xi)$ が存在して，任意の整数 $N \geq C_5(\beta,\xi)$ に対して，

$$\lambda_N(\beta,\xi) \geq C_6(\beta,\xi) \left(\frac{N}{\log N}\right)^{\frac{1}{2D-1}} \tag{2}$$

が成り立つことを示した．さらに，金子 [12] は (2) の $2D-1$ の部分を D に変えても上記のことが成立することを示した．

この他にも，実数の β 展開のディジットが何回変化したかを数えるディジット変化数 [6, 9, 10] や与えられた長さのディジットが何種類あるかを数える complexity function [1] などの Borel 予想に関する研究が行われている．

2 主結果

主結果を述べるために幾つか記号の準備を行う．$\mathbb{N}_0$ を非負整数全体の集合とする．$k \geq 1$ を整数とし，$\mathbf{1} := (1,\ldots,1), \mathbf{0} := (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^k$ とおく．$\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_k), \mathbf{b} = (b_1,\ldots,b_k) \in \mathbb{R}^k$ とする．このとき，内積を $\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = \sum_{n=1}^{k} a_n b_n$ で定める．また，任意の $1 \leq n \leq k$ に対して，$a_n \leq b_n$ となるとき，$\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ と書くことで $\mathbb{R}^k$ 上に半順序 $\leq$ を定める．$\mathbf{s} = (s(\mathbf{m}))_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^k}$ を整数列をし，$\mathbf{a} \in \mathbb{N}_0^k \setminus \{\mathbf{0}\}$ とおく．このとき，

$$\mathcal{A}(\mathbf{s}) := \{\mathbf{m} \mid \mathbf{s}(\mathbf{m}) \neq 0\}, \quad \mathcal{A}(\mathbf{s};\mathbf{a}) := \{\langle \mathbf{m},\mathbf{a}\rangle \mid \mathbf{s}(\mathbf{m}) \neq 0\}$$

とおく．$\mathbf{m} = (m_1,\ldots,m_k) \in \mathbb{R}^k, \underline{X} := (X_1,\ldots,X_k)$ に対して，

$$\underline{X}^{\mathbf{m}} := X_1^{m_1} \cdots X_k^{m_k}, \quad f(\mathbf{s};\underline{X}) := \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^k} s(\mathbf{m}) \underline{X}^{\mathbf{m}}$$

とおく．$\mathcal{B} \subset \mathbb{N}_0, N \in \mathbb{N}_0$ に対して，

$$\lambda(\mathcal{B};N) := \mathrm{Card}\{n \mid n \in \mathcal{B}, n \leq N\}$$

とおく．

(2) などの結果は，1 変数のベキ級数の特殊値に関するもので，N 番目までの non-zero な係数の個数を評価している．しかし，これを多変数化しようと思うと，”N 番目の係数” にあたるものを決めなければならない．そこで，まずは $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$ という方向を決める．そして，$\mathbf{a}$ の直交補空間を $W_0 := \{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^k \mid \langle \mathbf{m},\mathbf{a}\rangle = 0\}$ とおく．整数 $N \geq 0$ に対して，$W_N := \{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^k \mid \langle \mathbf{m},\mathbf{a}\rangle = N\}$ という W_0 を $\mathbf{a}$ 方向にずらしたものを考える．そして，$W_N \cap \mathbb{N}_0^k$ を多変数版の”N 番目の係数” に当たるものとして考える．$W_N \cap \mathcal{A}(\mathbf{s}) \neq \emptyset$ であることと $N \in \mathcal{A}(\mathbf{s};\mathbf{a})$ が同値であることから，$\mathcal{A}(\mathbf{s};\mathbf{a})$ の個数を評価すれば良いことに至った．この考えを下に，(2) の多変数化を試みた結果，次が得られた．

定理 2.1. $k \geq 1$ を整数とし，$\beta_1, \ldots, \beta_k > 1$ は *Pisot* 数もしくは *Salem* 数で各 $1 \leq i \leq k$ に対して $\beta_i \in \mathbb{Q}(\beta_1)$ を満たすとする．ξ を代数的数とし，$D := [\mathbb{Q}(\beta_1, \xi) : \mathbb{Q}(\beta_1)], \underline{\beta}^{-1} := (\beta_1^{-1}, \ldots, \beta_k^{-1})$ とおく．$B \geq 1$ を整数とし，$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}_0^k \setminus \{\mathbf{0}\}$ とする．$\mathbf{s} = (s(\mathbf{m}))_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k}$ を整数列とし，任意の $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k$ に対して $0 \leq s(\mathbf{m}) \leq B$ を満たすとする．次の条件を仮定する*:*

(i) $\mathcal{A}(\mathbf{s}; \mathbf{a})$ は無限集合，

(ii) $\xi = f(\mathbf{s}; \underline{\beta}^{-1})$，

(iii) 各 $1 \leq i \leq k$ に対して，$\deg \beta_i \neq \deg \beta_1$ ならば，$a_i = 0$，

(iv) 正数 C_7 が存在して，$\mathbf{m} \in \mathcal{A}(\mathbf{s})$ に対して，

$$\mathbf{m} \leq \frac{\langle \mathbf{m}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a} + C_7 \mathbf{1}.$$

このとき，$\beta_1, \ldots, \beta_k, \xi, B, \mathbf{a}, C_7$ のみに依存する計算可能な正数 C_8, C_9 が存在して，任意の整数 $N \geq C_8$ に対して，

$$\lambda(\mathcal{A}(\mathbf{s}; \mathbf{a}); N) \geq C_9 \left(\frac{N}{\log N} \right)^{1/(2D-1)}. \tag{3}$$

定理 2.1 の $k = 1, \beta_1 = \beta, \mathbf{a} = 1, \mathbf{s} = (t_n(\beta; \xi))_{n \in \mathbb{N}_0}, B = \lceil \beta \rceil$ の場合を考えると，(2) が得られる．このことから，(2) の多変数化を達成することができた．また， (3) の評価が悪くなる代わりに，条件 (iv) を緩やかな条件に置き換えることに成功した．

定理 2.2. $k \geq 1$ を整数とし，$\beta_1, \ldots, \beta_k > 1$ は *Pisot* 数もしくは *Salem* 数で各 $1 \leq i \leq k$ に対して $\beta_i \in \mathbb{Q}(\beta_1)$ を満たすとする．ξ を代数的数とし，$D := [\mathbb{Q}(\beta_1, \xi) : \mathbb{Q}(\beta_1)], \underline{\beta}^{-1} := (\beta_1^{-1}, \ldots, \beta_k^{-1})$ とおく．$B \geq 1$ を整数とし，$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}_0^k \setminus \{\mathbf{0}\}$ とする．$\mathbf{s} = (s(\mathbf{m}))_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k}$ を整数列とし，任意の $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k$ に対して $0 \leq s(\mathbf{m}) \leq B$ を満たすとする．条件 (i)，(ii)，(iii) と次の条件を仮定する*:*

(iv)' 正数 $C_{10}, 0 < C_{11} < 1$ が存在して，$\mathbf{m} \in \mathcal{A}(\mathbf{s})$ に対して，

$$\mathbf{m} \leq \frac{\langle \mathbf{m}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a} + C_{10} \langle \mathbf{m}, \mathbf{a} \rangle^{1 - C_{11}} \mathbf{1}.$$

このとき，実数 $0 < C_{12} < C_{11}$ に対して，$\beta_1, \ldots, \beta_k, \xi, B, \mathbf{a}, C_{10}, C_{11}, C_{12}$ のみに依存する計算可能な正数 C_{13}, C_{14} が存在して，任意の整数 $N \geq C_{13}$ に対して，

$$\lambda(\mathcal{A}(\mathbf{s}; \mathbf{a}); N) \geq C_{14} N^{C_{12}/(2D-1)}.$$

定理 2.2 を用いることで，次の拡大次数の評価が得られる．

系 2.3. $k \geq 1$ を整数とし，$\beta_1, \ldots, \beta_k > 1$ は *Pisot* 数もしくは *Salem* 数で各 $1 \leq i \leq k$ に対して $\beta_i \in \mathbb{Q}(\beta_1)$ を満たすとする．$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}_0^k \setminus \{\mathbf{0}\}$ とし，$\mathbf{s} = (s(\mathbf{m}))_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k}$ を有界な非負整数列とする．$\underline{\beta}^{-1} = (\beta_1^{-1}, \ldots, \beta_k^{-1})$ とおく．条件 (i)，(ii)，(iii)，(iv)' を仮定する．さらに，ある $0 < C_{15} < C_{11}$ が存在して，

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{\lambda(\mathcal{A}(\mathbf{s}; \mathbf{a}); N)}{N^{C_{12}/(2D-1)}} = 0$$

を満たすとする．このとき，

$$[\mathbb{Q}(\beta_1, f(\mathbf{s}; \underline{\beta}^{-1})) : \mathbb{Q}(\beta_1)] > D.$$

ここで，系 2.3 の例を与える．$\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}_{>1}^k$ に対して，

$$\eta(\mathbf{t}; \underline{X}) := \sum_{m=0}^{\infty} X_1^{\lfloor m^{t_1} \rfloor} \cdots X_k^{\lfloor m^{t_k} \rfloor}$$

とおく．$\beta_1, \ldots, \beta_k > 1$ は Pisot 数もしくは Salem 数で各 $1 \le i \le k$ に対して $\beta_i \in \mathbb{Q}(\beta_1)$ を満たすとする．$\underline{\beta}^{-1} = (\beta_1^{-1}, \ldots, \beta_k^{-1})$ とおく．このとき，$t_1 > \max\{2D-1, t_2, \ldots, t_k\}$ ならば，

$$[\mathbb{Q}(\beta_1, \eta(\mathbf{t}; \underline{\beta}^{-1})) : \mathbb{Q}(\beta_1)] > D.$$

さらに，定理 2.2 から次の超越性の判定が得られる．

系 2.4. *$k \ge 1$ を整数とし，$\beta_1, \ldots, \beta_k > 1$ は Pisot 数もしくは Salem 数で各 $1 \le i \le k$ に対して $\beta_i \in \mathbb{Q}(\beta_1)$ を満たすとする．$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}_0^k \setminus \{\mathbf{0}\}$ とし，$\mathbf{s} = (s(\mathbf{m}))_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k}$ を有界な非負整数列とする．$\underline{\beta}^{-1} = (\beta_1^{-1}, \ldots, \beta_k^{-1})$ とおく．条件 (i)，(ii)，(iii)，(iv)' を仮定する．さらに，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，*

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{\lambda(\mathcal{A}(\mathbf{s}; \mathbf{a}); N)}{N^{\varepsilon}} = 0$$

を満たすとする．このとき，$f(\mathbf{s}; \underline{\beta}^{-1})$ は超越数となる．

最後に，系 2.4 の例を与える．実数 $\varepsilon > 0$ と整数 $m \ge 1$ に対して，

$$\mu(\varepsilon; m) := \lfloor m^{\varepsilon \log m} \rfloor$$

とおく．$\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in \mathbb{R}_{>0}^k$ に対して，

$$\varphi(\varepsilon; \underline{X}) := \sum_{m=0}^{\infty} X_1^{\mu(\varepsilon_1; m)} \cdots X_k^{\mu(\varepsilon_k; m)}$$

とおく．$\beta_1, \ldots, \beta_k > 1$ は Pisot 数もしくは Salem 数で各 $1 \le i \le k$ に対して $\beta_i \in \mathbb{Q}(\beta_1)$ を満たすとする．$\underline{\beta}^{-1} := (\beta_1^{-1}, \ldots, \beta_k^{-1})$ とおく．このとき，$\varepsilon_1 > \max\{\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k\}$ ならば，$\varphi(\varepsilon; \underline{\beta}^{-1})$ は超越数.

参考文献

[1] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, *On the complexity of algebraic numbers. I. Expansions in integer bases*, Ann. of Math. (2) **165** (2007), no. 2, 547–565.

[2] B. Adamczewski, C. Faverjon, *Chiffres non nuls dans le développement en base entière des nombres algébriques irrationnels*, (French), C. R. Math. Acad. Sci. Paris **350** (2012), no. 1–2, 1–4.

[3] D. H. Bailey, J. M. Borwein, R. E. Crandall, C. Pomerance, *On the binary expansions of algebraic numbers*, J. Théor. Nombres Bordeaux **16** (2004), no. 3, 487–518.

[4] A. Bertrand, *Développements en base de Pisot et répartition modulo 1*, (French), C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B **285** (1977), no. 6, A419–A421.

[5] É. Borel, *Sur les chiffres décimaux de* $\sqrt{2}$ *et divers problèmes de probabilités en chaîne*, (French), C. R. Acad. Sci. Paris **230** (1950), 591–593.

[6] Y. Bugeaud, *On the* β*-expansion of an algebraic number in an algebraic base* β, Integers **9** (2009), A20, 215–226.

[7] Y. Bugeaud, *Distribution modulo one and Diophantine approximation*, Cambridge Tracts in Mathematics, **193** Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[8] D. G. Champernowne, *The Construction of Decimals Normal in the Scale of Ten*, J. London Math. Soc. **8** (1933), 254–260.

[9] H. Kaneko, *On the binary digits of algebraic numbers*, J. Aust. Math. Soc. **89** (2010), no. 2, 233–244.

[10] H. Kaneko, *On the number of digit changes in base-b expansions of algebraic numbers*, Unif. Distrib. Theory **7** (2012), no. 2, 141–168.

[11] H. Kaneko, *On the beta-expansions of* 1 *and algebraic numbers for a Salem number beta*, Ergodic Theory Dynam. Systems **35** (2015), no. 4, 1243–1262.

[12] H. Kaneko, *On the number of nonzero digits in the beta-expansions of algebraic numbers*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **136** (2016), 205–223.

[13] K. Mahler, *Arithmetische Eigenschaften einer Klasse von Dezimalbrüchen*, (German), Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. **40** (1937), 421–428.

[14] K. Schmidt, *On periodic expansions of Pisot numbers and Salem numbers*, Bull. London Math. Soc. **12** (1980), no. 4, 269–278.