Sp_4, GSp_4 の内部形式の形式次数予想

京都大学理学研究科 / 角濱　寛隆 *
Hirotaka Kakuhama
Department of Mathematics, Kyoto University

概要

局所体上の簡約群の二乗可積分表現について, Hiraga-Ichino-Ikeda はその形式次数を Langlands パラメータの言葉で表す式を予想した (形式次数予想). 一方, Sp_4 と GSp_4 の内部形式については局所 Langlands 対応が構成されている. この構成は局所テータ対応を用いて行われる. 本稿では局所テータ対応による形式次数の振る舞いを調べるというアプローチを紹介し, これらの群に対して形式次数予想を証明する. 本稿は 2021 年 1 月 26 日に行われた研究集会「保型形式, 保型表現, ガロア表現とその周辺」における著者の講演を基に作成されたものである.

1　形式次数予想

形式次数予想とは形式次数という解析的に定義された不変量を Langlands パラメータ (局所 Langlands 対応の "Galois 側") を用いて表す明示公式である. この章では, それぞれの用語について説明しつつ, 形式次数予想の進展についても述べる. 本稿の主定理である Sp_4 の内部形式に対する形式次数予想は §2 で述べられる.

1.1　形式次数

G を局所コンパクト群とし, (π, E) を G の二乗可積分既約表現とする. 即ち, Z を G の中心とするとき, 任意の $x, y \in E$ に対して

$$\int_{G/Z} |(\pi(g)x, y)|^2 \, d_\mu g < \infty$$

とする. ここで (,) は E 上の G-不変な非退化エルミート形式を表し, 積分は G/Z 上の Haar 測度 μ に対して積分されている. この時 π の**形式次数**を, 任意の $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$ に対して

$$\int_{G/Z} (\pi(g)x_1, y_1) \cdot \overline{(\pi(g)x_2, y_2)} \, d_\mu g = \frac{1}{\deg_\mu \pi} \cdot (x_1, x_2) \cdot \overline{(y_1, y_2)}$$

を満たす正の定数 $\deg_\mu \pi$ として定義する. 例えば G がコンパクト群, π が G の既約表現で, μ が $\mathrm{Vol}_\mu(G/Z) = 1$ と正規化されている時は $\deg_\mu \pi = \dim \pi$ となる事が分かる.

* 本研究は日本学術振興会特別研究員奨励費 (課題番号 20J11509) の支援を受けたものである.

1.2 Langlands パラメータ

形式次数予想では L パラメータよりも深い情報が必要となるので, 局所 Langlands 対応を用いてより精密なパラメータを用意する. F を p 進体 ($\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体), G を F 上の簡約代数群とする. $\Pi(G(F))$ で $G(F)$ の滑らかな既約許容表現全体の集合を表し, $\Phi_F(G)$ で G の L パラメータの集合を表す ([Bor79] 参照). 局所 Langlands 対応 (一般には予想) によると, 全射

$$\mathcal{L}\colon \Pi(G) \to \Phi_F(G)$$

が存在する. この時, $\Pi_\phi(G(F)) = \mathcal{L}^{-1}(\phi)$ とおくと, $\Pi_\phi(G)$ は有限集合である. これは ϕ の **L パケット**と言われる. さらに ϕ が緩増加 L パラメータ (つまり, $\phi(W_F)$ の $\widehat{G}$ での閉包がコンパクトであるもの) の場合には, $\Pi_\phi(G(F))$ の構造も記述する事が出来る: $Z(\widehat{G})$ で $\widehat{G}$ の中心を表し, $\widehat{G}_{\mathrm{ad}} = \widehat{G}/Z(\widehat{G})$ とする. また, $\widehat{G}_{\mathrm{sc}}$ を $\widehat{G}_{\mathrm{ad}}$ の普遍被覆群とする. C_ϕ で $\operatorname{Im}\phi$ の $\widehat{G}$ での中心化群を表し, S_ϕ で C_ϕ の $\widehat{G} \to \widehat{G}_{\mathrm{ad}}$ による像を, $\widetilde{S}_\phi$ で S_ϕ の被覆写像 $\widehat{G}_{\mathrm{sc}} \to \widehat{G}_{\mathrm{ad}}$ による逆像を表す. G に対して $\zeta_G\colon Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}}) \to \mathbb{C}^\times$ が定義される (必ずしも一意に定まらない). さらに, $\widetilde{\mathcal{S}}_\phi$ を $\widetilde{S}_\phi$ の連結成分のなす群とする. この時, 全単射

$$\eta_\phi\colon \Pi_\phi(G) \to \operatorname{Irr}(\widetilde{\mathcal{S}}_\phi, \zeta_G)$$

が存在する. π が滑らかな緩増加既約表現の場合, $\mathcal{L}(\pi)$ は緩増加 L パラメータとなる. この時, 対 $(\mathcal{L}(\pi), \eta_{\mathcal{L}(\pi)}(\pi))$ を π の **Langlands パラメータ**と呼ぶ.

1.3 形式次数予想

$G(F)$ の滑らかな既約二乗可積分表現は緩増加表現である. Hiraga-Ichino-Ikeda は $G(F)$ の二乗可積分表現について, 形式次数の Langlands パラメータを用いた明示公式を予想した [HII08]. 非自明加法指標 $\psi\colon F \to \mathbb{C}^1$ を一つ固定する. A を $Z(G)$ の最大分裂トーラスとする. $\widehat{G/A}$ は $\widehat{G}$ の部分群とみなせるので,

$$C'_\phi := \widehat{G/A} \cap C_\phi$$

と定義する. また, G/Z 上の測度 μ としては [GG99, §8] で与えられる測度を用いる. 測度 μ は G/Z と ψ のみに依存する事に注意する.

予想 1.1. *π を G の既約な二乗可積分表現とし, (ϕ, η) を π の L パラメータとする. この時 C'_ϕ は有限群で,*

$$\deg_\mu(\pi) = \zeta_\pi \frac{\dim \eta}{\# C'_\phi} \gamma(0, \pi, \mathrm{Ad}, \psi)$$

が成立する. ここで $\mathrm{Ad}\colon {}^L G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(\widehat{G}_{\mathrm{ad}}))$ は随伴表現とし, St で Steinberg 表現を表す時

$$\zeta_\pi = \frac{\epsilon(\frac{1}{2}, \mathrm{Ad} \circ \phi, \psi)}{\epsilon(\frac{1}{2}, \mathrm{St}, \mathrm{Ad}, \psi)} \in \{\pm 1\}$$

と定めている. また, $\gamma(s, \mathrm{Ad} \circ \phi, \psi)$ は随伴 γ 因子である. (例えば [GR10, p.11] を参照の事.)

この予想はいくつかの場合で証明されている:

- F がアルキメデス的局所体の場合は Hiraga-Ichino-Ikeda [HII08] により証明された.
- G が GL_n あるいは SL_n の内部形式の場合も Hiraga-Ichino-Ikeda [HII08] により証明された.
- $G = \mathrm{SO}_{2n+1}(F)$ の場合は Ichino-Lapid-Mao [ILM17] により証明された.
- $G = \mathrm{U}_n(E)$ の場合は Beuzart-Plessis [BP18] により証明された.
- $G = \mathrm{U}_3(E), \mathrm{Sp}_4(F), \mathrm{GSp}_4(F)$ の場合は Gan-Ichino [GI14] により証明された.
- さらに, 考える既約表現を特別なものに限定すれば, より広い群で形式次数予想は証明されている ([Oi18], [Mie19], [Sch21]).

本稿で報告する今回の研究では, $G = \mathrm{Sp}_4, \mathrm{GSp}_4$ の場合を参考にして局所テータ対応を用いたアプローチを行い, 新たに Sp_4, GSp_4 の内部形式について形式次数予想を証明した.

2 主定理

この章ではまず主定理を述べるために必要な用語を説明する. 主定理は §2.1 の最後で述べる. §2.2 と §2.3 では証明のための準備を行い, §2.4 で証明の概略を述べる. F 上の簡約群 G, G' が互いに内部形式であるとは $\overline{F}$ 上の同型 $u\colon G \to G'$ で,

$$\Gamma \to \mathrm{Aut}_{\overline{F}}(G)\colon s \mapsto u^{-1} \circ s \circ u \circ s^{-1}$$

が 1-コサイクル $Z^1(\Gamma, \mathrm{Inn}(G))$ に含まれるようなものが存在する事をいう. ここで, $\mathrm{Inn}(G)$ は G の内部自己同型全体がなす代数群である. §2.1 で説明するように, Sp_4, GSp_4 の内部形式や, 後に重要となる特殊直交群の内部形式はより具体的に構成する事が出来る.

2.1 設定

F を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大, D を F 上の四元数体とする. 次の 3 つの (歪) エルミート形式を考える.

- まず, $(\ ,\ )_{1,1}\colon D^2 \times D^2 \to D$ を
$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)_{1,1} = x_1^* y_2 + x_2^* y_1$$
で定義する.
- 次に, $\langle\ ,\ \rangle_{1,1}\colon D^2 \times D^2 \to D$ を
$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_{1,1} = x_1 y_2^* - x_2 y_2^*$$
で定義する.
- 最後に, $\langle\ ,\ \rangle_{3,0}\colon D^3 \times D^3 \to D$ を
$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle_{3,0} = x_1 \alpha y_1^* + x_2 \beta y_2^* + x_3 \alpha\beta y_3^*$$
と定義する. ここで, $\alpha, \beta \in D$ は $\alpha^* = -\alpha$, $\beta^* = -\beta$, 及び $\beta\alpha = -\alpha\beta$ をみたすものとする.

さらに, $\mathrm{U}_D^+(1,1)$, $\mathrm{GU}_D^+(1,1)$ を $(\ ,\ )_{1,1}$ のユニタリ群, ユニタリ相似群とし, $\mathrm{U}_D^-(1,1)$, $\mathrm{GU}_D^-(1,1)$ を $\langle\ ,\ \rangle_{1,1}$ のユニタリ群, ユニタリ相似群, また, $\mathrm{U}_D^-(3,0)$, $\mathrm{GU}_D^-(3,0)$ を $\langle\ ,\ \rangle_{3,0}$ のユニタリ群, ユニタリ相似群と定める. これらの群は, 次の表に示すようにシンプレクティック群や特殊直交群の内部形式になっている.

群	内部形式	群	内部形式
Sp_4	Sp_4, $\mathrm{U}_D^+(1,1)$	GSp_4	GSp_4, $\mathrm{GU}_D^+(1,1)$
$\mathrm{SO}(2,2)$	$\mathrm{SO}(2,2)$, $\mathrm{SO}(4,0)$, $\mathrm{U}_D^-(1,1)$	$\mathrm{GSO}(2,2)$	$\mathrm{GSO}(2,2)$, $\mathrm{GSO}_{4,0}$, $\mathrm{GU}_D^-(1,1)$
$\mathrm{SO}(3,3)$	$\mathrm{SO}(3,3)$, $\mathrm{SO}(4,2)$, $\mathrm{U}_D^-(3,0)$	$\mathrm{GSO}(3,3)$	$\mathrm{GSO}(3,3)$, $\mathrm{GU}_D^-(3,0)$

本稿の主定理は次のように述べられる:

定理 2.1. 群 $\mathrm{U}_D^+(1,1)$, $\mathrm{GU}_D^+(1,1)$, $\mathrm{U}_D^-(1,1)$, $\mathrm{GU}_D^-(1,1)$, $\mathrm{U}_D^-(3,0)$ 及び $\mathrm{GU}_D^-(3,0)$ に対しては形式次数予想 *(*予想 *1.1)* が成立する.

証明の前にいくつかの準備を行う (§2.2–§2.3). §2.4 で証明の概略を述べる.

2.2 局所テータ対応

まず, 局所テータ対応について説明する. V でエルミート空間 $(D^2, (\ ,\ )_{1,1})$ を表し, W で歪エルミート空間 $(D^2, \langle\ ,\ \rangle_{1,1})$ もしくは $(D^3, \langle\ ,\ \rangle_{3,0})$ を表す. V のユニタリ群を $U_D^+(V)$, W の歪ユニタリ群を $U_D^-(W)$ と書く. $\mathbb{W} = V \otimes_D W$ とおくとき,

$$\langle\langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle\rangle = \mathrm{T}_D((x,x')_{1,1} \cdot \langle y, y' \rangle_\bullet^*)$$

は $\mathbb{W}$ 上のシンプレクティック形式を定める. $\mathrm{Mp}(\mathbb{W})$ を $\mathbb{W}$ の**メタプレクティック群**とする. この時

$$1 \to \mathbb{C}^1 \to \mathrm{Mp}(\mathbb{W}) \to \mathrm{Sp}(\mathbb{W}) \to 1$$

という完全系列が存在する. さらに, 自然な埋め込み $U_D^+(V) \times U_D^-(W) \to \mathrm{Sp}(\mathbb{W})$ の持ち上げ $\iota\colon U_D^+(V) \times U_D^-(W) \to \mathrm{Mp}(\mathbb{W})$ をとる[*1]:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Mp}(\mathbb{W}) . \arrow[d] \\
U_D^+(V) \times U_D^-(W) \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r] & \mathrm{Sp}(\mathbb{W})
\end{tikzcd}$$

ω_ψ を $\mathrm{Mp}(\mathbb{W})$ の Weil 表現とする. $\mathrm{U}_D^+(V)$ の既約表現 π に対して,

$$\Theta_\psi(\pi) \coloneqq (\pi^\vee \otimes \iota^*\omega_\psi)_{\mathrm{U}_D^-(W)}$$

---

*1 持ち上げ ι は一意に定まらない. 本稿では ι として Kudla [Kud94] によって構成された具体的な持ち上げを用いる (詳細は [Kak20a, §8] 参照).

と定める．ここで, 右辺は最大 $\mathrm{U}_D^-(W)$ 不変商である．さらに,

$$\theta_\psi(\pi) \coloneqq \begin{cases} 0 & (\Theta_\psi(\pi) = 0), \\ \text{the maximal semisimple quotient} & (\Theta_\psi(\pi) \neq 0). \end{cases}$$

とする．この時次が成り立つ．

定理 2.2. *(1).* $\theta_\psi(\pi)$ は 0 でなければ既約である．
(2). $\theta_\psi(\pi_1) = \theta_\psi(\pi_2) \neq 0$ ならば $\pi_1 = \pi_2$ である．
(3). $\theta_\psi(\pi)^\vee = \theta_{\overline{\psi}}(\pi^\vee)$ が成り立つ．ここで $\pi^\vee$ は π の反傾表現を表す．

(1) 及び (2) の性質は **Howe 双対性**と呼ばれ, テータ対応の理論の基礎的な定理である．(3) は [GS17] で証明された重要な性質である．Howe 双対性は Waldspurger [Wal90] により剰余標数が 2 でない場合に証明され, Gan-Takeda [GT16], Gan-Sun [GS17] で完全に証明された．これらの定理は V や W が一般のエルミート空間, 歪エルミート空間であっても成り立つ．同様に

$$\theta_\psi \colon \mathrm{Irr}(\mathrm{U}_D^-(W)) \to \mathrm{Irr}(\mathrm{U}_D^+(V)) \cup \{0\}$$

が定義出来る．また, 相似群の間にもテータ対応

$$\theta_\psi \colon \mathrm{Irr}(\mathrm{GU}_D^+(V)) \to \mathrm{Irr}(\mathrm{U}_D^-(W)) \cup \{0\},$$
$$\theta_\psi \colon \mathrm{Irr}(\mathrm{GU}_D^-(W)) \to \mathrm{Irr}(\mathrm{GU}_D^+(V)) \cup \{0\}$$

が定義される (構成は [GT14, §3] 参照).

2.3 $\mathrm{U}_D^+(1,1)$, $\mathrm{GU}_D^+(1,1)$ の局所 Langlands 対応

次に, $\mathrm{GU}_D^+(1,1)$, $\mathrm{U}_D^+(1,1)$ の局所 Langlands 対応の局所テータ対応を用いた構成[*2] をまとめる．この章の内容は本質的に [GT14] 及び [Cho17] によるものである．まず, それぞれの L 群は,

$${}^L\mathrm{GU}_D^+(1,1) = \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C}) \times W_F, \quad {}^L\mathrm{U}_D^+(1,1) = \mathrm{SO}_5(\mathbb{C}) \times W_F,$$
$${}^L\mathrm{GU}_D^-(1,1) = \{(g_1, g_2) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})^2 \mid \det g_1 = \det g_2\} \times W_F, \quad {}^L\mathrm{U}_D^-(1,1) = \mathrm{SO}_4(\mathbb{C}) \times W_F,$$
$${}^L\mathrm{GU}_D^-(3,0) = \{(g, a) \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times \mid \det g = a^2\} \times W_F, \quad {}^L\mathrm{U}_D^-(3,0) = \mathrm{SO}_6(\mathbb{C}) \times W_F$$

となる．また, 次の可換図式に示すような自然な写像 $\xi, \mathfrak{p}$ をとる:

$$\begin{tikzcd} {}^L\mathrm{GU}_D^-(1,1) \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\mathfrak{p}"] & {}^L\mathrm{GU}_D^+(1,1) \arrow[d, "\mathfrak{p}"] \\ {}^L\mathrm{U}_D^-(1,1) \arrow[r, "\xi"'] & {}^L\mathrm{U}_D^+(1,1) \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} {}^L\mathrm{GU}_D^+(1,1) \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\mathfrak{p}"] & {}^L\mathrm{GU}_D^-(3,0) \arrow[d, "\mathfrak{p}"] \\ {}^L\mathrm{U}_D^+(1,1) \arrow[r, "\xi"'] & {}^L\mathrm{GU}_D^-(3,0) \end{tikzcd}.$$

[*2] この構成は ψ 及び ξ の取り方による．別の定式化としては, 標準化された**内視鏡的指標等式**を用いる方法がある ([Kal16, §5])．しかし, $\mathrm{Irr}(\widetilde{\mathcal{S}}_{\widetilde{\phi}}, \zeta_{\mathrm{GU}_D^+(1,1)})$ 及び $\mathrm{Irr}(\widetilde{\mathcal{S}}_\phi, \zeta_{\mathrm{U}_D^+(1,1)})$ がそれぞれ次元の等しい既約表現からなる集合となるので, 形式次数予想を考える上では定式化の違いを気にしなくて良い．

詳細は [Cho17, §3.3] を参照されたい. $\widetilde{\phi}$ を $\mathrm{GU}_D^+(1,1)$ の L パラメータとし, $\phi = \mathfrak{p} \circ \widetilde{\phi}$ とする. まず, ϕ が緩増加でない, もしくは $L(s,\phi)$ が $s=0$ で極をもつと仮定する. この時, $\widetilde{\phi}, \phi$ の L パケットをそれぞれ

$$\begin{aligned}
&\Pi_{\widetilde{\phi}}(\mathrm{GU}_D^+(1,1)) \coloneqq \{\widetilde{\pi} \in \Pi(\mathrm{GU}_D^+(1,1)) \mid \theta_\psi(\widetilde{\pi}) \in \cup_{\xi\circ\phi'=\widetilde{\phi}}(\Pi_{\phi'}(\mathrm{GU}_D^-(1,1)))\} \text{ 及び} \\
&\Pi_{\phi}(\mathrm{U}_D^+(1,1)) \coloneqq \{\pi \in \Pi(\mathrm{U}_D^+(1,1)) \mid \theta_\psi(\pi) \in \cup_{\xi\circ\phi'=\phi}(\Pi_{\phi'}(\mathrm{U}_D^-(1,1)))\}
\end{aligned}$$

と定義する. 次に ϕ が緩増加かつ $L(s,\phi)$ が $s=0$ で極を持たない場合, ϕ 及び $\widetilde{\phi}$ の L パケットをそれぞれ

$$\begin{aligned}
&\Pi_{\widetilde{\phi}}(\mathrm{GU}_D^+(1,1)) \coloneqq \{\widetilde{\pi} \in \Pi(\mathrm{GU}_D^+(1,1)) \mid \theta_\psi(\widetilde{\pi}) \in \Pi_{\xi\circ\widetilde{\phi}}(\mathrm{GU}_D^-(3,0))\} \text{ 及び} \\
&\Pi_{\phi}(\mathrm{U}_D^+(1,1)) \coloneqq \{\pi \in \Pi(\mathrm{U}_D^+(1,1)) \mid \theta_\psi(\pi) \in \Pi_{\xi\circ\phi}(\mathrm{U}_D^-(3,0))\}
\end{aligned}$$

と定義する. この時, 既約表現の集合 $\Pi(\mathrm{GU}_D^+(1,1))$ 及び $\Pi(\mathrm{U}_D^+(1,1))$ は

$$\begin{aligned}
\Pi(\mathrm{GU}_D^+(1,1)) &= \bigcup_{\phi\in\Phi(\mathrm{GU}_D^+(1,1))} \Pi_\phi(\mathrm{GU}_D^+(1,1)), \\
\Pi(\mathrm{U}_D^+(1,1)) &= \bigcup_{\phi\in\Phi(\mathrm{U}_D^+(1,1))} \Pi_\phi(\mathrm{U}_D^+(1,1))
\end{aligned}$$

と, 上で定義した L パケットの非交和に分解される. L パケットの内部構造を記述するために, §1.2 で説明した C_ϕ, S_ϕ,..., $\widetilde{\mathcal{S}}_\phi$ を正確に定義し直す. まず, L パラメータ ϕ を次のように圏とみなす: 対象は ϕ に属する L 準同型 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times W_F \to {}^L G$ であり, 射は $\widehat{G}$ の元による共役である. この時, $C_\phi, \ldots, \widetilde{\mathcal{S}}_\phi$ は ϕ から群の圏への関手 $f \mapsto C_f, \ldots,\ f \mapsto \widetilde{\mathcal{S}}_f$ として定義出来る. この時 S 群の表現とは, 関手 $\widetilde{\mathcal{S}}_\phi$ から定数関手 $\mathrm{GL}(E)$ への自然変換 ρ として定義出来る. ϕ が緩増加でないか $L(s,\phi)$ が $s=0$ で極をもつ場合,

$$\theta' \colon \bigcup_{\phi'\in\vartheta(\phi)} \mathrm{Irr}(\widetilde{\mathcal{S}}_{\phi'}, \zeta_{\mathrm{U}_D^-(1,1)}) \to \mathrm{Irr}(\widetilde{\mathcal{S}}_\phi, \mathrm{sgn})$$

を $\rho \in \mathrm{Irr}(\widetilde{\mathcal{S}}_{\phi'}, \zeta_{\mathrm{U}_D^-(1,1)})$, $f \in \phi$ に対して,

$$\theta'(\rho)_f = (\mathrm{Ind}_{\widetilde{\mathcal{S}}_{f_0}}^{\widetilde{\mathcal{S}}_{f^g}} \rho_{f_0})^{g^{-1}}$$

と定義する. ここで $g \in \widehat{\mathrm{U}_D^+(1,1)}$ 及び $f_0 \in \phi'$ は $\xi \circ f_0 = f^g$ となるものとする. ユニタリ相似群に対しても同様に定義する. 次に, ϕ が緩増加で $L(s,\phi)$ が $s=0$ で極をもたない場合,

$$\theta' \colon \mathrm{Irr}(\widetilde{\mathcal{S}}_{\xi\circ\phi}, \zeta_{\mathrm{U}_D^-(3,0))}) \to \mathrm{Irr}(\widetilde{\mathcal{S}}_\phi, \mathrm{sgn})$$

を $f \in \phi$ と $\rho \in \mathrm{Irr}(\widetilde{\mathcal{S}}_{\xi\circ\phi}, \zeta_{\mathrm{U}_D^-(3,0)})$ に対して,

$$\theta'(\rho)_f = \xi^*(\rho_f) \quad (\xi \colon \widetilde{\mathcal{S}}_f \to \widetilde{\mathcal{S}}_{\xi\circ f})$$

で定義する. ユニタリ相似群に対しても同様に定義する.

命題 2.3. 各場合において, θ' は全単射である.

この命題によって $\mathrm{U}_D^-(1,1)$, $\mathrm{GU}_D^-(1,1)$, $\mathrm{U}_D^-(3,0)$, $\mathrm{GU}_D^-(3,0)$ の Langlands パラメータを経由して, $\mathrm{U}_D^+(1,1)$, $\mathrm{GU}_D^+(1,1)$ の Langlands パラメータを定義する事が出来る.

2.4 証明の概略

定理 2.1 は次の方針で示される. まず $\mathrm{GU}_D^-(1,1)$, $\mathrm{GU}_D^-(3,0)$ で形式次数予想を示し, それを用いて $\mathrm{U}_D^-(1,1)$, $\mathrm{U}_D^-(3,0)$ の形式次数予想を示す. 次に, 形式次数が局所テータ対応でどのように振る舞うかの公式を用いて $\mathrm{U}_D^+(1,1)$ の形式次数予想を示す. 最後に $\mathrm{GU}^+(1,1)$ の形式次数予想を示す.

最初のステップは GL_n の内部形式に対する形式次数予想から導かれる:

補題 2.4. $\mathrm{GU}_D^-(1,1)$, $\mathrm{GU}_D^-(3,0)$ に対しては形式次数予想 *(予想 1.1)* は成立する.

Proof. 偶然同型によって $\mathrm{GU}_D^-(1,1)$ は

$$D^\times \times \mathrm{GL}_2(F)/\{(a,a^{-1}) \mid a \in F^\times\}$$

という群に同型となる. $\mathrm{GL}_2(F)$ 及び $D^\times$ に対して形式次数予想は既に知られている ([HII08]) ので, $\mathrm{GU}_D^-(1,1)$ についても成立する. 同様に偶然同型によって $\mathrm{GU}_D^-(3,0)$ は

$$D_4^\times \times F^\times/\{(a,a^{-2}) \mid a \in F^\times\}$$

と同型である. ここで D_4 は F 上 16 次元の中心的斜体を表す. 以上より, $\mathrm{GU}_D^-(3,0)$ について形式次数予想は成立する. □

また, ユニタリ群と相似ユニタリ群の形式次数及びパラメータの関係は次のようになる:

補題 2.5. $\widetilde{\pi}$ を $\mathrm{GU}_D^-(W)$ の既約表現とし, π を $\widetilde{\pi}|_{\mathrm{U}_D^-(W)}$ に現れる既約表現とする. さらに $(\widetilde{\phi},\widetilde{\eta})$ を $\widetilde{\pi}$ の *Langlands* パラメータとし, (ϕ,η) を π の *Langlands* パラメータとする. この時,

$$\deg\widetilde{\pi} = \frac{\dim\widetilde{\eta}}{\dim\eta}\cdot\frac{\#C_\phi}{\#C'_{\widetilde{\phi}}}\cdot\det\pi,\ \text{及び}\ \mathrm{Ad}\circ\widetilde{\phi} = \mathrm{Ad}\circ\phi$$

が成り立つ.

この補題より, ユニタリ群の形式次数予想と相似ユニタリ群の形式次数予想は同値である事が分かる. この補題は [GI14, Lemma 13.2] を用いる事で示される.

最後に, 局所テータ対応による形式次数の変化について述べる. これはより一般の設定 (**四元数ユニタリ群**) で成立するので新しく記号を導入する. まず $\epsilon = \pm 1$ を固定する. V を m 次元右 D ベクトル空間, W を n 次元左 D ベクトル空間とする. さらに, 写像 $(\ ,\ )\colon V\times V \to D$ および $\langle\ ,\ \rangle\colon W\times W\to D$ で, $a,b,c\in D$ と $x,y,z\in V$ に対して

$$(xa, yb+zc) = a^*(x,y)b + a^*(x,z)c, \quad (y,x) = \epsilon(x,y)^*$$

及び

$$\langle ax, by+cz\rangle = a\langle x,y\rangle b^* + a\langle x,z\rangle c^*, \quad \langle y,x\rangle = (-\epsilon)\langle x,y\rangle^*$$

が成り立つものを考える. F 上の指標 χ_V を $(-,\mathfrak{d}(V))_F$ で定義する. ここで $\mathfrak{d}(V)$ は V の **discriminant** であり, $(\ ,\ )_F$ は Hilbert 記号である. χ_W も同様に定義する. $(\ ,\ )$ 及び $\langle\ ,\ \rangle$ のユニタリ群を $U_D(V)$ 及び $U_D(W)$ と書く. これらの群を**四元数ユニタリ群**と呼ぶ.

次の定理は [GI14, Theorem 15.1] の四元数ユニタリ群での類似であり, §3 で説明される.

定理 2.6. $2n-2m-\epsilon=1$ と仮定する. π を $U_D(W)$ の二乗可積分既約表現, $\sigma \coloneqq \theta_\psi(\pi, V)$ とする. さらに, $\sigma \neq 0$ と仮定する. この時, まず σ は二乗可積分表現である. 次に, $\alpha(V,W)$ を

$$\frac{\deg \pi}{\deg \sigma} = \alpha(V,W)\omega_\pi(-1)\gamma^V(0, \sigma\times\chi_W, \psi)$$

を満たす数として定義する. この時, $\alpha(V,W)$ は V, W, ψ のみによって決まる. さらに,

$$\alpha(V,W) = \begin{cases} (-1)^n\chi_V(-1)\epsilon(\frac{1}{2},\chi_V,\psi) & (\epsilon=-1), \\ \frac{1}{2}\cdot\chi_W(-1)\epsilon(\frac{1}{2},\chi_W,\psi) & (\epsilon=1) \end{cases}$$

を得る. ここで, $\gamma^V(-,\sigma\times\chi_W,\psi)$ は *[Kak20b]* で構成された γ 因子である.

さて, §2.1 の設定に戻る. この定理によって, $\mathrm{U}_D^+(1,1)$ の二乗可積分表現の形式次数を, $\mathrm{U}_D^-(1,1)$ もしくは $\mathrm{U}_D^-(3,0)$ の L パラメータを用いて表す事が出来る. しかし, §2.1 の設定で考えている局所テータ対応による L パラメータの振る舞いは記述出来ているので $\deg\pi$ をその Langlands パラメータで記述する式を得る. さらに, 補題 2.5 により $\mathrm{GU}_D^+(1,1)$ の二乗可積分既約表現の形式次数も計算出来る. 以上より定理 2.1 が証明された.

3 局所テータ対応と形式次数

この章では, 主定理の証明の鍵であった "局所テータ対応による形式次数の振る舞い"(定理 2.6) について説明する. Gan-Ichino [GI14] により Rallis 内積公式の局所類似を用いると, 局所 Siegel-Weil 公式から得られる定数 $\beta(V,W)$ と, 局所テータ対応で対応する 2 つの既約二乗表現の形式次数の比はある一つの関係式を満たす事が知られている ([GI14, (18.1), (18.2)]). この関係式自体は四元数ユニタリ群の場合でも成り立つ (定理 3.2). 従って, 定数 $\beta(V,W)$ の決定が問題になるが, これを行うためには [GI14] と異なる方針をとる必要がある. 具体的には, 局所ゼータ値と $\beta(V,W)$ の関係式を導く事で $\beta(V,W)$ の決定を行う.

3.1 Siegel-Weil 公式及び Rallis 内積公式の局所類似

まず $\beta(V,W)$ について説明する. $\beta(V,W)$ は二つの写像 $\mathcal{I}$ と $\mathcal{E}$ を用いて定義される. V, W を定理 2.6 の設定とする. さらに, $\underline{e}$ を W の基底とする. $R(\underline{e})$ で行列 $(\langle e_i, e_j\rangle)_{i,j} \in \mathrm{M}_n(D)$ を表す. $W^\square = W\oplus W$ とし, その上に (歪) エルミート形式

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle^\square = \langle x_1,y_1\rangle - \langle x_2,y_2\rangle$$

を考える. さらに, $\mathbb{W}^\square = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}$ とし, 同様に

$$\langle\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle\rangle^\square = \langle\langle x_1, y_1 \rangle\rangle - \langle\langle x_2, y_2 \rangle\rangle$$

を考える. メタプレクティック群 $\mathrm{Mp}(\mathbb{W}^\square)$ の Weil 表現 $\omega_\psi^\square$ はコンパクト台を持つ局所定数関数の空間 $\mathcal{S}(V \otimes W^\triangledown)$ に実現できる. ここで, $W^\triangledown$ で $W^\square$ の反対角集合を表す. まず, 写像 $\mathcal{I} \colon \mathcal{S}(V \otimes W^\triangledown) \times \mathcal{S}(V \otimes W^\triangledown) \to \mathbb{C}$ を

$$\mathcal{I}(\phi, \phi') = \int_{\mathrm{U}_D(V)} \int_{V \otimes W^\triangledown} \phi(h^{-1}x)\overline{\phi'(x)}\, dx\, dh$$

で定義する. 次に, $\mathcal{E}$ は**退化主系列表現**及び**絡作用素**を経由して定義される. まず, $W^\triangle$ で $W^\square$ の対角集合を表し, $P(W^\triangle)$ で $W^\triangle$ を固定するパラボリック部分群を表す. $U(W^\triangle)$ で $P(W^\triangle)$ のユニポテントラディカルとする. また, $s \in \mathbb{C}$ と $F^\times$ の指標 χ に対して, $I^W(s, \chi)$ を $\mathrm{U}_D(W^\square)$ 上の滑らかな関数 f_s で

$$f_s(pg) = \chi(\Delta(p))|\Delta(p)|^s \delta(p)^{\frac{1}{2}} \cdot f_s(g)$$

を満たすものの集合とする. ここで, Δ は $p \in P(W^\triangle)$ に対して $p|_{W^\triangle} \in \mathrm{End}(W^\triangle)$ の被約ノルムを対応させる代数的指標を表す. さて, $\phi \in \mathcal{S}(V \otimes W^\triangledown)$ に対して $G^\square$ 上の関数 F_ϕ を $F_\phi(g) = [\omega_\psi^\square(g)](0)$ で定義すると, $F_\phi \in I^W(-\frac{1}{2}, \chi_V)$ となる. 退化主系列表現の間には**絡作用素** $M(s, \chi_V) \colon I^W(s, \chi_V) \to I^W(-s, \chi_V)$ が

$$[M(s, \chi_V) f_s](g) = \int_{U(W^\triangle)} f_s(\tau u g)\, du$$

で定義される. τ は後の章 (§3.3) で定義する Weyl 元である. この時 $F_\phi^\dagger \in I^W(\frac{1}{2}, \chi_V)$ で, $M(s, \chi_V) F_\phi^\dagger = F_\phi$ なるものが存在する. 写像 $\mathcal{E} : \mathcal{S}(V \otimes W^\triangledown) \times \mathcal{S}(V \otimes W^\triangledown) \to \mathbb{C}$ は

$$\mathcal{E}(\phi, \phi') = \int_{\mathrm{U}_D(W)} F_\phi^\dagger((g, 1)) \cdot \overline{F_{\phi'}((g, 1))}\, dg$$

で定義される. ここで, $\mathrm{U}_D(W) \times \mathrm{U}_D(W)$ は $\mathrm{U}_D(W^\square)$ に自然に埋めこまれていると見なしている.

補題 3.1. 0 でない定数 $\beta(V, W)$ が存在して, $\mathcal{I} = \beta(V, W)\mathcal{E}$ が成り立つ.

[GI14] と同様に Rallis 内積公式の局所類似を考える事で, 次の等式が得られる:

定理 3.2. *π を定理 2.6 のようにとる. この時,*

$$\begin{aligned} \alpha(V, W) =& \frac{1}{2} \cdot \beta(V, W) \cdot e(G) \cdot |2|_F^{2n\rho - n(n - \frac{1}{2})} \cdot |R(\underline{e})|^{-\rho} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\zeta_F(2i)}{\zeta_F(1 - 2i)} \\ & \times \begin{cases} \chi_V(-1)\gamma(1 - n, \chi_V, \psi) & (-\epsilon = 1), \\ \chi_W(-1)\epsilon(\frac{1}{2}, \chi_W, \psi) & (-\epsilon = -1). \end{cases} \end{aligned}$$

が得られる. 特に, $\alpha(V, W)$ は V, W, ψ のみによって決まる.

定理の主張にある $|R(\underline{e})|$ は $R(\underline{e})$ の ($\mathrm{M}_n(D)$ に関する) 被約ノルムの絶対値であり, $\rho = n - \frac{\epsilon}{2}$ である.

3.2 帰納法のステップ

V, W を定理 2.6 の設定のものとする. V の完全等方的 (totally isotropic) な部分空間 X と W の完全等方的な部分空間 Y で $\dim X = \dim Y$ なるものがとれると仮定する.

$$X^{\perp} \coloneqq \{v \in V \mid (v, X) = 0\}, \quad Y^{\perp} \coloneqq \{w \in W \mid \langle w, Y \rangle = 0\}$$

と置くと, $V' = X^{\perp}/X$, $W' = Y^{\perp}/Y$ にはそれぞれ (歪) エルミート空間の構造が入る.

命題 3.3. 上記の設定で

$$\alpha(V, W) = \alpha(V', W')$$

が成立する.

証明は [GI14] と同様に, Heireman の Plancherel 公式 [Hei04] を用いて $\mathrm{U}_D(V')$ の形式次数と $\mathrm{U}_D(V)$ の形式次数を比較する事で行われる.

3.3 証明の完了

証明を完了させるためには, V または W が非等方的 (anisotropic) の場合に $\alpha(V, W)$ ないしは $\beta(V, W)$ を決定する必要がある. 著者はいくつかの新しい手法を用いる事で $\beta(V, W)$ の決定を行う事が出来たが, その手法や計算過程は技術的であるため省略し, ここでは得られた結果のみを紹介する. 詳細は [Kak20a] を参照していただきたい.

まず, $R(\underline{e})^{-1} = (a_{jk})_{j,k} \in \mathrm{M}_n(D)$ とし, $\tau \in \mathrm{U}_D(W^{\square})$ を

$$\tau \cdot (e_i, e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(e_j, -e_j) \ (i = 1, \ldots, n), \quad \tau^2 = -\epsilon$$

を満たすようにとる.

補題 3.4. ある定数 $z(W)$ で, 任意の $f \in I^W(\rho, 1)$ に対して

$$\int_{\mathrm{U}_D(W)} f((g, 1))\, dg = z(W) \cdot \int_{U(W^{\triangle})} f(\tau u)\, du$$

が成り立つようなものが存在する.

この定数 $z(W)$ を用いて $\beta(V, W)$ の計算が出来る:

命題 3.5. *(1).* $\epsilon = 1, \dim V = 2$ かつ V が等方的 *(isotropic)* の場合,

$$\beta(V, W) = -|2|_F^{-\frac{15}{2}} \cdot |N(R(\underline{e}))|^{\frac{5}{2}} \cdot q^{-4} \cdot \frac{(1 + q^{-1})(1 - q^{-4})}{(1 - q^{-3})}$$

が成立する.

(2). V が非等方的 *(anisotropic)* の場合,

$$\beta(V,W) = \mathrm{Vol}(\mathrm{U}_D(V)) \cdot z(W)^{-1}$$

が成立する.

最後に, 適切にテスト関数 $f \in I^W(\rho,1)$ を選ぶ事で $z(W)$ の計算を行う. これによって定理 2.6 の証明が完了する:

命題 3.6. V もしくは W が非等方的 *(anisotropic)* であるとする. この時,

$$z(W) = \begin{cases} |2|^{n^2+\frac{3n}{2}} \cdot |N(R(\underline{e}))|^{-\rho} \cdot q^{\frac{1}{2}(n+n^2)+\lceil\frac{n}{2}\rceil+2\lceil\frac{n}{2}\rceil\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} & (-\epsilon = 1), \\ |2|^{n^2-\frac{n}{2}} \cdot |N(R(\underline{e}))|^{-\rho} \cdot q^{n(n-1)+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\lceil\frac{n}{2}\rceil} & (-\epsilon = -1). \end{cases}$$

が成り立つ.

参考文献

[Bor79] A. Borel. Automorphic L-functions. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 27–61. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[BP18] Raphael Beuzart-Plessis. Plancherel formula for $\mathrm{GL}_n(F)\backslash\mathrm{GL}_n(E)$ and applications to the Ichino-Ikeda and formal degree conjectures for unitary groups, 2018.

[Cho17] Kwangho Choiy. The local Langlands conjecture for the p-adic inner form of Sp_4. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (6):1830–1889, 2017.

[GG99] Benedict H. Gross and Wee Teck Gan. Haar measure and the Artin conductor. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(4):1691–1704, 1999.

[GI14] Wee Teck Gan and Atsushi Ichino. Formal degrees and local theta correspondence. *Invent. Math.*, 195(3):509–672, 2014.

[GR10] Benedict H. Gross and Mark Reeder. Arithmetic invariants of discrete Langlands parameters. *Duke Math. J.*, 154(3):431–508, 2010.

[GS17] Wee Teck Gan and Binyong Sun. The Howe duality conjecture: quaternionic case. In *Representation theory, number theory, and invariant theory*, volume 323 of *Progr. Math.*, pages 175–192. Birkhäuser/Springer, Cham, 2017.

[GT14] Wee Teck Gan and Welly Tantono. The local Langlands conjecture for GSp(4), II: The case of inner forms. *Amer. J. Math.*, 136(3):761–805, 2014.

[GT16] Wee Teck Gan and Shuichiro Takeda. A proof of the Howe duality conjecture. *J. Amer. Math. Soc.*, 29(2):473–493, 2016.

[Hei04] Volker Heiermann. Décomposition spectrale et représentations spéciales d'un groupe réductif p-adique. *J. Inst. Math. Jussieu*, 3(3):327–395, 2004.

[HII08] Kaoru Hiraga, Atsushi Ichino, and Tamotsu Ikeda. Formal degrees and adjoint γ-factors. *J. Amer. Math. Soc.*, 21(1):283–304, 2008.

[ILM17] Atsushi Ichino, Erez Lapid, and Zhengyu Mao. On the formal degrees of square-integrable representations of odd special orthogonal and metaplectic groups. *Duke Math. J.*, 166(7):1301–1348, 2017.

[Kak20a] Hirotaka Kakuhama. Formal degrees and local theta correspondence: quaternionic case, 2020.

[Kak20b] Hirotaka Kakuhama. On the local factors of irreducible representations of quaternionic unitary groups. *Manuscripta Math.*, 163(1-2):57–86, 2020.

[Kal16] Tasho Kaletha. Rigid inner forms of real and p-adic groups. *Ann. of Math. (2)*, 184(2):559–632, 2016.

[Kud94] Stephen S. Kudla. Splitting metaplectic covers of dual reductive pairs. *Israel J. Math.*, 87(1-3):361–401, 1994.

[Mie19] Yoichi Mieda. On the formal degree conjecture for simple supercuspidal representations, 2019.

[Oi18] Masao Oi. Simple supercuspidal l-packets of quasi-split classical groups, 2018.

[Sch21] David Schwein. Formal degree of regular supercuspidals, 2021.

[Wal90] J.-L. Waldspurger. Démonstration d'une conjecture de dualité de Howe dans le cas p-adique, $p \neq 2$. In *Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I (Ramat Aviv, 1989)*, volume 2 of *Israel Math. Conf. Proc.*, pages 267–324. Weizmann, Jerusalem, 1990.