

Hardy 空間上のウェーブレットについて

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 木下 保
Tamotu Kinoshita
Institute of Mathematics,
University of Tsukuba

ウェーブレット理論でしばしば登場する Hardy 空間 $H^2(\mathbf{R})$ は $L^2(\mathbf{R})$ に含まれる部分空間であり、次で定義される。

$$H^2(\mathbf{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbf{R}) : \hat{f}(\xi) = 0 \text{ for a.e. } \xi \leq 0 \right\}.$$

Hardy 空間 $H^2(\mathbf{R})$ に対する直交ウェーブレット ψ を H^2 ウェーブレットと呼ぶことにして、文献 [6] や [8] 等を参考に解説してこう。 $H^2(\mathbf{R})$ に対しても $L^2(\mathbf{R})$ のときと同様に MRA が構成される。

定義 $H^2(\mathbf{R})$ の閉部分空間の族 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ が次を満たすとき多重解像度解析 (MRA) という。

- (i) $V_j \subset V_{j+1}$ ($j \in \mathbf{Z}$).
- (ii) $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$.
- (iii) $\varphi \in V_0$ が存在して、 $\{\varphi(x-k) : k \in \mathbf{Z}\}$ が V_0 の正規直交基底となる。
 φ をスケーリング関数と呼ぶ。
- (iv) $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}$.
- (v) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = H^2(\mathbf{R})$.

L^2 のときの MRA ウェーブレットに関する代表的な以下の公式も成り立つ。

ローパスフィルタ) $|m_0(\xi)|^2 + |\overline{m_0(\xi + \pi)}|^2 = 1$.

スケーリング関数) V_0 で少なくとも正規直交系より $\sum_{\ell \in \mathbf{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2\ell\pi)|^2 = 1$ で、

$$\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi) \implies \hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi).$$

ウェーブレット) $\hat{\psi}(2\xi) = e^{i\xi} \overline{m_0(\xi + \pi)} \hat{\varphi}(\xi)$ a.e. $\xi \in \mathbf{R}$.

MRA ウェーブレット) $|\hat{\varphi}(\xi)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2$ の式も成り立つことを考慮して、必要十分条件は次である。

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} \left| \hat{\psi}(2^j(\xi + 2\ell\pi)) \right|^2 = 1 \quad \text{a.e. } \xi \in \mathbf{R}.$$

しかしながら、以下のような違いにも注目したい。

- コンパクトなサポートを持つ H^2 ウェーブレットは存在しない。なぜならば $H^2(\mathbf{R})$ の定義からわかるように、周波数空間の $\xi = 0$ において (恒等的 0 であるような関数以外だと) 関数が解析的な滑らかさにはなり得ない。従って、時間空間で指数減衰ができなくなるからである。
- $|\hat{\psi}|$ が連続で、帯域制限となる H^2 ウェーブレットは存在しないという事実も後に紹介する Regularity condition と呼ばれる \mathfrak{R}^0 に関する結果から示される。

結局のところ周波数空間において不連続で、時間空間において減衰の低いものならば、見つかりやすい可能性を示唆している。

L^2 ウェーブレットである Shannon ウェーブレットのフーリエ変換は、 $\hat{\Psi}(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}} \chi_{[-2\pi, -\pi) \cup (\pi, 2\pi]}(\xi)$ であった。さらに、Shannon ウェーブレットでは例外的に $e^{i\frac{\xi}{2}}$ を取り除くことができ、1 の単位分割にもとづく

$$\hat{\Psi}(\xi) = \chi_{[-2\pi, -\pi) \cup (\pi, 2\pi]}(\xi)$$

の導入もできた。これと類似な H^2 ウェーブレットを紹介しよう。

例 1) $\hat{\psi}(\xi) = \chi_{[2\pi, 4\pi]}(\xi)$ で定義される $\psi(x)$ は、 H^2 ウェーブレットである。周波数空間の正の方だけで、区間幅が 2 倍になっていることに注意する (ノルムの値が 1 のままとなる)。ただし、 $\hat{\varphi}(\xi) = \chi_{[0, 2\pi]}(\xi)$ で、 $m_0(\xi) = 1$ for $\xi \in [0, \pi]$, $= 0$ for $\xi \in [\pi, 2\pi]$ である。また、 $|m_0(\xi)|^2 + |\overline{m_0(\xi + \pi)}|^2 = 1$ の関係式から $m_0(\xi) = 0$ for $\xi \in [-\pi, 0]$ ということもわかる (2π 周期拡張より、 $m_0(\xi) = 1$ for $\xi \in [-2\pi, -\pi]$)。

Remark 1.1. *Hardy* 版になっても、Shannon タイプだとウェーブレットもスケール関数もよく似ている。周波数空間で正の方だけで、スケールを変えて幅を 2 倍にしただけである。しかし、ローパスフィルタは負の方もあり、幅を 2 倍にはしていないことに注意する。しかも、Shannon ウェーブレットの場合のローパスフィルタは偶関数だったが、Shannon タイプの H^2 ウェーブレットのローパスフィルタは偶関数になっていない。

より一般に

$$\begin{aligned} K_n^+ &= \left[\frac{2^n \pi}{2^{n+1} - 1}, \pi \right] \cup \left[2^n \pi, \frac{2^{2n+1} \pi}{2^{n+1} - 1} \right], \\ K_n^- &= \left[-\frac{2^{2n+1} \pi}{2^{n+1} - 1}, -2^n \pi \right] \cup \left[-\pi, -\frac{2^n \pi}{2^{n+1} - 1} \right] \end{aligned}$$

を用いて $K_n = K_n^+ \cup K_n^-$ とおき、 L^2 ウェーブレットの Shannon タイプの族として、次を考えてみよう。

$$\hat{\Psi}^{(n)}(\xi) = \chi_{K_n}(\xi) \quad (n \geq 0).$$

帯域制限ウェーブレットが $|K_n| = 2\pi$ を満たすとき、Minimally Supported Frequency (MSF) ウェーブレットと呼ばれる。 $K = K_n$ が同時に 2 種類の \mathbf{R} の分割：

$$(i) \quad \{2^j K; j \in \mathbf{Z}\} \quad (ii) \quad \{K + 2\ell\pi; \ell \in \mathbf{Z}\}$$

になることから、 $\Psi^{(n)}$ が L^2 版の直交ウェーブレットになる ([6], [8] 等を見よ)。
(i) の $K = K_n$ が \mathbf{R} の分割となっていること：

$$\begin{aligned} \bigcup_{j \in \mathbf{Z}} \{2^j K_n^+\} &= \left(\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} \left[\frac{2^{n+j} \pi}{2^{n+1} - 1}, 2^j \pi \right] \right) \cup \left(\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} \left[2^{n+j} \pi, \frac{2^{2n+j+1} \pi}{2^{n+1} - 1} \right] \right) \\ &= \left(\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} \left[\frac{2^{n+j} \pi}{2^{n+1} - 1}, 2^j \pi \right] \right) \cup \left(\bigcup_{j' \in \mathbf{Z}} \left[2^{n+(j'-n-1)} \pi, \frac{2^{2n+(j'-n-1)+1} \pi}{2^{n+1} - 1} \right] \right) \\ &= \left(\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} \left[\frac{2^{n+j} \pi}{2^{n+1} - 1}, 2^j \pi \right] \right) \cup \left(\bigcup_{j' \in \mathbf{Z}} \left[2^{j'-1} \pi, \frac{2^{n+j'} \pi}{2^{n+1} - 1} \right] \right) \\ &= \bigcup_{j \in \mathbf{Z}} \left[2^{j-1} \pi, 2^j \pi \right] \\ &= \mathbf{R}^+. \end{aligned}$$

同様に、

$$\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} \{2^j K_n^-\} = \mathbf{R}^-$$

であり、次がわかる。

$$\bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \{2^j K_n\} = \left(\bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \{2^j K_n^+\} \right) \cup \left(\bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \{2^j K_n^-\} \right) = \mathbf{R}.$$

(ii) の $K = K_n$ が \mathbf{R} の分割となっていること:

$$\begin{aligned}
& \bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \{K_n^+ + 2\ell\pi\} \\
&= \left(\bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \left[\frac{2^n \pi}{2^{n+1} - 1} + 2\ell\pi, \pi + 2\ell\pi \right] \right) \cup \left(\bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \left[2^n \pi + 2\ell\pi, \frac{2^{2n+1} \pi}{2^{n+1} - 1} + 2\ell\pi \right] \right) \\
&= \left(\bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \left[\frac{2^n \pi}{2^{n+1} - 1} + 2\ell\pi, \pi + 2\ell\pi \right] \right) \\
&\quad \cup \left(\bigcup_{\ell' \in \mathbf{Z}} \left[2^n \pi + 2(\ell' - 2^{n-1})\pi, \frac{2^{2n+1} \pi}{2^{n+1} - 1} + 2(\ell' - 2^{n-1})\pi \right] \right) \\
&= \left(\bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \left[\frac{2^n \pi}{2^{n+1} - 1} + 2\ell\pi, \pi + 2\ell\pi \right] \right) \cup \left(\bigcup_{\ell' \in \mathbf{Z}} \left[2\ell' \pi, \frac{2^n \pi}{2^{n+1} - 1} + 2\ell' \pi \right] \right) \\
&= \bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \left(\left[2\ell\pi, \frac{2^n \pi}{2^{n+1} - 1} + 2\ell\pi \right] \cup \left[\frac{2^n \pi}{2^{n+1} - 1} + 2\ell\pi, \pi + 2\ell\pi \right] \right) \\
&= \bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} [2\ell\pi, \pi + 2\ell\pi].
\end{aligned}$$

同様に、

$$\bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \{K_n^- + 2\ell\pi\} = \bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} [-\pi - 2\ell\pi, -2\ell\pi] = \bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} [-\pi + 2\ell\pi, 2\ell\pi]$$

であり、次がわかる。

$$\bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \{K_n + 2\ell\pi\} = \left(\bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \{K_n^+ + 2\ell\pi\} \right) \cup \left(\bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \{K_n^- + 2\ell\pi\} \right) = \mathbf{R}.$$

ところで、Shannon タイプ ($n = 0$) だと、周波数空間で正の半空間だけで区間幅を2倍にしたものが H^2 ウェーブレットになっていた。この Shannon タイプの族 ($n \geq 0$) のときにも、周波数空間の正の方だけで区間幅を2倍にしたものが H^2 ウェーブレットになり得るのかどうかを調べてみよう。

$$\hat{\psi}^{(n)}(\xi) = \chi_{2K_n^+}(\xi) \quad (n \geq 0).$$

ここで、 $K = 2K_n^+$ が次のような \mathbf{R}^+ の分割となっていることがわかる。

$$(i)^+ \quad \{2^j K; j \in \mathbf{Z}\}$$

(i) の場合とまったく同様で正の方だけに注目し、番号 j をズラせば明らかである。

さらに、この特別な H^2 ウェーブレットの場合には、 $K = 2K_n^+$ も次のような \mathbf{R} の分割となっていることがわかる。

$$(ii)^+ \quad \{K + 2\ell\pi; \ell \in \mathbf{Z}\}$$

実際、次が成り立っている。

$$\begin{aligned} & \bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \{2K_n^+ + 2\ell\pi\} \\ &= \left(\bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \left[\frac{2^{n+1}\pi}{2^{n+1}-1} + 2\ell\pi, 2\pi + 2\ell\pi \right] \right) \cup \left(\bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \left[2^{n+1}\pi + 2\ell\pi, \frac{2^{2n+2}\pi}{2^{n+1}-1} + 2\ell\pi \right] \right) \\ &= \left(\bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \left[\frac{2^{n+1}\pi}{2^{n+1}-1} + 2\ell\pi, 2\pi + 2\ell\pi \right] \right) \\ & \quad \cup \left(\bigcup_{\ell' \in \mathbf{Z}} \left[2^{n+1}\pi + 2(\ell' - 2^n)\pi, \frac{2^{2n+2}\pi}{2^{n+1}-1} + 2(\ell' - 2^n)\pi \right] \right) \\ &= \left(\bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \left[\frac{2^{n+1}\pi}{2^{n+1}-1} + 2\ell\pi, 2\pi + 2\ell\pi \right] \right) \cup \left(\bigcup_{\ell' \in \mathbf{Z}} \left[2\ell'\pi, \frac{2^{n+1}\pi}{2^{n+1}-1} + 2\ell'\pi \right] \right) \\ &= \bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \left(\left[\frac{2^{n+1}\pi}{2^{n+1}-1} + 2\ell\pi, 2\pi + 2\ell\pi \right] \cup \left[2\ell\pi, \frac{2^{n+1}\pi}{2^{n+1}-1} + 2\ell\pi \right] \right) \\ &= \bigcup_{\ell \in \mathbf{Z}} \left[2\ell\pi, 2\pi + 2\ell\pi \right] \\ &= \mathbf{R}. \end{aligned}$$

このとき、正規直交性についてのみ確認をしておこう。まず $(i)^+$ より、次が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}_x} \psi_{j,k}^{(n)}(x) \overline{\psi_{j',k'}^{(n)}(x)} dx \\ &= 2^{\frac{j+j'}{2}} \int_{\mathbf{R}_x} \psi^{(n)}(2^j x - k) \overline{\psi^{(n)}(2^{j'} x - k')} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2^{-\frac{j+j'}{2}} \int_{\mathbf{R}_\xi} e^{-i2^{-j}k\xi} \hat{\psi}^{(n)}(2^{-j}\xi) \overline{e^{-i2^{-j'}k'\xi} \hat{\psi}^{(n)}(2^{-j'}\xi)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2^{-\frac{j+j'}{2}} \int_0^\infty e^{-i(2^{-j}k - 2^{-j'}k')\xi} \chi_{2K_n^+}(2^{-j}\xi) \chi_{2K_n^+}(2^{-j'}\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \delta_{j,j'} 2^{-j} \int_0^\infty e^{-i2^{-j}(k-k')\xi} \chi_{2K_n^+}(2^{-j}\xi)^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \delta_{j,j'} \int_{\mathbf{R}_\xi} e^{-i(k-k')\xi} \chi_{2K_n^+}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

従って、 k に関する正規直交性はフーリエ級数の基底の正規直交性に帰着して、次が得られる。

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbf{R}_x} \psi_{j,k}^{(n)}(x) \psi_{j',k'}^{(n)}(x) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \delta_{j,j'} \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} \int_{-2\ell\pi}^{2\pi-2\ell\pi} e^{-i(k-k')\xi} \chi_{2K_n^+}(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \delta_{j,j'} \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-k')\xi} \chi_{2K_n^+}(\xi - 2\ell\pi) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \delta_{j,j'} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-k')\xi} \chi_{\cup_{\ell \in \mathbf{Z}} \{2K_n^+ + 2\ell\pi\}}(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \delta_{j,j'} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-k')\xi} d\xi \\
&= \delta_{j,j'} \delta_{k,k'}.
\end{aligned}$$

例 2) $n \geq 0$ に対して $\hat{\psi}^{(n)}(\xi) = \chi_{2K_n^+}(\xi)$ で定義される $\psi^{(n)}(x)$ は、 H^2 ウェーブレットである。

この Shannon タイプの族 ($n \geq 0$) は、(MRA ウェーブレットとは限らない) H^2 版の直交ウェーブレットの必要十分条件

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2 = \chi_{\mathbf{R}^+}(\xi) \text{ for a.e. } \xi \in \mathbf{R} \\ \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^j(\xi + 2(2\ell+1)\pi)) \overline{\hat{\psi}(2^j \xi)} = 0 \text{ for a.e. } \xi \in \mathbf{R}, \ell \in \mathbf{Z} \end{array} \right.$$

を満たしている。 L^2 版と違いは、上段の右辺を 1 から $\chi_{\mathbf{R}^+}(\xi)$ に変更したことである。

Remark 1.2. H^2 版で正規直交系の必要十分条件だと、次で与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2\ell\pi)|^2 = 1 \text{ for a.e. } \xi \in \mathbf{R} \\ \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} \hat{\psi}(2^j(\xi + 2\ell\pi)) \overline{\hat{\psi}(\xi + 2\ell\pi)} = 0 \text{ for a.e. } \xi \in \mathbf{R}, j \geq 1 \end{array} \right.$$

これは、 L^2 版と全く同じである。

- 特に $n = 2$ のとき、 L^2 版の MRA ウェーブレットでない有名な Journé ウェーブレット

$$\hat{\Psi}^{(2)}(\xi) = \chi_{[-32\pi/7, -4\pi] \cup [-\pi, -4\pi/7] \cup [4\pi/7, \pi] \cup [4\pi, 32\pi/7]}(\xi)$$

となる。これに対応する H^2 ウェーブレット

$$\hat{\psi}^{(2)}(\xi) = \chi_{[8\pi/7, 2\pi] \cup [8\pi, 64\pi/7]}(\xi)$$

も、 H^2 版の MRA ウェーブレットではない。 L^2 版は [5] の定理 4.4 より Journé の $n = 2$ のときだけでなく、 $n \geq 2$ のときも NG である。

- 注目すべきなのは Shannon である $n = 0$ の次にシンプルな $n = 1$ のときである。[6] の §3 の定理 4.12 から次の定理が知られている ([5] の定理 4.4 も見よ)。

定理 1.3. $\Psi \in L^2(\mathbf{R})$ を直交ウェーブレットとする。 $|\hat{\Psi}|$ のサポートが

$$\left[-\frac{8\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$$

に含まれるならば、 Ψ は MRA ウェーブレットとなる。

この定理よりまさに

$$\hat{\Psi}^{(1)}(\xi) = \chi_{[-8\pi/3, -2\pi] \cup [-\pi, -2\pi/3] \cup [2\pi/3, \pi] \cup [2\pi, 8\pi/3]}(\xi)$$

は L^2 版の MRA ウェーブレットであることがわかる。

一方で、これに対応する H^2 ウェーブレットは

$$\hat{\psi}^{(1)}(\xi) = \chi_{[4\pi/3, 2\pi] \cup [4\pi, 16\pi/3]}(\xi)$$

であるが、 H^2 版の MRA ウェーブレットとならない。実際に、MRA ウェーブレットの必要十分条件の等式

$$\sum_{\ell \in \mathbf{Z}} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \hat{\psi}(2^j(\xi + 2\ell\pi)) \right|^2 = 1$$

を $n \geq 1$ に対して満たしていない。

$n = 1$ のときだけを確認してみよう。

$$\begin{aligned}
& \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \hat{\psi}^{(1)} \left(2^j (\xi + 2\ell\pi) \right) \right|^2 \\
& \geq \sum_{j=1}^{\infty} \left| \hat{\psi}^{(1)} (2^j \xi) \right|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \left| \hat{\psi}^{(1)} \left(2^j (\xi + 2\pi) \right) \right|^2 \\
& \geq \sum_{j=1}^{\infty} \left| \chi_{[4\pi/3, 2\pi]} (2^j \xi) + \chi_{[4\pi, 16\pi/3]} (2^j \xi) \right|^2 + \left| \hat{\psi}^{(1)} \left(2(\xi + 2\pi) \right) \right|^2 \\
& = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \chi_{[2^{2-j}\pi/3, 2^{1-j}\pi]} (\xi) \right|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \left| \chi_{[2^{2-j}\pi, 2^{4-j}\pi/3]} (\xi) \right|^2 \\
& \quad + \left| \chi_{[4\pi/3, 2\pi] \cup [4\pi, 16\pi/3]} \left(2(\xi + 2\pi) \right) \right|^2 \\
& = \sum_{j=2}^{\infty} \left| \chi_{[2^{3-j}\pi/3, 2^{2-j}\pi]} (\xi) \right|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \left| \chi_{[2^{2-j}\pi, 2^{4-j}\pi/3]} (\xi) \right|^2 \\
& \quad + \left| \chi_{[2\pi/3, \pi] \cup [2\pi, 8\pi/3]} (\xi + 2\pi) \right|^2 \\
& = \sum_{j=2}^{\infty} \left| \chi_{[2^{3-j}\pi/3, 2^{4-j}\pi/3]} (\xi) \right|^2 + \left| \chi_{[2\pi, 2^3\pi/3]} (\xi) \right|^2 \\
& \quad + \left| \chi_{[2\pi/3 - 2\pi, \pi - 2\pi] \cup [2\pi - 2\pi, 8\pi/3 - 2\pi]} (\xi) \right|^2 \\
& = \left| \chi_{(0, 2^2\pi/3]} (\xi) \right|^2 + \left| \chi_{[2\pi, 2^3\pi/3]} (\xi) \right|^2 \\
& \quad + \left| \chi_{[-4\pi/3, -\pi] \cup [0, 2\pi/3]} (\xi) \right|^2.
\end{aligned}$$

これより $\xi \in (0, 2\pi/3]$ の区間上は 2 となり、1 よりも大きくなってしまいうので条件を満たさないことがわかる。

また、[5] よりさきほどの K_n^+ を変更した

$$\tilde{K}_n^+ = \left[\frac{(p+1)\pi}{2^{n+1}-1}, \frac{p\pi}{2^n-1} \right] \cup \left[\frac{2^n p\pi}{2^n-1}, \frac{2^{n+1}(p+1)\pi}{2^{n+1}-1} \right]$$

を用いて、次の H^2 ウェーブレットも知られている。

例 3) $\hat{\psi}_p^{(n)}(\xi) = \chi_{2\tilde{K}_n^+}(\xi)$ ($n \geq 1, 1 \leq p < 2(2^n - 1)$) で定義される $\psi^{(n)}(x)$ は、 H^2 ウェーブレットである。

K_n^+ は $p = 2^n - 1$ の場合だけだったことになる。もし $p = 1$ でかつ $n = 1$ のときだと、

$$\hat{\psi}_1^{(1)}(\xi) = \chi_{[4\pi/3, 2\pi] \cup [4\pi, 16\pi/3]}(\xi)$$

となる。これは $\hat{\psi}^{(1)}(\xi)$ とまったく同じであり、MRA ウェーブレットにはならない。不連続なウェーブレット以外の H^2 ウェーブレットも考えてみよう。

Regularity condition \mathfrak{R}^0 : もし $|\hat{\psi}|$ が \mathbf{R} 上で連続で

$$(C) \quad |\hat{\psi}(\xi)| = O(\langle \xi \rangle^{-\alpha-1/2}) \quad \text{for some } \alpha > 0$$

を満たすならば、 ψ が Regularity condition \mathfrak{R}^0 を満たすという。

ψ が $L^2(\mathbb{R})$ 版の MRA ウェーブレットの場合、 \mathfrak{R}^0 が満たされる。このため、 H^2 ウェーブレットの特徴づけにも役立つことが期待できる。[7] において $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属する H^2 ウェーブレットが存在するか否かの問題が提起されたが、[1] と [2] により \mathfrak{R}^0 条件を満たす H^2 ウェーブレットは存在しないことが証明され、 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属する H^2 ウェーブレットが存在しないことも結論された。 $H^2(\mathbf{R})$ 版の MRA の構造から、 $\hat{\varphi}$ は原点でジャンプすることになる。一方で、 $|\hat{\psi}(\xi)| (= |m_0(\xi/2 + \pi)\hat{\varphi}(\xi/2)|)$ は $m_0(\xi/2 + \pi)$ の零点集合のおかげで、原点で滑らかになり得る。このとき、次の問題を考えることは自然である。

“ $|\hat{\psi}|$ が \mathbf{R} 上で連続で、(C) を満たさないような H^2 ウェーブレットは存在するのだろうか?”

この問題に対する答えとして、[4] で以下の結果を示した。

定理 1.4. $|\hat{\psi}|$ が \mathbf{R} 上で連続で、次を満たすような H^2 ウェーブレット ψ が存在する。

$$|\hat{\psi}(\xi)| = O((\log \langle \xi \rangle)^{-1}).$$

[4] では、 $|\hat{\psi}|$ の減衰度は低い連続な H^2 ウェーブレットになるような具体例を実際に構成している。

References

- [1] P. Auscher, Solution of two problems on wavelets, *J. Geom. Anal.* **5** (1995), no. 2, 181–236.
- [2] P. Auscher, Il n'existe pas de bases d'ondelettes régulières dans l'espace de Hardy $H^2(\mathbf{R})$, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **315** (1992), no. 7, 769–772.
- [3] K. Fujita, Reproducing kernels related to the complex sphere, *Tokyo J. Math.* **23** (2000), no. 1, 161–185.
- [4] H. Hashimoto and T. Kinoshita, On the construction of the orthonormal wavelet in the Hardy space $H^2(\mathbb{R})$, preprint.
- [5] Y. Ha, H. Kang, J. Lee and J. K. Seo, Unimodular wavelets for L^2 and the Hardy space H^2 , *Michigan Math. J.* **41** (1994), no. 2, 345–361.
- [6] E. Hernandez and G. L. Weiss, *A First Course on Wavelets*, CRC Press, New York, 1996.
- [7] E. Meyer, *Ondelettes et opérateurs. I. Ondelettes*, Hermann, Paris, 1990. [English translation: *Wavelets and operators*, Cambridge University Press, 1992]
- [8] ヘルナンデス・ワイズ, ウェーブレットの基礎 (芦野 隆一・萬代 武史・浅川 秀一 訳), 科学技術出版, 2000.

Institute of Mathematics
Tsukuba University
Tsukuba Ibaraki 305-8571
Japan
E-mail address: kinosita@math.tsukuba.ac.jp

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 木下 保