Google Colaboratory を用いた実験数学教材の開発

-Pythonで完全数・メルセンヌ素数を探究する-

A Development of Experimental Mathematics Materials in Google Colaboratory Environment

-Inquiring about Perfect Numbers and Mersenne Primes in Python-

東京理科大学・理学研究科・科学教育専攻　松本　昌也
東京理科大学・理学研究科・科学教育専攻　清水　克彦
Masaya MATSUMOTO, Katsuhiko SHIMIZU
Program of Mathematics and Science Education, Tokyo University of Science

ABSTRACT

高等学校における数学や理数探究の目標として, 創造性の育成や新しい知識の創造に向けて粘り強く挑戦する力の育成が求められている. この力を育成するための1つの数学的活動として実験数学がある. 数学的対象に実験することで推測の生成（暗示的接触）と他の事実による推測の信頼性の増加（支持的接触）を行うことができ, 知識の発見の役割が果たせる. またCAS機能を備えた数学ソフトウェアを用いることで, より多く煩雑な計算を実行することが可能になる. 本研究ではGoogle Colaboratoryを用いた実験数学環境としての利用を提案し, 教材の開発と実践を行った.ARCSモデルに基づく質問40項目を作成実施し,Spearmanの順位相関係数を分析を行った. その結果, コンピュータの利用が数学を学ぶ際の学習意欲の向上に有効であることや, 数学と情報の教科横断的な授業の可能性が示唆され,Google Colaboratoryの実験数学環境における利用も有効であることを同定した.

キーワード:実験数学・数学実験・理数探究・数学教育・情報教育・教育工学
コンピュータ・Python・Google Colaboratory・ICT教育

1　はじめに

平成30年告示高等学校学習指導要領数学科の目標の中で「創造性の基礎を養う」[1,p.23]と述べられており, また理数編の目標のなかでは,「多角的，複合的に事象を捉え，数学や理科などに関する課題を設定して探究し，課題を解決する力を養うとともに創造的な力を高める」[2,p.9]と述べられており, 創造的な力の育成と新たな価値の創造に向けて粘り強く挑戦する力の育成が求められている. 中村[3]は「創造性の基礎」を「見つける」「つくる」観点と捉え, この観点を達成するためには「ICT を活用しなければ十分に達成できないかもしれない」と指摘している. また

渡辺 [4,pp.110-113] は数学教育におけるテクノロジー活用の有用性として「問題解決における数学の視覚化における Technology 活用の有用性」「数学問題発見のための Technology 活用の有用性」「創造性育成のための補助としての Technology 活用の有用性」の 3 点をあげている. これらの指摘から創造性の基礎の育成を行う数学的活動にはコンピュータの利用が重要であることがわかる. この創造性の基礎の育成の一つの方法として, 清水 [5,6] は「コンピュータを用いた実験数学」をあげており, 松本は [7,8] は高等学校理数探究基礎における実験数学を利用した探究型授業のモデルを提案した（図 1）. そこで本稿では, 実験数学と創造性の育成, 学習意欲の関連性をもとに実験数学を取り入れた数学的活動の考察を行い, 高等学校における Google Colaboratory の教育的利用の教材の提案をする. また Google Colaboratory を用いた実験数学教材の実践からの有効性の検証を行い, さらなる教材の開発を行う.

2　実験数学と創造性の育成

実験数学の定義として, 数学教育の中で利用されているのが山本 [9,p5] による定義である. 山本は数学における実験として 2 つの概念を導入し, 特徴を述べている.

- **数学実験**　的確な実験により, 知識, 技術を修得し, 定着させる.
- **実験数学**　多くの実験を通して, 新しい知見を得る.

数学実験は定理や法則が実際に成り立っていることを確かめる実験であり、実験数学は様々な事例から予想を立てたり検証していく実験のことを指す. すなわち数学を研究する際の方法の 1 つである. また山本 [9,p5] は「単に数学研究の技術としてではなく, 数学の学習の方法としても有効である」と述べている. この観点から実験数学は数学科の授業内での学習法と理数探究での生徒の数学の研究活動どちらにも有効な活動であると捉えられる. さらに山本 [9,p.6] は「数学教育の現場においては,「例」や「例題」,「演習問題」が数学実験にあたり,「いろいろな場合について調べてみよう」などが実験数学にあたる」と述べている. この数学における実験的性格に関して, 文部科学省平成 4 年高等学校数学指導資料指導計画の作成と学習指導の工夫 [10,p92] では「数学は論証の学問であると言われる. そのこと自体は正しいのであるが, 数学の定理の発見や発展は必ずしも論理のみによるものではない. 歴史を調べると, まず具体的な実例による「実験」を通して深い洞察により, 結果の予測が行われ, その後に厳密な証明が与えられるという形で, 数学の理論が作られた場合が多い.」と述べられている.

実験数学を用いた数学的活動は創造的で数学における新しい知識を得る際に有効な活動である. 実験数学を通して, 定理や法則を発見し, さらにそれを一般化することで新しい知を作り出すことができ, この活動は数学の研究者が行う数学知識の創造と類似している. この実験を通して得られた結果から知識を創造する際の過程

において,G.Polya[7] は数学的の観測に基づいた推測の生成を「暗示的接触」といい, 他の事実による推測の確証によるの信頼性の増加を「指示的接触」と呼んでいる. このことを踏まえると, 実験数学は知識の発見の役割を果たすことが可能であると考える.

これまで行われている実験数学に関する先行研究では, 数学的対象に対して, 暗示的接触を行うことで, 一つの推測・仮説を立て, さらなるデータを集めるために多くの具体例にあたり, 支持的接触を行う活動が一般的であった. この支持的接触に関しては「反例探し」も含まれると捉えることができる. またこの仮説が正しい際には証明に繋がっていくが, 反例が見つかった際のプロセスについてあまり言及がない. 実際に実験数学を行うと誤った推測を立てることは当然起こるが, その誤りに基づいて推測の条件を変えることによって正しい推測が立てる可能性がある. 新たなる疑問に対して, テクノロジーを利用した実験数学を通して, 確信・解決・証明・反証などを取り組みを入れるような, 実験数学のプロセスをより明確化 (図 1) した. 問の派生は考える対象を解決する際に, 実験する対象を決めるプロセスであると考えた.

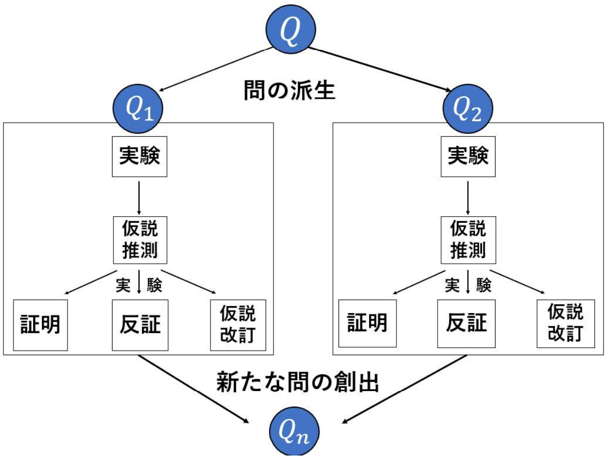

図 1: 開発した数学探究プロセス

実験数学におけるコンピュータを利用するメリットとして,「① 莫大な計算をすることができる②規則性の推測・発見③多くのデータから推測の確証や反例探し」をあげることができる. この活動で身に付けさせたい能力は計算力ではない. 計算をコンピュータで行うことで, 具体例を検討することに多くの生徒が参加しやすくなり, またその結果から定理や命題を作っていく「創造性の育成」に力を注ぎ指導がしやすくなる. 莫大な計算をコンピュータが行えることを関して, 学習指導要領 [1,p.8] では「現代では多くの問題が数学的に整理されコンピュータの活用によって解決されており，各分野で数学の果たす役割は極めて大きくなっている。そのため，数学教育でコンピュータなどを積極的に活用することも重要である. これまで，学校数学の問題は解答の便宜のため簡単な数で解答できるように工夫されたものが多かった。しかし，コンピュータなどが活用できるようになった現在では,

高等学校数学においてもより現実の世界を反映した問題を取り扱い，社会や生活との関連を重視した学習が可能となってきている. そのような学習は，数学の学習に対する関心や意欲が高くない生徒にも数学を学習する意義を認識させ，意欲を高め数学的な力を伸ばすことにもつながると考えられる。」述べられている. 操作的・実験的な方法をコンピュータを用いることで, 探索的, 発見的な指導を行うことが可能であり, また学習意欲の向上も促せることも考えられる.

3　Google Colaboratory の実験数学環境利用の検討

本研究では Google Colaboratory を用いた.Google Colaboratory は「ブラウザから Python を記述、実行できるサービス」である.Google Colaboratory のメリットとして「①ブラウザ上で実行ができる②環境構築が不要であり, 無償で利用可能.③共有を行うことで, 協働学習が可能」をあげることができる.

ブラウザ上で環境構築が不要な言語として JavaScript もあるが, この Google Colaboratory によって Python も実行可能となった. 特に最大のメリットとして, 共有を行うことで協働的な学習ができることである. 生徒が作成したプログラムを簡単に共有できるため, 例えばオンライン上での探究を実現するために, お互いに画面をみながら, プログラムを作成することができたり, リンクを共有しておけばグループの人が欠席した際も, 探究活動を進めることができる. 完成したプログラムを教員に提出することもできるので, プログラミングのテスト等にも利用できたり, 統計教育においてのソフトウェアの活用としてもこの Google Colaboratory は効果的であると考える.Google Colaboratory を使用するためには,Google アカウントが必要ではあるが,Google Classroom を活用している学校であれば,Google アカウントを１人１つでももっていることが想定される. 今後普通教科情報でのプログラミングが導入されたり, 数学教育での統計教育が充実されることから,Google Colaboratory の中学高校での利用も増えていくと考えている.

```
[57] from sympy import symbols,factor,solve #sympyから使うクラスをインポート
     x,y = symbols('x,y') #x,yは文字であることを定義
     ex = x**2 - y**2
     factor(ex) #因数分解
```

$$(x-y)(x+y)$$

```
[58] f = x**2+x+1 #多項式f(x)を定義
     solve(f) #2次方程式f(x)=0を解く
```

$$\left[-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right]$$

```
[59] x,y=symbols('x,y')
     expr1=2*x+3*y-6
     expr2=3*x+2*y-12
     solve((expr1, expr2)) #連立方程式を解く
```

$$\left\{x: \frac{24}{5}, y: -\frac{6}{5}\right\}$$

```
[60] import sympy #モジュールをインポート（クラスは指定しない）
     sympy.var("x y") # 記号xを定義
     f = 1/sympy.cos(x) # f(x)=1/cos(x)
     i = sympy.integrate(f, (x, 0, sympy.pi/4))# f(x)を0からπ/4までxで積分する
     i = sympy.simplify(i)# 数式をまとめる（整理する）
     i#表示
```

$$\frac{\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)}{2}-\frac{\log\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}$$

図 2: Python における数式処理

またPythonはCASの機能を備えている.sympyモジュールをインポートすることにより,mathematicaなどと同様の数式処理を行うことができる.例えば,方程式を解くことや積分計算も行える(図2).小池[11]が紹介する実験数学の一例であるx^n-1の因数分解と円分多項式の関係をPythonのCAS機能を利用すると次のような教材を作成することができ（図3）,さらに$x^n-1=0$の複素数解を求め,複素数平面上に図示することも可能である（図4）.

```
[1] from sympy import Symbol,factor
    from IPython.display import display
    x = Symbol('x')
    for n in range(1,10+1):
      phy = x**n - 1
      phy = factor(phy)
      display(n,phy)
```

1
$x-1$
2
$(x-1)(x+1)$
3
$(x-1)(x^2+x+1)$
4
$(x-1)(x+1)(x^2+1)$
5
$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$
6
$(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$
7
$(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$
8
$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$
9
$(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$
10
$(x-1)(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^4+x^3+x^2+x+$

図 3: x^n-1の因数分解

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
#s=cosθ,t=sinθとして,単位円の図示
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
s = np.cos(theta)
t = np.sin(theta)
figure, axes = plt.subplots(1)
axes.plot(s, t)
axes.set_aspect(1)
#input関数にてnを決めることでx^n-1=0の複素数解を図示(実部,虚部を実平面にプロット)
n = input()
expr = pow(x,int(n))-1
a =solve(expr,dict=True)
for i in range(0,int(n)):
  z = a[i]
  display(z)
  z = complex(z[x])
  re = z.real
  im = z.imag
  axes.scatter(re, im)
plt.show()
```

```
10
{x: -1}
{x: 1}
{x: -1/4 + sqrt(5)/4 - I*sqrt(sqrt(5)/8 + 5/8)}
{x: -1/4 + sqrt(5)/4 + I*sqrt(sqrt(5)/8 + 5/8)}
{x: 1/4 + sqrt(5)/4 - I*sqrt(5/8 - sqrt(5)/8)}
{x: 1/4 + sqrt(5)/4 + I*sqrt(5/8 - sqrt(5)/8)}
{x: -sqrt(5)/4 - 1/4 - I*sqrt(5/8 - sqrt(5)/8)}
{x: -sqrt(5)/4 - 1/4 + I*sqrt(5/8 - sqrt(5)/8)}
{x: -sqrt(5)/4 + 1/4 - I*sqrt(sqrt(5)/8 + 5/8)}
{x: -sqrt(5)/4 + 1/4 + I*sqrt(sqrt(5)/8 + 5/8)}
```

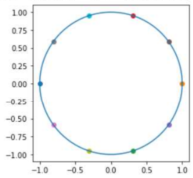

図 4: 複素数解の図形的意味

4 開発した教材とプログラムの一部

4.1 教材とプログラムの概要

```
[ ] #約数を列挙する(いじらない)
    def div(n):
        divisors = []
        for i in range(1, n+1):
            if n % i == 0:
                divisors.append(i)
        return divisors
```

```
[ ] #完全数を出してくれる（いじらない）
    def perfect_number(n):
        for i in range(1, n+1):
            if sum(div(i))-2*i == 0:
              print(i)
```

```
[ ] #素因数分解電卓の定義（いじらない）
    def prime_factorization(n):
        factor =[]
        i=2
        while n >= i:
            if(n % i == 0):
                n /= i
                factor.append(i)
                i = 1
            i+=1
        return factor
```

図 5: 利用するプログラム

開発した教材は理数探究基礎における数学の研究方法の体験という位置づけで実施することを想定し, コンピュータを通して行った実験を通して仮説をたて, 大きな数で実験を行い, 確証を得て証明を行ったり, 反例が見つかった場合仮説を改訂したりすることに着目をした. テーマとしては学習者が前提知識をあまり要しない整数論の中から, 未解決問題も含むテーマとして完全数を取り上げた. 利用するプログラムは図 5 である. 数式処理がブラックボックスにならず, 生徒が理解しやすいように「条件分岐」・「ループ」・「リスト」への追加とした. 完全数は $\sigma(a)$ を a の正の約数の総和とし,$\sigma(a)-2a=0$ を満たす a のことであることを強調することで, 完全数の定義とプログラムを理解させる手掛かりになると考える. 授業の準備としては, 学習者は Google アカウントを発行する. また, 学習者が使うであろうプログラムを事前に用意し, リンクを共有する.

4.2 教材の展開

導入として完全数の定義とプログラムの説明を行い, まずプログラムを利用して 10000 までの完全数を書き出す. また整数の性質を見るため, 素因数分解を行うことを伝え, 発見した完全数を素因数分解を行う. 実際 10000 までの完全数を素因数分解すると, $6=2\cdot 3,\ 28=2^2\cdot 7,\ 496=2^4\cdot 31,\ 8128=2^6\cdot 127$ またこの観察をもとに,$2^{n-1}, 2^n-1, 2^{n-1}\cdot 2^n-1$ の関係を見るため表 1 を完成させる.

```
#2の累乗とメルセンヌ数
for num in range(1,20):#rangeの範囲を変える
  print(num,2**(num-1),2**(num)-1,2**(num-1)*(2**(num)-1))
```

図 6: メルセンヌ数と完全数の関係のプログラム

n	2^{n-1}	2^n-1	$2^{n-1}(2^n-1)$
1	1	1	1
2	2	3	6
3	4	7	28
4	8	15	120
5	16	31	496
6	32	63	2016
7	64	127	8128
8	128	255	32640

表 1: メルセンヌ数と完全数

n	M_n	M_n は素数か	$2^{n-1}M_n$	$2^{n-1}M_n$ は完全数か
1	1	×	1	×
2	3	○	6	○
3	7	○	28	○
4	15	×	120	×
5	31	○	496	○
6	63	×	2016	×
7	127	○	8128	○
8	255	×	32640	×
9	511	×	130816	×
10	1023	×	523776	×
11	2047	×	2096128	×
12	4095	×	838656	×
13	8191	○	33550336	○

表 2: メルセンス素数であることと完全数の関係

上記の活動では (3) その形で表される数にはどんな性質があるのかの検討へと展開する. 表を埋めることで予想を次のように立てられると考えられる.

$$\text{自然数 } n \text{ が素数ならば } 2^{n-1}(2^n - 1) \text{ は完全数である}$$

しかしこの仮説は偽であることがのちの実験でわかる. ここで仮説を変更するという体験をするために間違えた仮説を推測されるようにした.

次の展開として $2^n - 1$ の値をメルセンヌ数と呼ばれること, また $2^n - 1$ が素数のときメルセンヌ素数という用語を導入し, メルセンヌ数と完全数の関係を調べるために,Google Colabratory を利用し, 以下の表の「M_n 素数であるかどうか」,「$2^{n-1}M_n$」,「$2^{n-1}M_n$ が完全数かどうか」を埋めてもらい予想を立てさせる.

$$2^{n-1} \text{ が素数であるとき,} 2^{n-1}(2^n - 1) \text{ は完全数である}$$

この結果 (2) の予想と合わないことに気づき, 予想の修正を行う必要が生じる. そして, より大きな数を見ていくことで新しい仮説にたどり付くことができる. これは図１のプロセスにおいて, 新しい問（仮説）の創出に該当する. またデータの整理の仕方の重要であることを強調することがこの教材から体験できるように作成した.

最後の展開として, この見つけた予想からより大きな完全数を Google Colaboratory を用いて発見してもらう活動をおこなう.

5 授業実践と結果の分析-質問紙調査における相関分析-

5.1 授業実践

2021 年 5 月 19 日に大学生大学院生 25 名を対象に開発した教材の授業実践をおこなった.ARCS モデルに基づく質問 40 項目を作成し, あてはまる順に 4 段階で得点化してもらった.

表 3: スピアマンの順位相関係数 (n=25)

	質問 1	質問 2	質問 5	質問 6	質問 9	質問 10	質問 11	質問 12	質問 17	質問 18	質問 21	質問 30	質問 31	質問 32	質問 34	質問 38	質問 39	質問 40
質問 1	1.000																	
質問 2	**0.765**	1.000																
質問 5	0.291	0.412	1.000															
質問 6	0.442	**0.655**	0.405	1.000														
質問 9	0.445	**0.678**	0.213	0.761	1.000													
質問 10	0.546	**0.672**	0.368	0.399	0.635	1.000												
質問 11	0.554	**0.660**	0.512	0.472	0.342	0.367	1.000											
質問 12	0.291	0.412	**0.690**	0.182	0.263	0.503	0.512	1.000										
質問 17	0.494	0.642	0.251	0.378	**0.680**	**0.707**	0.395	0.503	1.000									
質問 18	0.492	0.579	0.330	0.459	0.648	0.527	0.554	0.584	**0.691**	1.000								
質問 21	0.456	0.592	0.199	0.479	0.560	0.511	0.219	-0.011	0.347	0.221	1.000							
質問 30	0.123	0.209	0.182	0.265	0.257	0.442	-0.226	0.182	0.148	0.159	0.195	1.000						
質問 31	0.067	0.132	0.228	0.168	0.165	0.491	-0.282	0.228	0.047	0.055	0.255	**0.901**	1.000					
質問 32	0.581	0.573	0.406	0.466	0.392	0.504	0.576	0.406	0.462	0.605	0.311	0.132	0.035	1.000				
質問 34	0.402	0.380	0.373	0.333	0.423	0.446	0.219	0.373	0.387	0.369	0.176	0.335	0.212	**0.676**	1.000			
質問 38	0.233	0.425	0.001	0.408	0.476	0.202	0.272	-0.254	0.246	0.168	**0.665**	-0.022	-0.104	0.134	0.050	1.000		
質問 39	0.348	0.443	0.214	0.250	0.286	0.428	0.430	-0.052	0.337	0.178	**0.701**	-0.091	0.014	0.338	0.134	**0.654**	1.000	
質問 40	0.487	0.690	0.451	0.487	0.541	0.547	0.386	0.177	0.405	0.266	**0.798**	0.067	0.157	0.322	0.291	0.489	**0.678**	1.000

5.2　結果の分析

5.2.1　Google Colaboratory の実験数学環境としての有効性

Google Colaboratory を利用したプログラミングを実験数学環境に関しての利用を分析するために,Spearman の順位相関係数 (n=25) による相関分析を行った. 紙面の都合上, 有意な相関が含まれる項目のみ掲載した (表３). また表４は全質問の平均値と SD である (質問番号 24 は反転).

質問 30「考える力を高める上で今回のような活動は有効であると思う」と質問 31「コンピュータを使うことで自分が数学を学ぶときの助けになると思う」に ($\rho = 0.901$), 質問 10「コンピュータを使った数学の研究のやり方を理解することができた」と質問 17「定理や性質の発見が身近に感じられたと思う」に ($\rho = 0.707$), 質問 1「コンピュータを使った数学の活動はおもしろかった」と質問 2「性質を自分で見つけ出すのは面白かった」に ($\rho = 0.765$) 強い相関が見られ, コンピュータの利用が学習者の数学に対する学習意欲の向上に大きな影響を与えていることやコンピュータの利用をすることで発見したり数学を作っていく経験をすることができたと考えられる. また質問 2「性質を自分で見つけ出すのは面白かった」と質問 6「活動を通して意欲的に取り組めた」($\rho = 0.655$) や質問 11「数学を発見したり作っていくこと楽しかった」($\rho = 0.660$) に正の相関が見られた. 数学における発見的な活動は学習者の学習意欲と関係があることがわかる. 質問 5「なぜ成り立つのかを考えてみたくなった」と質問 12「自ら進んで取り組むことができた」($\rho = 0.680$) の正の相関があることからも分かる. この点から発見した性質が成り立つ理由を学習者が自発的に考えることで, 学習意欲や知的探究心の向上に関係があることがわかる. すなわち, 発見的な学習の時間とその理由を考える時間の両方のバランスをとることで, 学習意欲に大きな影響を与えると考える. 今回 Google Colaboratory を利用することで, 具体例を簡単により多く作ることが可能となり, 性質の発見に時間を割くことが可能となったため, 学習者全体が自発的授業に参加してくれたと考える.

以上を踏まえると,Google Colaboratory を用いた実験数学環境としての利用をすることで推測をすることが可能であり, これまでの先行研究と同様に学習意欲をもって主体的な活動ができたことがわかる. プログラミング環境でも十分に実験数学が可能であることがわかる.

5.2.2　プログラミング」を用いることの可能性

今回の実践ではプログラムを指導者が作成し利用した. 質問 38「今回使ったプログラムは使いやすかった.」と質問 39「今回使ったプログラムは役に立った」($\rho = 0.654$) に正の相関がある. これらは平均値が高いことから, 学習者は積極的にプログラムを利用している様子がわかる. また質問 21「それぞれの設問の難易度は適切だった」と質問 38($\rho = 0.665$) や質問 39($\rho = 0.701$) 正の相関がある. プログラミングを利

用した数学の授業を行う際,学習者のレベルにあった問題やプログラムの作成が重要になることが考えられるため,数学と情報との教科横断的な授業において学習者の学習内容や理解度を考慮した上で考える必要がある.この点を踏まえると段階的にプログラムを学生自身が発見したい内容に対して作成をしていくことでより探究として深みがでる実験数学が可能になると考える.さらに質問 38 の平均値 (3.44 点) から Google Colaboratory はリンクを共有しやすく,また画面が見やすく使いやすいため,学習者は学習内容以外で学習が止まることなく学べ,学習者はプログラミングがあまり得意でなくても授業には参加できていることがわかる.この観点から見ても Google Colaboratory の利用は有効であることが示唆された.

表 4: 全質問調査における (n=25)

質問番号	質問内容	平均値	SD	質問番号	質問内容	平均値	SD
1	コンピュータを使った数学の活動はおもしろかった	3.76	0.43	21	それぞれの設問の難易度は適切だった	3.40	0.63
2	性質を自分で見つけ出すのは面白かった	3.60	0.57	22	いろんな視点から探究することができた	3.12	0.71
3	具体例を作り出すのは楽しかった	3.52	0.50	23	問に順々に取り組むことで自分でもやれそうだと思った	3.40	0.57
4	立てた予想に対して様々な具体例で試してみようと思った	3.36	0.74	24	今回の教材は取り組みにくかった	2.80	1.06
5	なぜ成り立つのかを考えみたくなった	3.32	0.61	25	性質や定理の発見は自分でも取り組むことができると感じた	2.84	0.67
6	活動を通して意欲的に取り組めた	3.48	0.57	26	予想を証明することが大変だと感じた	3.60	0.49
7	集中して取り組むことができた	3.40	0.63	27	探究、研究するのは自分でもできると感じた	3.16	0.61
8	教材の指示が分かりやすく、コンピュータの操作がしやすかった	3.44	0.70	28	ほかの教材についても今回の取り組み方をしていきたいと思う	3.44	0.50
9	活動中は興味をもって取り組めた	3.56	0.50	29	数学の活動においてコンピュータを使うことは有効であると思う	3.72	0.53
10	コンピュータを使った数学の研究のやり方を理解することができた	3.40	0.57	30	考える力を高めていく上で今回のような活動は有効であると思う	3.76	0.43
11	数学を発見したり作っていくことは楽しかった	3.64	0.48	31	コンピュータを使うことで自分が数学を学ぶときの助けになると思う	3.72	0.45
12	自ら進んで取り組むことができた	3.32	0.61	32	数学の定理や法則の発見の仕方を知ることができたと思う	3.44	0.57
13	普段しない数学の学習の体験だったと思う	3.68	0.55	33	見つけた定理に満足したり驚いたりした	3.32	0.55
14	法則を見つける活動は数学の力を伸ばすために大切さだと思う	3.60	0.69	34	今回見つけた性質をよく知ることができたと思う	3.36	0.56
15	定理や性質の発見する数学の学習は初めて体験だった	2.88	0.95	35	今回の活動のテーマをさらに調べていきたいと思う	2.96	0.66
16	手計算を通しても法則を見つけることができたと思う	2.32	0.93	36	今回の活動に自分は満足できた	3.44	0.57
17	定理や性質の発見が身近に感じられたと思う	3.28	0.72	37	Google Colabolatory は使いやすかったと思う	3.48	0.70
18	整数の性質を利用して考えることができたと思う	3.36	0.62	38	今回使ったプログラムは使いやすかった	3.44	0.64
19	学習時間は十分だった	3.40	0.80	39	今回使ったプログラムは役に立った	3.56	0.57
20	今回の数学のテーマは面白かった	3.88	0.32	40	数学の研究の方法を知ることができた	3.52	0.64

6　発展的な教材の可能性

メルセンヌ数 2^n-1 を 3^n-1 と条件を変更してみる.このとき必ず偶数になってしまうので,$P=\frac{3^n-1}{2}$ としてこれを「3 を底にするメルセンヌ数」と名付けて探究させることもできる.図 7 のようなプログラムで実行できる.

```
[9] def Mer3(num):
      P = (3**(num)-1)/2
      return P

for i in range(1,21):
  print(i,int(Mer3(i)),prime_factorization(Mer3(i)))

1 1 []
2 4 [2, 2]
3 13 [13]
4 40 [2, 2, 2, 5]
5 121 [11, 11]
6 364 [2, 2, 7, 13]
7 1093 [1093]
8 3280 [2, 2, 2, 2, 5, 41]
9 9841 [13, 757]
10 29524 [2, 2, 11, 11, 61]
11 88573 [23, 3851]
12 265720 [2, 2, 2, 5, 7, 13, 73]
13 797161 [797161]
14 2391484 [2, 2, 547, 1093]
15 7174453 [11, 11, 13, 4561]
16 21523360 [2, 2, 2, 2, 2, 5, 17, 41, 193]
17 64570081 [1871, 34511]
18 193710244 [2, 2, 7, 13, 19, 37, 757]
19 581130733 [1597, 363889]
20 1743392200 [2, 2, 2, 5, 5, 11, 11, 61, 1181]
```

図 7: 3 を底にするメルセンヌ数のプログラム

例えば観測できることとして,n が偶数のとき,P は 4 の倍数になっていることや n が 4 の倍数のとき,P は 5 の倍数,n が 3,7,13 のときは P が素数などである.ここから P が素数になる条件やその数の性質などを調べることができ,より広がった探究を行わさせる可能性がある.

7　まとめ・今後の課題

実験数学における創造性の育成の検討と理数探究基礎における数学と情報の教科横断的な授業を通して, 数学を作っていく取り組みが学習意欲向上に効果があることを確認できた. そのため今後理数探究基礎における実験数学の利用は有効であり, さまざまな導入教材を作成することで多くの探究的な取り組みができると考えられる. これらの活動では Python のプログラミングの学習がある程度進んでいないと利用しにくいことが予想されるが, 数学科と情報科の連携によって,Geogebra などの統合型ソフトよりも創造性の育成等の観点から多くの可能性を秘めていると考えられる. 今後もプログラミングを用いた数学教育教材に関しての有効性を検討していきたい.

謝辞

本研究は科学研究費補助金基盤研究（C）21K02931（代表清水克彦）の助成を受けた.

参考文献

[1] 文部科学省.(2018). 高等学校学習指導要領解説 理数編.

[2] 文部科学省.(2018). 高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編.

[3] 中村好則.(2015). 高校数学科における ICT を活用した指導とその意義. 岩手大学教育学部附属教育実践総合センター研究紀要　第 14 号　pp.37-45.

[4] 渡辺信.(2021). 創造性育成を目指す数学学習. 京都大学数理解析研究所講究録. 第 2178 巻.pp.109-113.

[5] 清水克彦.(2010). 実験数学による創造性の育成についての検討一 テクノロジーによる帰納・類比そして推測の導入一. 日本科学教育学会年会論文集 34.pp.97-98

[6] 清水克彦.(2013). 数学教育における「実験」の機能とコンピュータの活用. 日本科学教育学会年会論文集.37.pp.92-95

[7] 松本昌也. 清水克彦.(2021). 高等学校理数探究基礎における実験数学を用いた数学研究方法の基礎的検討 -RLA と SRP に基づいた数学探究モデル. 日本科学教育学会年会論文集 45. pp.317-320.

[8] 松本昌也.(2021). 高等学校理数探究基礎における実験数学を用いた授業モデルの提案と授業実践-RLA と SRP に基づいた探究モデルによる創造性の育成を目指して-. 日本数学教育学会第 54 回秋期研究大会発表集録.pp.177-180

[9] 山本芳彦.(2000). 実験数学入門. 岩波書店.

[10] 文部科学省.(1992). 高等学校数学指導資料指導計画の作成と学習指導の工夫

[11] 小池正夫.(2010). 実験・発見・数学体験. 数学書房.

[12] Amit Saha. 黒川利明訳.(2016).Python からはじめる数学入門. オライリージャパン

[13] Carl Winsløw.Yves Matheron.Alain Mercier.(2013)Study and research courses as an epistemological model for didactics. Educational Studies in Mathematics. 83(2).pp.267-284

[14] Eilers Soren, Rune Johansen.(2017).Introduction to Experomental Mathematics. Cambridge University Press

[15] G.Polya.(1958). Mathematics and Plausible Reasoning vol.1 Induction and Analogy in Mathematics.Princeton Univ Pr

[16] David H.Bailey, Jonathan M. Borwein, Neil J.Calkin, D.Russell Luke, Roland Girgensohn, Victor H.Moll.(2007). Experimental Mathematics in Action. A.K. Peters Ltd.

[17] Joseph H.Silverman. (2006). A Friendly Introduction to Number Theory [Third Edition]