継続する数学的思考の重要性

生涯学習数学研究所　渡辺信

Shin Watanabe
Life Long Education on Mathematics Research Institute Japan

1.　はじめに

我々の社会では変革が現れた。現在の社会を Society5.0 と呼んでいる。この社会変化は Technology の発展によって引き起こされたことは疑う余地はない。学校教育においては GIGA スクール構想によって、小学生に一人 1 台のコンピュータが与えられた。この情報機器はコロナ感染症の影響で Online 教育をせざるを得ない状況に追い込まれた結果、通信手段としての Technology 活用が社会の中に一気に広がった。学校教育にかかわる教員・学生・生徒の Technology 活用の技能は予想以上に進んだ。大学の講義は Online が中心で Technology を使わざるを得ない状況に追い込まれた。

Technology の発展が社会を変えることは、今までの歴史をみると必然的に起こってきた。この変化は長い時間をかけて徐々に起きたことであった。現在の社会は新しい変化が急速に進んでいるのであろう。日々の生活では「お金」を見なくなった。消費税の導入を可能にしたシステムは人々の計算技能を低下させた。交通機関では駅員の業務が変わった。社会の変化は経済活動にも、仕事の内容にも変化が現れているが、産業革命のような社会変化が見えてこない。おそらく現在の状況は日々目まぐるしく変化しているのであろう。

このような状況の中での学校教育における数学学習について Technology はほとんど使われようとはしていない。Technology が数学学習に影響を及ぼすことはなく、この社会の変化に対しても学校教育は現状を固く守り通している。数学教育現代化の失敗以降、日本の数学教育は「計算技能教育」が中心であり、この方針が Technology 活用を阻止している。しかし、数学技能は Technology に置き換えられる現在の状況は学校教育に影響を及ぼすのは目に見えて明らかである。数学技能が Technology によって置き換えられても、数学的思考力は身に付けるべき教育の重要な位置は守り通すであろう。

世界の教育は学校に通学することが教育ではなく、数学教育の内容も大きく変化をしている。教育の目標が生涯学習を目指し、学習の重要性はますます強調されると同時に、今までには見られない教育活動が Technology によってもたらされるであろう。現在の変化の時代の中で、数学教育が技能中心から変化している中で、どのように変化をしているかを Technology によって数学技能が置き換えられる姿をみてみたい。

2.　変化のない数学教育の現状

Technology が社会を変える中で、変化がまったく見られない学校教育における数学教育を考える。学校教育における数学の位置づけは問題を解くことにある。数学嫌いの解消を目指すことはなく、数学嫌いは当然のこととして社会が認めている。このような状況で数学授業はつまらないと感じている高校生は 80%を超えるという。このような状況の下で実施された文部科学省の算数・数学学力テストのアンケート調査によると次のような結果が出ている。

表 1. 学力調査における数学は役立つについての答え

算数の授業で学習したことは、将来社会に出たときに役立つと思いますか	小学 6 年生 92.5%
数学の授業で学習したことは、将来社会に出たときに役立つと思いますか	中学 3 年生 76.1%

児童・生徒は数学学習の必要性に対して非常に肯定的であることが分かるが、現場の先生方やこのアンケート作成者は「役立つ」と言わせたいのであって、何に役立つかは聞かない。現在の学校教育では「試験」（入学試験）であって、もし試験制度が変われば数学学習の目的は失われてしまう。小学生の算数計算では買い物があげられた。しかし、今の子どもたちには「おつり」という言葉がなくなりつつあるという。中学生は役立つことを具体的には述べない。

コロナ禍において学校教育は Online になった。Technology の活用では数学教育の内容・方法の変化は見られなかった。各自が持っていた Technology は通信機能を用いることのみで、Technology を用いて数学処理をすることがなかった。数学ソフトの発展は目覚ましいものがあっても、その機能を積極的に活用しようとする動きはない。数学技能における Technology は初めには通信機能は付いていなかった。アメリカで数学授業に使われたグラフ電卓は個人での活用が中心で、いかにしてグループ活動をするかが課題であったが、通信機能がなかったことが数学学習に Technology を導入することに成功した理由の一つに上げられるかもしれない。通信機能の活用が中心であった現状では数学機能が Technology に置き換わらなかった。

数学教育に Technology が入り込めなかったのはなぜであろうか。数学教育の現場で Technology を活用しようとすることに対して、現在の数学教育の成果に満足していることがあげられる。かけ算『九九』の暗唱から計算技能は優れた成果を上げている。あえて Technology を使う理由はないくらいに問題解決では問題点を感じない。数学教育において学習者の能力拡張は順調に行われていると考えるならば Technology 導入の理由はない。数学嫌いの増加・数学学力低下・数学を学ぶ動機付けの乏しさなど、数学教育には外側からは批判があっても、現在の数学教育を改革しようとする意欲が現場にないならば Technology 導入には踏み込まないであろう。現在の数学教育が社会の発展を引き出す力となり、

社会に対して責任を果たしている以上、改革することの必要性を感じないのは当然かもしれない。日々改革してきた教育内容とその教案、教育指導の成果を検討してきた多くの評価をあえて手放すことはないと現場が考えてもおかしくはない数学教育がなされていると考えられる。

しかし、現在の算数・数学教育に対して GIGA スクール構想は新しい数学教育の方向性を求める可能性がある。新しく導入された統計的思考に基づく統計の数学への導入と、プログラミングは数学教育の外側から変革を求める可能性を秘めている。Technology の技術は進み、だれもが通信機能の付いた情報機器を持つ時代になった。会社では机の上に各自のパソコンがある時代になり、社会人の活動ではパソコンが使われるようになった変化は明確である。現在の数学教育に変化がみられる可能性は高い。

3.　数学技能は Technology で置き換えられる社会

アメリカの数学教育においての数学教育の改革は Technology 活用から始まった。数学嫌いの増加と学力の低下に対して、グラフ電卓の活用による数学技能の Technology への置き換えによって生徒が数学を考える楽しさを体験することの可能性を可能にした。与えられた問題を与えられた方法で解くときの計算技能などからの解放は、数学を考える楽しさが中心になった。問題解(Problem Solving)の中心的課題の中に Technology を導入する試みは、生徒から大いに歓迎された。社会の動きを先取りした改革であった。

表 2. 数学技能とその変化

数学技能の育成･役に立つ技能	
計算技能	数値計算 式の値を求める 代数的計算 方程式を解く 微分積分計算
測定技能	長さ・面積・体積 角度等を求める
作図技能	定規とコンパス
統計技能	
整理技能	分類分け 論理的推論
表現技能	関数のグラフを描く
証明技能	証明をする 演繹的思考

Technology で置き換かわる技能	
計算技能	すべての数値計算 CAD システムの導入 計算技能全体
測定技能	
作図技能	定規とコンパスからの解放
統計技能	データサイエンス･AI データの可視化
整理技能	
表現技能	グラフ電卓 グラフ機能の拡張
証明技能	「証明は死んだ」 (4 色問題の証明を契機として)
数学実験	帰納的思考の復活

数学教育において数学の技能をTechnologyで置き換えることには現在の数学教育は消極的である。なぜなら数学教育の根幹を揺るがす問題であり、日本の数学教育の基礎基本にかかわる問題である。現在の数学の評価は計算技能を確かめている。数学教育が目指していることは数学技能を身に付けることであり、この目標をTechnologyに置き換えることはできない。身に付けた数学技能を用いて、与えられた問題を解くことであり、Technologyが入り込む余地がない数学教育を行っている。現在の数学教育が力を入れることが将来も続くと考えている。Technologyの発展は必ず社会を変える。Technologyを使うことによって数学教育は変わる。その時には数学技能は Technology によって置き換えられ、数学教育でやることは Technology を用いて数学を考えることになる。将来のTechnologyが誰もが使える場合、数学教育にとって数学的思考の重要性が叫ばれる。

4.　Technologyを前提にした数学教育

Technologyが使える段階は今すでに近くまで来ている。GIGAスクール構想で一人一台の情報機器を生徒が持ち始めて、プログラミングに活用し、データの個数の多い統計的処理に使い始めたときに現在のままの数学教育は取り残されていくであろう。現在の与えられた問題を与えられた方法で解く数学は、何が面白いのであろうか。すべてが与えられることで、数学教育には主体性がない。数学教育にとってこのような訓練は数学を理解習得するためには重要な方法であるが、Technologyが数学技能のほとんどすべてを処理するようになった段階で、数学の楽しみを味わえる数学教育を探したい。Technologyが数学を考える補助的な役割をするときに、数学として考えている内容が見えるようになると面白い。数学的思考がTechnologyによって見えるようになったことは問題を解く段階で表現する方法が変わり、Technologyが思考の補助をしてくれることによって、考える楽しさの幅が広がったともいえる。与えられるという消極的な立場から、自ら問題を作りだすことによって今までの数学教育が変化する。

表3. 数学教育の現在と未来への変化の方向

与えられた知識 与えられた問題 与えられた解法 問題解決（Problem Solving） 答えを求める作業・訓練 演繹的・抽象的	⇒	知識習得訓練 問題作成・発見 数学実験 数学的思考 仮説発見・予測 帰納的・具体的 逆問題

この変化によって数学を楽しむことは問題を解く技能訓練から、問題を作り仮説を立てる思考へと変化する。数学は考えることであり、その考えることに数学的思考が働き興味関心が移る。Technology は考えることの補助的役割としての役割を担い、途中で必要な数学的技能は Technology を使うことによって数学教育は大きく変化する。数学授業がつまらないという現在の状況に対してその解決策は Technology をいかに活用するかにかかっている。

数学の体系にとって重要な証明をすることに対して、この証明技能の重要性を認めるが、Technology によって置き換えられる可能性がある。4 色問題の解決は Technology によってすべての場合の色塗りを考えたことによって、『証明は死んだ』という意見があった。AI(人工知能)による証明方法も考えられる可能性がある。しかし問題を作り、その問題を解決する過程での仮設作成を整理することによって証明することができる。証明は定理の理解のためにあるならば、仮説を立てる段階の整理をする活動によって作り出せる可能性がある。証明をすることによって数学思考が完成するとも考えられるが、数学的思考の段階で初めから証明が存在することはない。証明を理解する訓練は数学的思考力を高めるために必要不可欠な学習ではあるが、数学を楽しむ段階では証明までの完全な数学を求める必要があるかについては疑問を感じる。

５． Technology 活用を前提とした数学教育の実践例

Technology を積極的に活用し、数学が見える実践例を「W 変換としての 2 次曲線上の法線の交点を求める問題」として挙げる。この実践例の構造をまとめると次のような流れが考えられる。

表 4. 数学活動の流れ

数学の問題を探す	円の場合 2 本の接線に対する法線は常に円の中心に集まる・・・明らかな事実 一般の 2 次曲線の場合を考えてみたい
帰納的な実験	問題の所在を明確にする 放物線の場合を実験してみる
仮説を作る	1 点ではない場合法線の交点の軌跡を求めてみたい どの様な曲線になるか推測して仮説を立てる
再び探索	仮説が正しいかを条件を変えて求めてみる
証明	Technology を用いないで、計算をする 計算の方向は見えている感じがする 証明ができないときは仮説でとどめておく
問題の発展	いろいろな曲線で試みる 条件を変える 新しい問題を見つける

(1)問題の出発点
（ⅰ）点Ａから円に接線を引くと２本の接線が引ける
（ⅱ）交点での法線は必ず円の中心を通る
（ⅲ）円に対してほかの２次曲線に置き換えたときでも、
　　法線の交点はある定点になるであろうか
この問題が今回の出発点である
(2)円を楕円に置き換えて作図を試みる
問題を設定し、いくつか実験してみた。
しかしあまり良い結果は得られなかった。

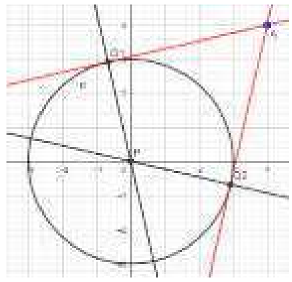
図 1．円での法線の交点

任意の点Ａから接線を引き、その交点での法線の交点は円の中心にはならなかった。
円で成り立つことを楕円で試しても法線の交点は楕円の中心には来ない。この結論は計算をする必要はなく、描かれたグラフから明らかである。出発点を動かすことによって法線の交点も変わることが見える。

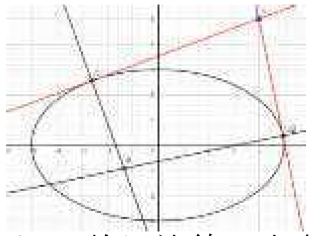
図 2．楕円法線の交点

この問題の図を見ることによって、逆に交点が楕円の中心に来る点の位置を求める問題も発見できる。そして、法線の交点が円の中心になる点Ａの位置を考えたら 6 点のみが得られる。この問題から W 変換という名称を付けることにした。

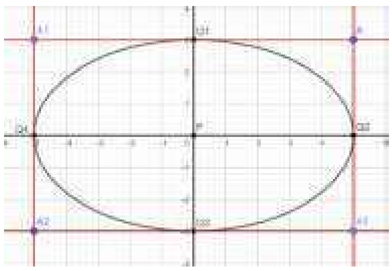

図 3　交点が打鍵の中心に来るときの 4 点と無限遠点

楕円について点Ａを動かして、いろいろと作図すると法線の交点Ｐは不思議な曲線を動くことが実験によってわかる。不思議な曲線になることには興味があるが、やはり軌跡を見るだけではなく「数学」が必要だと思う。この「数学」にするための計算をすることによって具体的にどういう式で表されるかを求めてみたい。また同一の点Ｐを与える原像Ａが何個あるかなど考察してみることにも興味を持った。問題として考えたのは次の 2 点である。
方法論としては実験数学によって試した結果、「数学」として表現できるものを計算してみる。

　問題　点 A に制限を付けたときの点Ｐの軌跡
　問題　点Ｐの原像点 A の位置

　定義　W　変換とは次の変換とする。
　　2 次曲線外の点Ａから 2 本の接線を引き、各接点において法線を作った交点Ｐを求める

一般の場合には内部のＰを通り法線ＰＱ（Ｑ は曲線上の接点)は、Ｑ がＰから同上の点までの距離の極値を与える点になる。楕円(双曲線)でも一般には 4 個あるので、現像はその 4 点での接線同士の交点最大 6 個あることになる。もちろんそれらが合流したり、接線同士が平行になったりして、実際の数はもっと少なくなる場合が多いはずです。(特にＰを主軸上など対称性の強い位置に置いたとき)無限遠点を考慮する必要もある。

一般の楕円や双曲線では計算が大変なので試みとして放物線で試してみました。このときは一つの極値点が無限遠点になりＰを通る法線は最大 3 本。したがって点Ａは最大 3 点になる。はじめに $y=x^2$ に対する計算を試みた。もちろんこれはほんの序の口で、放物線の場合でももっと深く一般の場合について調べる価値がある。「数学を楽しむ」ことに主眼を置いたときには、コンピュータでの数学実験と数学理論とには大きな差があると考えられる。実験数学として自由な発想でいろいろ考える実験は大事なことです。手近な所にいろいろな手頃な問題が転がっているようです。

(3)放物線とＷ変換　初めに簡単な $y=x^2$ を考える。
2 次曲線を放物線 $y=x^2$
（焦点（0.−1/4）準線 $y=-1/4$）
点Ａ（ｕ，ｖ）とし、そこから引いた 2 本の接線の接点をＱ$_1$(q_1, q_1^2)、Ｑ$_2$(q_2, q_2^2) とし、そこでの法線の交点Ｐの座標を(ζ，η)とする。

問題：点Ａ（ｕ，ｖ）→点Ｐ（ζ，η）の変換（および逆変換）の具体式を計算する。

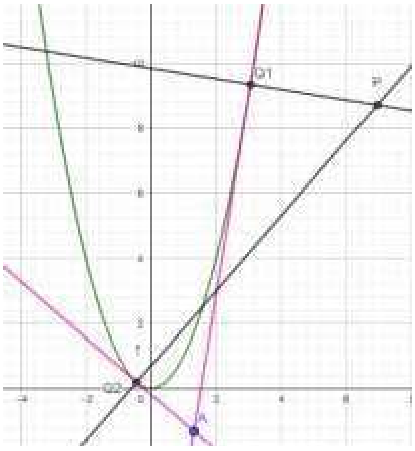

図 4. 放物線への W 変換

放物線上Ｑ(q, q^2)で接線の方程式 $y-q^2=2q(x-q)$、法線の方程式 $y-q^2=-1/2q(x-q)$

$q^2-2uq+v=0$ より　$q_1+q_2=2u \quad q_1q_2=v$

交点Ｐの座法を求める。

$2q_1\eta+\zeta=2q_1^3+q_1 \quad \zeta=-4uv$　u を消去

点Ｐの軌跡　$y=12+4(x/4v)^2-v$

$2q_2\eta+\zeta=2q_2^3+q_2 \quad \eta=1/2+4u^2-v$

点 A が直線上を動くとき軌跡は放物線になる。

点Ａが $y=-1/4$ 上を動くとき　$y=4x^2+3/4$

点Ａが $y=-1$ 上を動くとき　$y=1/4x^2+3/2$

点Ａが $y=-2$ 上を動くとき　$y=1/8x^2+3/4$

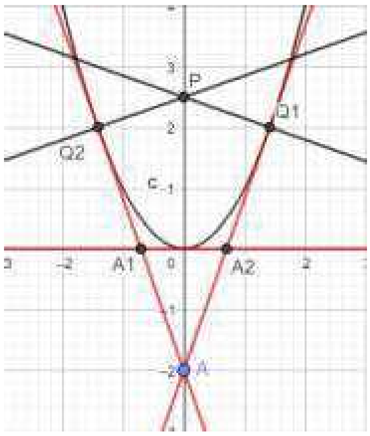

図 5. 点Ｐの原像 3 点

逆変換　点Ｐ（ζ，η）→点Ａ（ｕ，ｖ）

3 次方程式 $16u^3-2(2\eta-1)u+\zeta=0$ の解

点Ｐ（ζ，η）に対して原像点Ａ（ｕ，ｖ）は 3 個ある

（主軸上のときは $u=0$. $\zeta=0$ が分かる）

このような計算をすることは面倒ですが、パソコンの図を見るだけでは見え

ないこともあり、実際に計算することは数学として必要である。これからの数学はコンピュータの図を見ることは「考える補助」として最適と考えられる。このような使用方法として Technology を「考える補助」として活用したい。

問題作成・発見においてコンピュータに頼り問題作成が可能になったことは重要であるが、やはりある程度うまく解けなくては数学としての問題にはならない。問題作成は重要であっても、具体的に計算することによって数学の問題解決は重要になる。さしあたり、問題を探し出す訓練をすることによって、問題解決がより楽しくなると考えられる。

作り出された問題はまず解けるかが問われ、数学の問題になるかを検討しなくてはならない。数学の問題として解けることは条件の過不足を考えることが重要である。条件が多すぎれば（たがいに矛盾する条件では論外だが、そのために正答が見掛け上異なる何通りもの形になっても困る）と言った吟味が不可欠です。同時に具体例はあまり極端な数値にならぬような工夫も必要でしょう。このような数学の問題作成を考えることは今までの数学教育ではやっていなかったために興味深いが、逆に無理に作って計算の困難さを含め混乱を生じないことを考えなくてはならない。今までの数学教育では問題解決に主眼が置かれ、きちんと解けることが前提になっている。

(5)GeoGebra を用いて放物線を考える

規則の発見をしたい。

曲線	点 A の動く位置	P の軌跡
	y=-1/40 準線	y 軸
$y=-1/10x^2$	y=-10	$y=1/40x^2+15$
	y=-20	$y=1/160x^2+25$
	y=-30	$y=1/360x^2+35$
	y=-40	$y=1/640x^2+45$

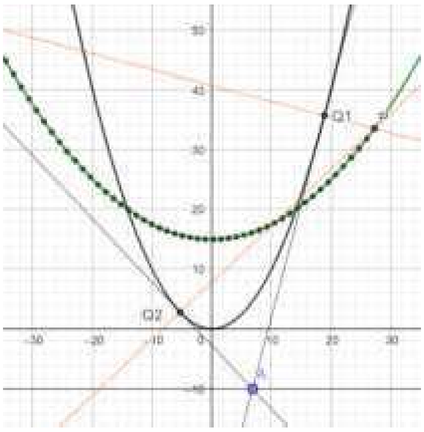

図 6. $y=/10x^2$ で点 A が y=-10 を動く

y =-10 を基準として

y が 2 倍になると係数 1/4

y が 3 倍になると係数 1/9

y が-40 のときは予想通り

点 A が $x^2+y^2=10^2$ 上を動くとき動く軌跡は見ることができるが、この曲線は 2 次曲線ではない。対称性は数学にとって重要であることも見える。計算はできないので図を示す。

Technologyによって計算では見えない結果が見える。

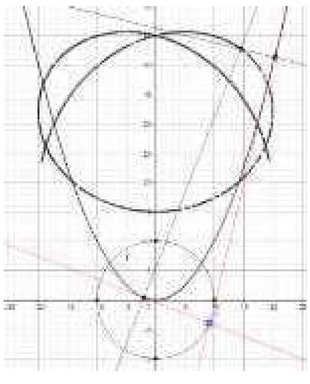

図7. 放物線$y=x^2/10$ 点Aは$x^2+y^2=10^2$上

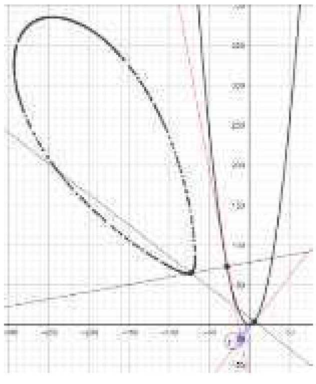

図8. 放物線$y=x^2/10$ 点Aは$(x+20)^2+(y+20)^2=10^2$

この問題は、楕円とW変換、双曲線とW変換などいろいろと考えられる。

６． 変化する数学技能と、変化しない数学的思考

数学教育では Technology によって、最も重要視していた数学技能の訓練に必要性がなくなることが時代の変化であることが分かる。Technology に数学技能が置き換えられても変わらないのは数学的思考である。Technology を用いながら問題解決を行うようになる。この変化を受け入れた数学教育が行われるであろう。以前から「2 次方程式の解の公式などは、日常の生活では使われない」ことを認め、解の公式を求める学習が取りやめられたことがあった。これからは 5 次方程式ぐらいまでは Technology を用いて簡単に解けてしまう。それでも解の公式を求める訓練は必要になる。目的は数学技能の訓練ではなく、数学的思考の獲得である。数学技能としての 2 次方程式の解法は、現在公式として覚え使う訓練になっている。再び同じ問題が指摘されるであろう。その公式の意味も考えず、公式を使って問題が解ければよいという考え方は排除される。訓練し将来役に立つ数学は、個々の知識ではなく数学的思考方法である。数学技能は Technology によって置き換わる時代、数学教育は数学的思考方法を身に付ける必要がある。問題を解く過程での数学技能は Technology を用いてもよいと考え方を変える必要がある。

このような数学的思考に力点を置いた学校教育が、学校を卒業した後でも学習する社会が来るであろう。現在の数学教育は学校の中だけで行われ、社会の中では全く顧みられない。学校の外での数学学習が学校数学学習の延長でなされることは大切である。文系志望の学生が数学学習からの解放を喜ぶ現状を変え、だれもが数学を楽しむ学習を目指したい。

表５．生涯学習を目指した数学教育

	現在の教育	現在の教育の先にあるもの
目的は何か	資格を取る 将来のための先行投資 役立つことを目的	楽しむ
先生の存在	先生と学生 受動的	先生はいない 独学・能動的
方法の違い	与えられた問題を解く 与えられた数学知識を覚える 与えられること	問題作成・発見 自己学習
評価の仕方・必要性	評価は与えられる 試験の重要性	自己評価 評価無し
特色	抽象 演繹	具体 帰納
重点がおかれること	技能	思考

学校を卒業しても続けられる生涯学習を Out School として、現在考えられている生涯学習と区別した。Technology を数学的思考の活動の補助として、学校で学んだ数学を大切にした学習の可能性を追い求めたい。大切なことは数学的思考が身に付いていることで、数学学習が楽しい社会の構築をしたい。このためには数学が社会の文化の中に溶け込むことが必要である。既に存在する数学的思考は継続する。その数学的思考が文化の中で自然にふるまうときに、必要なことは数学技能ではなく、数学的な思考方法である。Technology が日常生活の多くの事柄を変えるであろう。この変化する社会の中で数学の問題を解く楽しさを体得したい。

謝辞

この論文は京都大学にある国際共同利用･研究センターである数理解析研究所の支援を受けました.

参考文献

(1)S.I.Brown, M.I.Walter, いかにして問題を作るか、東洋館出版社、1990

(2)J.Horgan, The Death of Proof, Scientific American, 269(4),P.92-103,(1993)日本誤訳、証明は死んだ,日経サイエンス、第 169 巻、P.116-127,(2010)

(3)J.Mason, L.Burton & K.Stacey、教科書では学べない数学的思考、新評者、2019

(4)G.Polya、数学の問題の発見的解き方Ⅰ, Ⅱ、みすず書房、1964

(5)渡辺信,役立つ数学教育を目指す―計算技能･論理的思考より数学的思考･創造性育成を―,日本数学教育学会,第 40 回数学教育論文発表会論文集、P805-810、2006

(6)S.Watanabe, The aim of mathematical learning at next society, International Conference on Math and Math Learning at Laos, 2018

(7)渡辺信,数学教育にも Technology 活用ー「知ること」と「感じること」ー,日本科学教育学会,第 33 巻 4 号、P.23-26、2019

(8)S.Watanabe, Creativity, Technology and ”Out School”-Interesting Mathematics with Technology dyeing Out School-, The11th International Mathematics Creativity and Gifted Conferences, P.327-334、2019

(9)渡辺信,数学問題から発展学習へー因数分解と合同問題ー,第 52 回全国数学教育学会,2020

(10)渡辺信, Technology はどのような目的で使われるか,日本科学教育学会,第 45 回年会論文集、P369-372、2021