中高生でも楽しめる等角度問題について
～アポロニウスからパスカル、ブリアンションまで～

東海大学・理学部　前田　陽一
Yoichi Maeda, School of Science, Tokai University

1　はじめに

本稿では, 現在世界中で使われている数学ソフトウェア GeoGebra を用いた中高生のための作図問題を提案する. 近年, GIGA スクール構想の取り組みにより, 生徒 1 人に対して 1 台のコンピュータを用いた教育が推進されつつある. この流れの中で, GeoGebra を利用する機会は, 今後ますます増えていくと思われる. しかし, 日本の教育現場では, GeoGebra が十分に活用されているとは言えない現状がある. そこで, 本稿では, 全く GeoGebra に触れたことがない学生でも, 気軽に取り組める, 簡単な作図問題を考えてみる. 個々の生徒が, 自由な発想で作図を楽しみ, 試行錯誤や創意工夫をしながら, 偶然の発見を通して, 幾何学の面白さ, 深淵さを感じられる内容にした. 「アクティブラーニング」や「実験数学」といった要素も取り入れている. この教材は, 射影幾何学や双曲幾何学など, 現代数学につながる数学からアイディアを得ており, 興味のある学生には, さらに深い内容を勉強するきっかけを提供している. 副題にあるように, 高校で習うアポロニウスの円から, 最近の大学の授業では取り上げられにくいが重要なパスカルの定理やブリアンションの定理まで, 自然に触れられるようになっている.

2　授業の流れ

2.1　導入と問題提起

本稿では, アポロニウスの円を学習した高校 2 年生のクラスを想定してみる. GeoGebra は, パソコン, タブレット, スマートフォンでも利用が可能である. 初めて触れる学生には, 直線, 円, 交点, 角度など, 基本的なツールの使用にまず慣れてもらうことが先決である. 少し慣れてきた段階で, 半円と反転を定義なしで体得してもらうのがよい (図 1(左)). 半円が使えると, 与えられた直径から半円を描くときに, 中心 (中点) の作図をしなくても直径の両端点をクリックするだけでよいので非常に便利である. 反転は, 高校では触れられることがないが, 等長変換ではない等角写像であり, 非常に重要な変換である. 三角形を反転させると, 不思議な形になり, 円の内側に三角形を移動させると, 思いもかけない図形に変化することに学生は興味を持ってくれる. 1 つの円に関する反転の反転は恒等変換であることや, 同心円による反転の合成が拡大縮小の相似変換であることも簡単に理解することができる. 以下で見るように, この授業では, 直線, 半円, 反転, 交点, 角度の計測しか用いておらず, 必要最小限のコマンドで授業が展開できるところがよい.

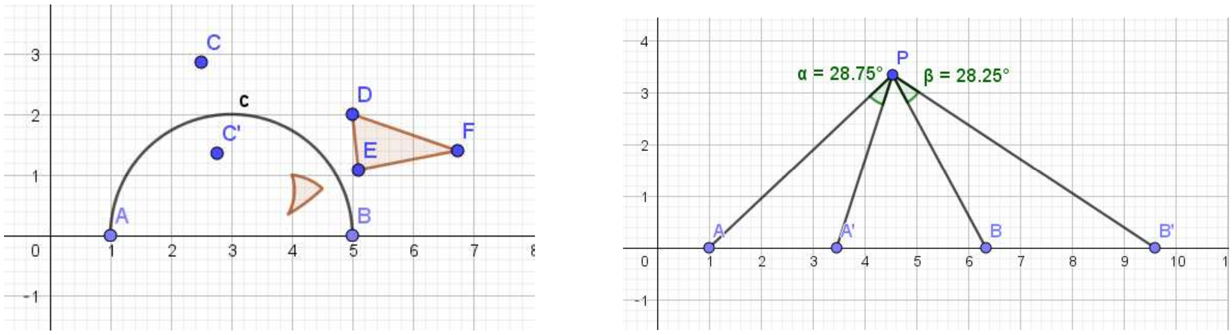

図 1: 半円に関する反転 (左) と, 等角度問題 (右)

半円や反転にも慣れてきたところで, 次の問題を提起する.

問題 1

x 軸上に 4 点 A, A', B, B' がある. $\angle APA' = \angle BPB'$ を満たす点 P の軌跡を述べなさい (図 1(右)).

ここで, 十分時間を取って, 学生に実験をさせることが重要である. 4 点の配置によっては, 解が存在しないこともあるので, 様々な意見や議論が期待できる.

2.2 発見と証明

次に, 学生が発見できるように, 少し誘導する. 「半円をいくつか描いてみよう. 軌跡全体は無理でも, 1 点くらいは求められるかもしれないよ. 」問題には, 4 点しかないので, 半円が 6 つ描ける (図 2(左)). そのうち, 交差するのは 1 組の半円だけで, その交点が解の 1 つとなっている. クラスの誰かは, 偶然発見できるだろう. 第一発見者は, ちょっとしたヒーローになれる.

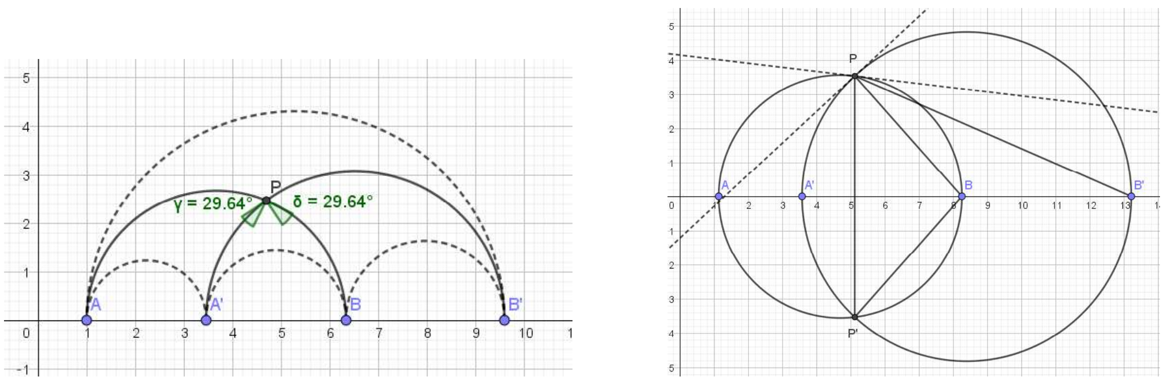

図 2: 問題 1 の解の 1 つ (左) と, その証明 (右)

この偶然の発見を無駄にしないように, ここでしっかりと証明をしておきたい. 図 2(右) にあるように, 半円の交点において, 接線を引き, じっくりと考えてもらう. 接弦定理が

見えてくるとよい．2 つの円のなす角は, 接線のなす角度であり, その接線のなす角度の半分が $\angle BPB'$ に等しいことに気が付けば, しめたものである．

$$2 \times \angle BPB' = (2\,\text{円のなす角度}) = 2 \times \angle APA'$$

で証明が完了する．図中の三角形 $\triangle PP'B$ が 2 等辺三角形であることと, 接弦定理の組み合わせが絶妙である．

2.3　工夫とアポロニウスの円

さて, たくさんある軌跡のうち, 1 点が発見できたが, ここで暗礁に乗り上げる．問題を易しく設定しなおすことによって, 状況の打開を図る．

問題 2

x 軸上に 3 点 A, B, C がある．$\angle APC = \angle BPC$ を満たす点 P の軌跡を述べなさい (図 3(左))．

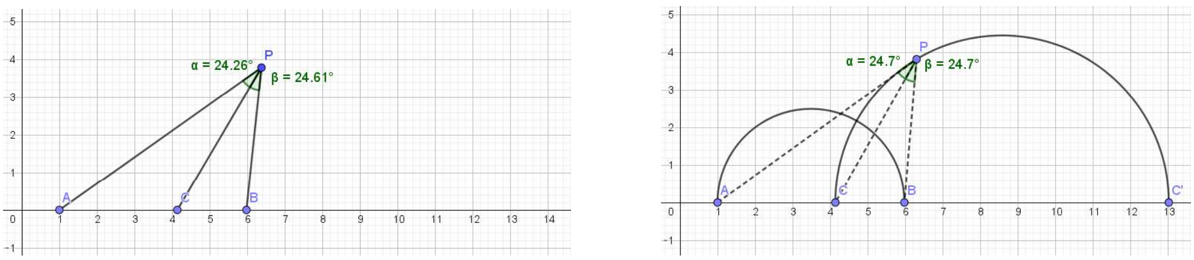

図 3: 問題 2(左) と, その解 (右)

学生から, 「アポロニウスの円ではないか？」という声が上がるとよい．三角形の角の二等分が辺の比を同じにするという事実を逆に用いると, アポロニウスの円が解になることがわかる．ここで, アポロニウスの円をどう描けばよいかを考えさせるとよい．「反転を使ってみたらどうだろう？」と誘導すると, 点 C の半円 AB に関する反転 (点 C') でアポロニウスの円の直径が求められることがわかる (図 3(右))．ここでも反転が有用であることが実感できる．また, 半円 AB と半円 CC' の交点での角度に注目させると, 角度が $45°$ であることが計測からわかる．このことは, 2 つの円が直交していることを示しており, このことからも反転の重要性が理解できる．(射影幾何学では, 点 C' は第四調和点であり, 複比 $[A, B; C, C']$ の値は -1 である．)

2.4　問題解決と発展問題

反転の重要性がわかったところで, 懸案だった問題 1 に戻る．半円がいくつか描かれており, 解が 1 点わかっている．この点の反転を取ってみるのはどうか？ ここで, ゆっくり時間を取って, 学生に実験をさせたい．

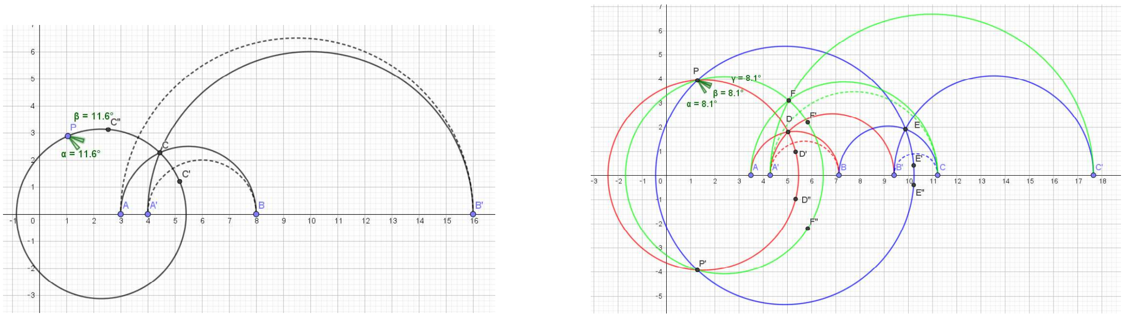

図 4: 問題 1 の解 (左) と, 問題 3 とその解 (右)

どの半円に関して反転を取るかによって, 結果は違ってくるが, 次々と新しい解が発見されることが期待される (図 4(左)). 問題 2 の解がアポロニウスの円であったことから, 問題 1 の解も円であることは十分に予想できる. x 軸に関する対称性を考慮するなどして, 解を 3 点見つければ, 解の円がおのずと見えてくる仕掛けになっている. この段階で, 議論についていけない学生も現れるだろう. ここでの証明は, 興味のある学生への課題として残しておく. 理屈がわからなくても, 作図ができることが重要で, 次の発展問題を宿題として出すとよい.

問題 3

x 軸上に 6 点 A, B, C, A', B', C' がある. $\angle APA' = \angle BPB' = \angle CPC'$ を満たす点 P はどこにあるかを述べなさい (図 4(右)).

3 つの円の共有点である, 2 つの点が解となる. 三角形の外心や内心, 重心などを求めるときと同じ感覚を味わってもらいたい. 作図によって解が求められることがわかると, その理屈 (証明) が知りたくなるもので, そういう意味では証明への動機づけになる. また, 作図の最短手数を競わせるのも一興である. 筆者の最短手数は 12 手 (半円 6, 反転 2, 線対称 2, 円 2) である. さらに, 学生によっては, 「角度が $0°$ でもよいのなら, x 軸上に他にも解がある」と言ってくる学生がいるかもしれない. これも重要な発見で, この手の角度の問題を出題するときに気を付けなければいけない, 大切な注意点である.

3　アイディアは双曲幾何学にあり

3.1　アポロニウスの円と線対称

これまで紹介した作図問題は, 双曲幾何学からヒントを得ている. 図 1から図 4までの図中に現れる半円や円（の上部) は, 2 次元双曲幾何学の上半平面モデルにおける測地線とみなせる. アポロニウスの円も例外ではない. 反転は, その測地線に関する線対称変換に相当する. 双曲幾何における線対称変換が角度を保つことと, ユークリッド幾何での反転が等角写像であることが符合する. その様子をポアンカレモデルで見てみよう.

図 5(左図) は, 双曲幾何における線対称の様子をポアンカレモデルで表したものである. 測地線に関して線対称の関係にある図形において, 対応する角度が等しいことが見

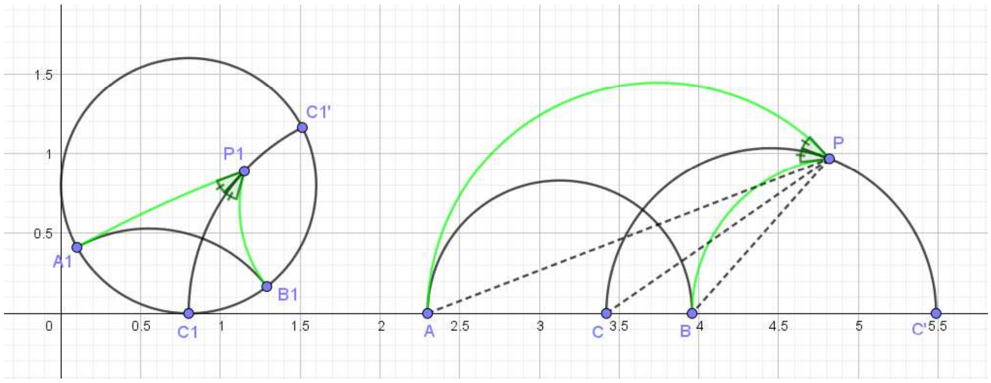

図 5: 線対称の様子を表したポアンカレモデル (左) と, 上半平面モデル (右)

て取れる．この図を上半平面モデルで表したのが, 図 5(右図) である．半円や円弧 (測地線) 同士のなす角が双曲幾何における角度である．こうしてみると, 問題 2 は, 双曲幾何の上半平面モデルにおいて, 無限遠点 A, B, C が与えられたときの, $\angle APC = \angle BPC$ を満たす点 P の軌跡を求める問題であることがわかる．ここで, 上半平面モデルでの測地線のなす角と, 測地線の無限遠点を端点に持つユークリッド線分のなす角の関係を思い出そう．2.2 節で証明したことは,

$$(\text{上半平面モデルでの測地線のなす角}) = 2 \times (\text{ユークリッド線分のなす角})$$

であった．“双曲幾何学とユークリッド幾何学という異なる 2 つの幾何学が, 角度においては半角 (倍角) の関係にある”, という事実が, ユークリッド幾何における等角度問題の背景にある．生徒は, 双曲幾何を全く意識することなく, 双曲幾何の問題を解いたことになる．

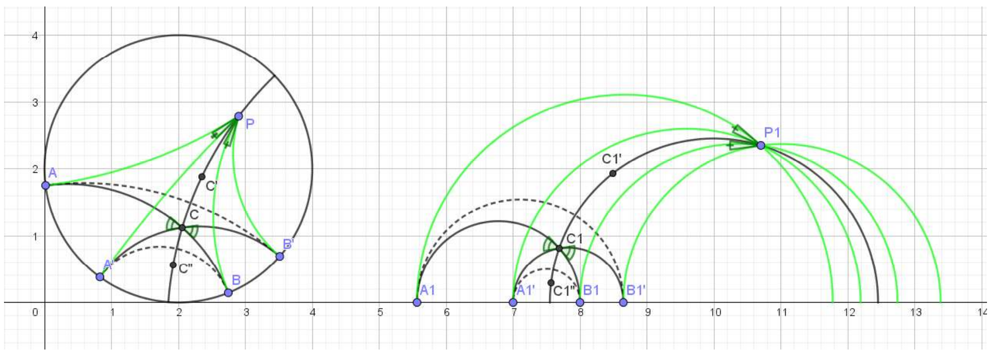

図 6: 問題 1 の解のポアンカレモデル (左) と, 上半平面モデル (右)

このように, 双曲幾何との関係がわかれば, 問題 1 の理解は容易である．測地線 AB と測地線 $A'B'$ を描くと, 対頂角が等しくなるのは当然で (図 6(左)), その点を見つけたら, 線対称 (反転) を使って, 線対称の軸となる測地線を求めれば, それが問題 1 の解となる (図 6(右))．以上が, 問題 1 と問題 2 の種明かしである．

3.2　双曲解とユークリッド解の違い

問題3の背景を述べる前に, 双曲幾何とユークリッド幾何で, 等角度問題の解が少し違うことについて述べたい.

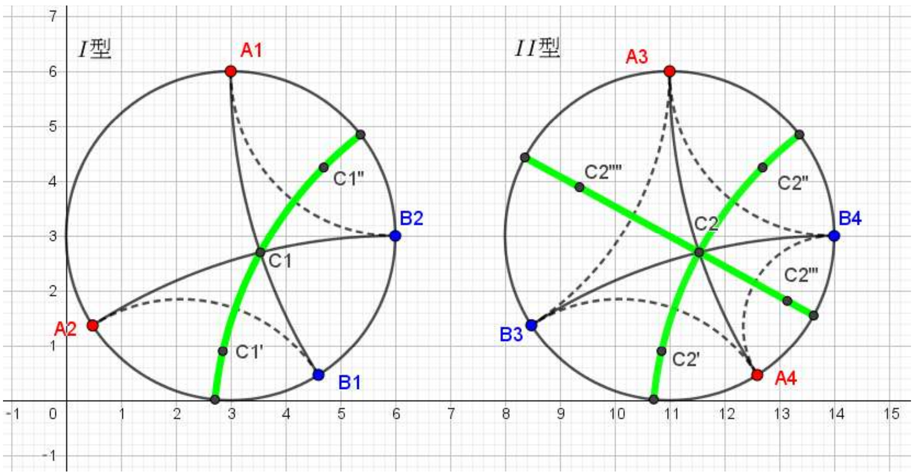

図 7: 4 点 A, A', B, B' の配置 I 型 (左) と, II 型 (右)

図7は, 双曲幾何のポアンカレモデルにおいて, 4点 A, A', B, B' の配置によって, 解が異なることを示している (図中のラベルは, $\{A1, A2\}$ などとなっているが, $\{A, A'\}$ と読み替えていただきたい). 無限遠円上の4点の配置は, 2通りに分けられる. I 型は, 円を2つの円弧に分割したときに, A, A' と B, B' とをそれぞれ別の円弧に切り分けられる場合であり, それができない場合が II 型である. 複比の言葉でいうと, I 型は, $[A, A'; B, B'] > 0$ であり, II 型は $[A, A'; B, B'] < 0$ となる. I 型の解は, 1本の測地線であるのに対して, II 型の解は, 2本の測地線になる (II 型の2本の測地線の交点 C では, $\angle ACA' = \angle BCB' = 180°$). この2つの場合を, 上半平面モデルで置き換えて, それをユークリッド幾何での等角度問題とみなすと, 解の様子がさらに変わってくる. まず, I 型から見てみよう

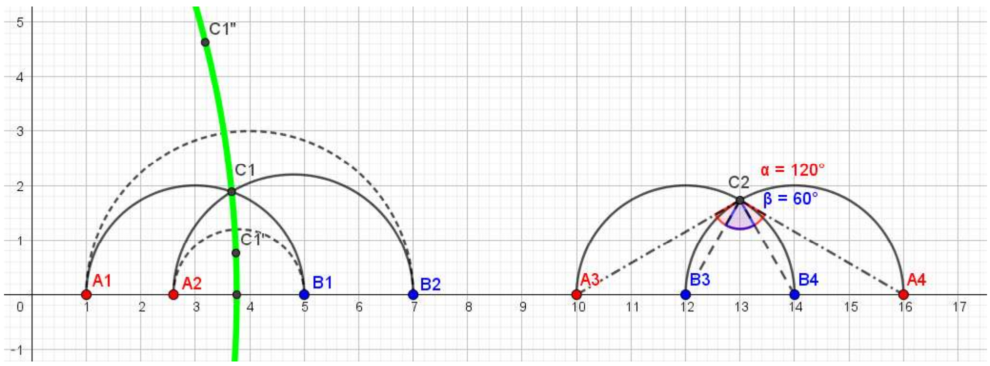

図 8: I 型のユークリッド解がある場合 (左) と, ない場合 (右)

図8は, I 型を上半平面モデルに置き換えた場合に, 2通りの図が存在することを表している. 図8(左) は, 本稿の問題1で用いた図1(右) と同じ配置であり, この等角度問題で

は, 解が 1 つの円となる (図 4(左) と同じ). 他方, 図 8(右) のように置き換えると, ユークリッド幾何での解は存在しない. この場合, 2 つの半円の交点では, 2 つのユークリッド角の和が 180° になる, という面白い現象がおこる. もちろん, 双曲幾何での双曲角は, この点でも等しくなり, 双曲解 (測地線 1 本) は図中には描いていないが存在している.

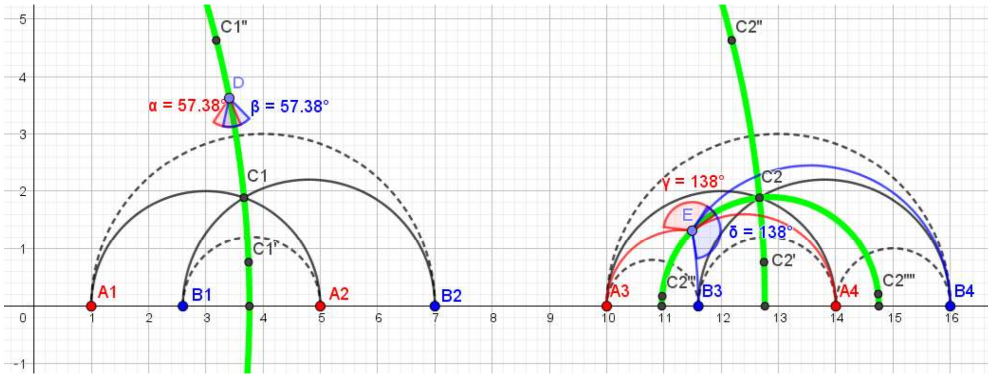

図 9: II 型のユークリッド解 (左) と, 双曲解 (右)

一方, II 型においても, 双曲解の 2 本の測地線 (図 9(右)), のうち 1 本が, ユークリッド解では現れない (図 9(左)), という現象が起こる. 以上のことをまとめると, 双曲解は, 測地線が 2 本, または, 1 本であり, ユークリッド解は, 円が 1 つ, または, 解がないということになる. ただ, いずれの場合にも共通することは, 解の円を求めるために作図する補助的な半円 (図中の点線) が, 解の円と直交する, ということである. 言い換えると, 解の円は補助半円の共通垂線である, ということである. このことに注意すると, 問題 3 の背景の理解が容易になる.

3.3 ブリアンションの定理と楕円型射影変換の中心

図 10(右) は, 問題 3(図 4(右)) の点の配置を変えて, 問題の背景をわかりやすくしたものである. 6 本の測地線に対して, 3 本の共通垂線が 1 点で交わっており, この点が問題 3 の解となっている. この図をポアンカレモデルに置き換えたのが, 図 10(左) である. 無限遠円に 6 頂点を持つ理想六角形があり, その向かい合った対辺に対して共通垂線を取ると, 3 本の共通垂線が一点で交わっている. このポアンカレモデルを, クラインモデルで解釈し直すと, “(無限遠) 円に外接する六角形の対頂点を結ぶと一点で交わる”, というブリアンションの定理が現れる. 問題 3 の解は, このブリアンションの定理で現れる点 (ブリアンション点) を, 上半平面モデルで作図したものになっている. 射影幾何学の言葉でいうと, このブリアンション点は, x 軸上の楕円型射影変換を複素平面まで拡張したときの不動点 (回転の中心) である.

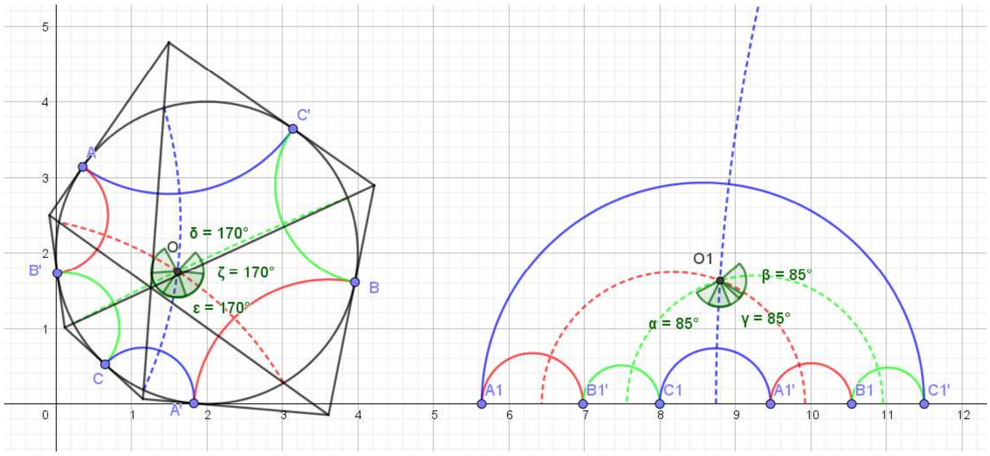

図 10: 問題 3 の解のポアンカレモデル (左) と, 上半平面モデル (右)

3.4　パスカルの定理と双曲型射影変換の不動点

ブリアンションの定理は, パスカルの定理とは双対関係にある. 最後に, パスカルの定理と射影変換との関係についてみてみよう.

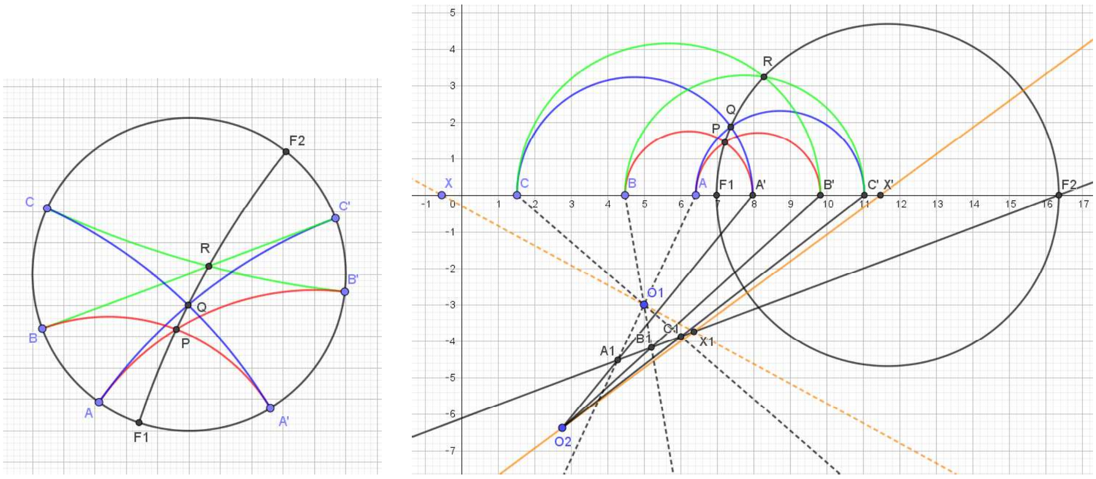

図 11: ポアンカレモデルにおけるパスカルの定理 (左) と, 上半平面モデルでの双曲的射影変換の不動点 (右)

図 11(左) は, ポアンカレモデルにおけるパスカルの定理の図である. 理想六角形の対辺の 3 交点が, ある測地線 (パスカル線) 上にある. 図 11(右) は, 上半平面でパスカルの定理を描いたものである. x 軸上に, パスカル線 (ユークリッド半円) の無限遠点が 2 点存在する. この 2 点は, x 軸上の双曲型射影変換の不動点となっている. 実際, 図 11(右) の x 軸上の 6 点は, 配景写像の合成によって, 不動点を持つように配置されたものである. この双曲的射影変換の不動点が, 半円 6 つと円を 1 つ描くことによって求められていることがわかる.

4　むすび (万人のための数学を目指して)

本研究では, GeoGebra を用いて, 簡単な作図問題から双曲幾何や射影幾何の重要な定理との関係が見出されることを見てきた．この研究の発端は, 河合塾の有志で構成される Cabri 研究会で紹介された, 『射影幾何学』の中の作図問題 ([7]p.159) が出発点になっている．

「**作図題 1.** 線 l 上の三組の点対 $A, A'; B, B'; C, C'$ を対応点対とする l 上の射影変換における不動点を作図せよ．ただし円錐曲線 $\overline{\Lambda}$ が一つ与えられるものとする．」

この作図問題を紹介してくださった小林一路さんに感謝します.

“円と反転” の関係は, とても重要だと思われる．円というモノ (図形) に対して, 空間を反転させるコト (変換) ができる．反転は, 円の内側と外側をいとも簡単に入れ替えることができる．反転という変換が, 学校教育で一度も触れられることがなく, ほとんどの人が反転というものの存在を知らないというのは, あまりにももったいないことだと思う. 今日, テクノロジーのおかげで, たった一つのコマンドで反転を動的に見ることができる時代になった．数学は, テクノロジーをうまく利用して, もっともっと可視化されるべきである．本研究が, 多くの人に反転を知ってもらうきっかけになれば, 幸いである.

参考文献

[1] Berger, M. : *Geometry I*. Berlin Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 1987.

[2] Berger, M. : *Geometry II*. Berlin Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 1987.

[3] Sved, M. : *Journey into Geometries*. The Mathematical Association of America, 1997.

[4] Maeda, Y. : *Active Learning with Dynamic Geometry Software*. ICCSA 2017, Part IV, LNCS **10407**, (2017), 228–239.

[5] 谷口雅彦, 奥村善英：『双曲幾何学への招待－複素数で視る－』, 培風館, 1996.

[6] 寺阪 英孝：『幾何とその構造』, 筑摩書房, 1992.

[7] 彌永昌吉, 平野鉄太郎：『射影幾何学』, 朝倉書店, 2005.