

Full Projection Property について

島根大学・学術研究院理工学系 松橋 英市

Eiichi MATSUHASHI

Department of Mathematics,

Shimane University

日立インフォメーションエンジニアリング 山中 崇央

Takahiro Yamanaka

Hitachi Information Engineering

1 はじめに

本稿では, 逆写像が連続である upper semi-continuous bonding function をもつ inverse limit (これを generalized inverse limit という) の性質を紹介する. とくに, generalized inverse limit が full projection property を満たすための十分条件を紹介する. これまでの full projection property に関する先行結果は各 factor space が区間の場合において研究されていたものがほとんどである. しかし, 本稿で紹介する full projection property に関する結果は, 各 factor space が特に強い条件を必要とすることはない. 2014 年に J.P.Kelly と J.Meddaugh によって示された定理によると, inverse limit が full projection property を満たすことは inverse limit が indecomposable continuum になることと密接な関係がある. その点において, full projection property は重要である.

本稿では [4] において得られたいくつかの結果のうち, full projection property に関する結果を紹介する. とくに, 各 factor space が任意のコンパクト距離空間であるという条件の下で, upper semi-continuous bonding function をもつ inverse limit が full projection property を満たすための十分条件を紹介する. また, generalized inverse limit の直積の性質について紹介する. 特に, generalized inverse limit の直積

が full projection property を満たすための十分条件を紹介する. さらに, generalized inverse limit の直積と full projection property の関係について自然に考えられる 4 つの問題を説明する.

2 Full projection property について

この章では各 factor space が任意のコンパクト距離空間である条件の下で, upper semi-continuous bonding function をもつ inverse limit が full projection property を満たすための十分条件を紹介する.

2.1 準備と基本的な結果

この節では, 本論文で用いられる定義や必要とする先行結果を紹介する.

定義 2.1.1. X が空でない連結なコンパクト距離空間であるとき, X を *continuum* と呼ぶ.

定義 2.1.2. X をコンパクト距離空間とする. このとき,

$$2^X = \{A \subset X \mid A \text{ は空でない閉集合である}\}$$

とする. このとき 2^X には Hausdorff metric による位相が定義されているものとする. 2^X を X の *hyperspace* という.

定義 2.1.3. X, Y をコンパクト距離空間とし, $f : X \rightarrow 2^Y$ とする. このとき, X の任意の元 x と $f(x)$ の任意の近傍 V に対して, 任意の $z \in U$ に対して $f(z)$ が V の部分集合となるという条件を満たす x の近傍 U が存在するとき, f は *upper semi-continuous (usc)* であるという.

定義 2.1.4. 任意の自然数 i に対して, X_i をコンパクト距離空間, $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$ を usc とする. このとき, $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ を *inverse sequence* といい, 各 X_i を factor space, 各 f_i を bonding function という.

また, $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i \mid \text{任意の自然数 } i \text{ に対して, } x_i \in f_i(x_{i+1})\}$ を $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ の *inverse limit* という.

例 2.1.5. 任意の自然数 i に対して, $X_i = [0, 1]$ とし, $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$ を以下のように定義する.

$$f_i(x) = \begin{cases} \{x\} & (0 \leq x < 1) \\ X_i & (x = 1) \end{cases} \quad (x \in X_{i+1}) \text{ (図 1 参照).}$$

このとき, $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は図 2 のようになる.

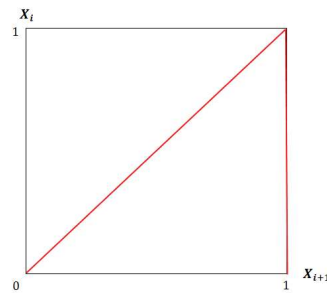


図1 f_i

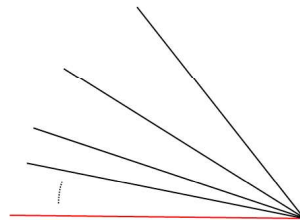


図2 $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$

定義 2.1.6. (X, d) をコンパクト距離空間とし, $A \subset X$ とする. このとき,
 $\text{diam}_d A = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ と定義する.

定義 2.1.7. X, Y をコンパクト距離空間とし, $B \subset Y$, $f : X \rightarrow 2^Y$ とする. このとき,

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in f(x)\} \text{ (} f \text{ のグラフという)}$$

$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \cap B \neq \phi\}$
 $A(f) = \{x \in X \mid f(x) \text{ が一点集合}\}$
 $A'(f) = \{(x, y) \in G(f) \mid x \in A(f)\}$
 と定義する.

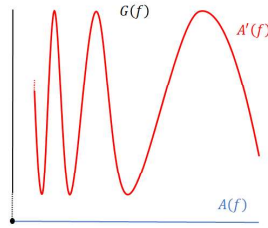


図3 $\sin \frac{1}{x}$ -curve

定義 2.1.8. X, Y をコンパクト距離空間とし、 $f : X \rightarrow 2^Y$ とする. このとき、任意の $y \in Y$ に対して、 $y \in f(x)$ となる $x \in X$ が存在するとき、 f は *surjective* であるという.

定義 2.1.9. $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ を inverse sequence とする.

このとき、任意の自然数 i, j ($j > i + 1$) に対して $f_{i,j} = f_i \circ \dots \circ f_{j-1} : X_j \rightarrow 2^{X_i}$ とする. また、 $f_{i,i+1} = f_i$ と定義する.

次に、任意の自然数 i, j ($1 \leq i \leq j$) に対して、

$G^{-1}(f_i, \dots, f_j) = \{(x_i, \dots, x_j, x_{j+1}) \in \prod_{k=i}^{j+1} X_k \mid i \leq k \leq j, x_k \in f_k(x_{k+1})\}$
 とする. また、 $i = j$ のとき、 $G^{-1}(f_i, f_j)$ を $G^{-1}(f_i)$ と書く.

また、任意の自然数 i に対して、

$B(f_i) = \{x \in X_{i+1} \mid 1 \leq k \leq i, f_{i,i+1}(x) \text{ が 1 点集合}\}$

$B'(f_i) = \{(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}) \in G^{-1}(f_1, \dots, f_i) \mid x_{i+1} \in B(f_i)\}$

とする.

定理 2.1.10. [参考文献 [6], 定理 13.5]

X, Y をコンパクト距離空間とする. 連続全射写像 $f : X \rightarrow Y$ が open map であることの必要十分条件は、 $f^{-1} : Y \rightarrow 2^X ; y \mapsto f^{-1}(y)$ が連続であることである.

定理 2.1.10を用いることで、以下の命題が成り立つ。

命題 2.1.11. X, Y をコンパクト距離空間とし, $f : X \rightarrow 2^Y$ を usc かつ surjective とする. また, $P : X \times Y \rightarrow Y$ を射影とする. このとき, 以下の3つは同値である.

- (1) $f^{-1} : Y \rightarrow 2^X$ が連続である.
- (2) $(P|_{G(f)})^{-1} : Y \rightarrow 2^{G(f)}$ が連続である.
- (3) $P|_{G(f)} : G(f) \rightarrow Y$ が open map である.



図4 $\sin \frac{1}{x}$ -curve

定理 2.1.12. (Baire のカテゴリー定理)

完備距離空間 X の任意の稠密開集合の列 $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$ に対して, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ はまた X で稠密である.

定義 2.1.13. X を位相空間とする. このとき, $A \subset X$ が X の G_δ -subset であるとは, $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ という条件を満たす X の可算個の開集合 U_i ($i \in \mathbb{N}$) が存在するときという.

2.2 Full projection property について

この節では full projection property について紹介する. そして, 各 factor space が任意のコンパクト距離空間であるという条件の下で, upper semi-continuous bonding function をもつ inverse limit が full projection property を満たすための十分条件を紹介する.

定義 2.2.1. 任意の自然数 i に対して, X_i をコンパクト距離空間とし, $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$ とする. また, $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ を inverse sequence とする. このとき,

$\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ の閉集合 K が無限の自然数 i に対して $\pi_i(K) = X_i$ を満たすとき $K = \lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が成り立つ

ならば, $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は *full projection property (fpp)* を満たすという.

また, $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が continuum のとき,

$\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ の subcontinuum K が無限の自然数 i に対して $\pi_i(K) = X_i$ を満たすとき $K = \lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が成り立つ

ならば, $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は *continuum full projection property (cfpp)* を満たすという.

$\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が continuum のとき, $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が fpp を満たすならば $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が cfpp を満たすことは明らかである.

次の例は, $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が cfpp を満たすが $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が fpp は満たさないような例である.

例 2.2.2. 任意の自然数 i に対して, $X_i = [0, 1]$ とし, $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$ を以下のように定義する. (図 5 参照)

$$f_i(x) = \begin{cases} \{2x\} & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ X_i & (x = \frac{1}{2}) \\ \{2x - 1\} & (\frac{1}{2} < x \leq 1) \end{cases}$$

このとき, $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は cfpp を満たすが fpp は満たさない.

次の結果が本節で紹介する主結果である. 本結果は各 bonding function のグラフから, inverse limit が full projection property をもつかどうか判定する際に有用である.

定理 2.2.3. $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ を任意の自然数 i に対して bonding function f_i が surjective である inverse sequence とする. このとき, 任意の自然数 i に対して $f_i^{-1} : X_i \rightarrow 2^{X_{i+1}}$ が連続で $A'(f_i)$ が $G(f_i)$ で稠密ならば, $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は full projection property を満たす.

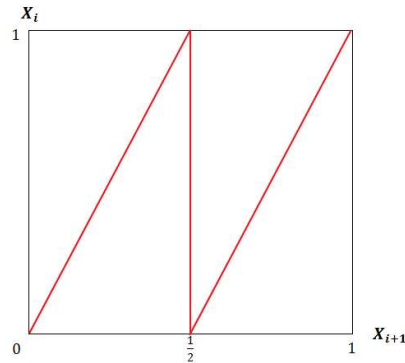


図5 f_i

Inverse limit が full projection property を満たすための十分条件に関する先行結果は factor space が主に閉区間で考えられていたが, 定理 2.2.3 では少なくとも factor space に特に強い条件を付すことはない. その結果, 例 4.0.1 や例 4.0.2 のように factor space が単純閉曲線である inverse limit についても full projection property を満たすかどうかの判定ができる.

3 Full projection property の直積について

この章では, generalized inverse limit の直積の性質について紹介する. 特に, generalized inverse limit の直積が fpp を満たすための十分条件を与える. また, generalized inverse limit の直積と fpp の関係について自然に考えることのできる 4 つの問題を提起し, そのうちの 1 つに対する反例を紹介する.

3.1 inverse limit の直積の定義と性質

この節では, generalized inverse limit の直積の定義とその性質について説明する.

定義 3.1.1. X_1, X_2, Y_1, Y_2 をコンパクト距離空間とし, $f : X_1 \rightarrow 2^{Y_1}$, $g : X_2 \rightarrow 2^{Y_2}$ を usc とする. このとき, usc function $f \times g : X_1 \times X_2 \rightarrow 2^{Y_1 \times Y_2}$ を以下のように定義する.

$$(f \times g)(x_1, x_2) = f(x_1) \times g(x_2). \quad ((x_1, x_2) \in X_1 \times X_2)$$

定義 3.1.2. $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}, \{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty}$ をそれぞれ inverse sequence とする. このとき, 以下で定義されるような同相写像 $h : \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} \times \varprojlim\{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty} \rightarrow \varprojlim\{X_i \times Y_i, f_i \times g_i\}_{i=1}^{\infty}$ がある.

$$h((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}) = (x_i, y_i)_{i=1}^{\infty}.$$

$$((x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim\{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty})$$

このとき, inverse sequence $\{X_i \times Y_i, f_i \times g_i\}_{i=1}^{\infty}$ を $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ と $\{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty}$ の直積といい, $\varprojlim\{X_i \times Y_i, f_i \times g_i\}_{i=1}^{\infty}$ を $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ と $\varprojlim\{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty}$ の直積という.

命題 3.1.3. X_1, X_2, Y_1, Y_2 をコンパクト距離空間とし, $f : X_1 \rightarrow 2^{Y_1}, g : X_2 \rightarrow 2^{Y_2}$ を usc, surjective とする. このとき, $f^{-1} : Y_1 \rightarrow 2^{X_1}, g^{-1} : Y_2 \rightarrow 2^{X_2}$ が連続ならば, $(f \times g)^{-1} : Y_1 \times Y_2 \rightarrow 2^{X_1 \times X_2}$ も連続である.

命題 3.1.4. X_1, X_2, Y_1, Y_2 をコンパクト距離空間とし, $f : X_1 \rightarrow 2^{Y_1}, g : X_2 \rightarrow 2^{Y_2}$ を usc とする. このとき, $A'(f)$ が $G(f)$ で稠密で $A'(g)$ が $G(g)$ で稠密ならば, $A'(f \times g)$ は $G(f \times g)$ で稠密である.

3.2 Inverse limit の直積と full projection property について

この節では, generalized inverse limit の直積が fpp を満たすための十分条件を与える. まず, 定理 2.2.3 と命題 3.1.3 から, 次の系が成り立つ.

系 3.2.1. $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}, \{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty}$ を任意の自然数 i に対して bonding function f_i, g_i が surjective である inverse sequence とする. このとき, 任意の自然数 i に対して

- (1) $f_i^{-1} : X_i \rightarrow 2^{X_{i+1}}$ と $g_i^{-1} : Y_i \rightarrow 2^{Y_{i+1}}$ が連続.
- (2) $A'(f_i)$ が $G(f_i)$ で稠密かつ $A'(g_i)$ が $G(g_i)$ で稠密.

が成り立つならば, $\{X_i \times Y_i, f_i \times g_i\}_{i=1}^{\infty}$ は fpp を満たす.

次に, 系 3.2.1 を用いて full projection property を満たす inverse limit の例を紹介する.

例 3.2.2. 任意の自然数 i に対して, $Y_i = [0, 2]$ とし, usc function $g_i : Y_{i+1} \rightarrow 2^{Y_i}$ を以下のように定義する.

$$g_i(x) = \begin{cases} \{1 + \sin \frac{\pi}{x}\} & (0 < x \leq 2) \\ Y_i & (x = 0) \end{cases} \quad . (x \in Y_{i+1})$$

このとき, [参考文献 [1], 定理 4.7] から $\varprojlim\{Y_i \times Y_i, g_i \times g_i\}_{i=1}^\infty$ は continuum である. また, 任意の自然数 i に対して $g_i^{-1} : Y_i \rightarrow 2^{Y_{i+1}}$ が連続なことは明らかである. 更に, $A'(g_i)$ は $G(g_i)$ から $\{(x, y) \in G(g_i) \mid x = 0\}$ を取り除いた部分であることから, $A'(g_i)$ は $G(g_i)$ で稠密である. ゆえに, 系 3.2.1 から, $\varprojlim\{Y_i \times Y_i, g_i \times g_i\}_{i=1}^\infty$ は fpp を満たす.

3.3 Inverse limit の直積と full projection property に関する問題

この節では, generalized inverse limit の直積と fpp, cfpp について自然に考えられる 4 つの問題を紹介する.

Problem 3.3.1.

- (1) $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ と $\varprojlim\{Y_i, g_i\}_{i=1}^\infty$ が fpp を満たすならば, $\varprojlim\{X_i \times Y_i, f_i \times g_i\}_{i=1}^\infty$ も fpp を満たすか?
- (2) $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ と $\varprojlim\{Y_i, g_i\}_{i=1}^\infty$ が cfpp を満たすならば, $\varprojlim\{X_i \times Y_i, f_i \times g_i\}_{i=1}^\infty$ も cfpp を満たすか?
- (3) $\varprojlim\{X_i \times Y_i, f_i \times g_i\}_{i=1}^\infty$ が fpp を満たすならば, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ と $\varprojlim\{Y_i, g_i\}_{i=1}^\infty$ も fpp を満たすか?
- (4) $\varprojlim\{X_i \times Y_i, f_i \times g_i\}_{i=1}^\infty$ が cfpp を満たすならば, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ と $\varprojlim\{Y_i, g_i\}_{i=1}^\infty$ も cfpp を満たすか?

実は図 5 のグラフを持つ inverse sequence の inverse limit が (2) への反例となることがわかる (証明は参考文献 [4] 参照). (1), (3), (4) についての解答はまだ発見できていない.

4 Factor space が単純閉曲線の場合の inverse limit

この章では, 各 factor space が単純閉曲線である inverse sequence で, その inverse limit が indecomposable continuum となる例を紹介する.

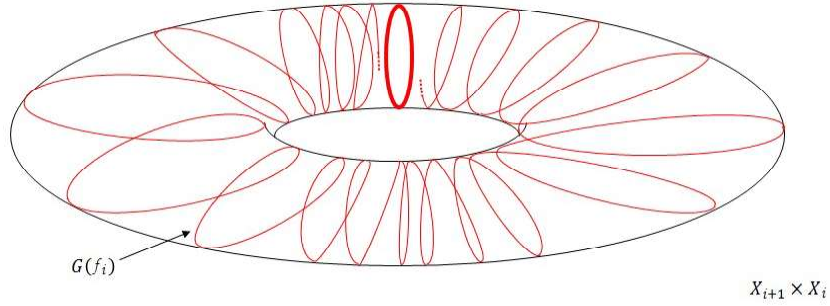


図6 例 4.0.1

例 4.0.1. 任意の自然数 i に対して, $X_i = S^1$ とし, usc function $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$ をグラフが図 6 のようになるものと定義する. このとき, 任意の自然数 i に対して, f_i が indecomposable であり f_i^{-1} が連続であることは明らかである. 更に, $A'(f_i)$ は図 6 の細い線の部分で, $G(f_i)$ は図 6 の太い線の部分と細い線の部分を合わせたものであることから, $A'(f_i)$ は $G(f_i)$ で稠密であることがわかる. 以上のことと 2 章の結果と [4] の結果を用いると $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は indecomposable continuum であることが簡単にわかる.

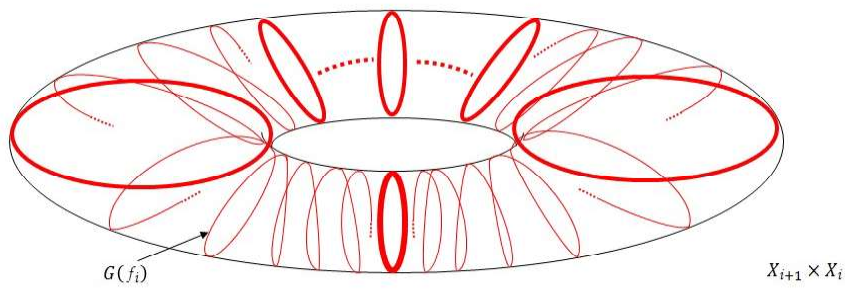


図7 例 4.0.2

例 4.0.2. 任意の自然数 i に対して, $X_i = S^1$ とし, usc function $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$ をグラフが図 7 ($f_i(a) = X_i$ となる $a \in X_{i+1}$ が無限個存在する) のようになるものと定義する. このとき, 任意の自然数 i に対して, f_i が indecomposable であり f_i^{-1} が連続であることは明らかである. 更に, $A'(f_i)$ は図 7 の細い線の部分で, $G(f_i)$ は図 7 の太い線の部分と細い線の部分を合わせたものであることから, $A'(f_i)$ は $G(f_i)$ で稠密であることがわかる. 以上のことと 2 章の結果と [4] の結果を用いると $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は indecomposable continuum であることが簡単にわかる.

参考文献

- [1] W. T. Ingram and W. Mahavier, *Inverse limits of upper semi-continuous set valued functions*, Houston J. Math. **32** (2006) , no.1, 119-130.
- [2] W. T. Ingram, *An introduction to inverse limits with set-valued functions*, Springer Briefs in Mathematics. Springer, New York, 2012.
- [3] J. P. Kelly and J. Meddaugh, *Indecomposability in inverse limits with set-valued functions*, Topology. Appl., **160** (2013) . no13, 1720-1731.
- [4] E. Matsushashi and T. Yamanaka, *Inverse limits with upper semi-continuous bonding functions whose inverse functions are continuous*, Mediterr. J. Math., **17** (2020) . no.3, 19pp.
- [5] J. van Mill, *The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 2001.
- [6] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory : An introduction*, Pure Appl. Math. Ser., vol. **158**, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1992.