対称空間論の離散化とカンドル代数, Part V

田丸 博士 * (大阪市立大学理学研究科 / OCAMI)

概要

カンドル (quandle) は, Joyce によって導入された代数系であり, 主として結び目の研究に用いられてきた．我々の研究テーマは, カンドルを離散的な対称空間と考え, 対称空間論を参考にして, その構造理論を構築することである．本稿では, カンドルあるいは対称空間内の “s-可換集合” の基本的な性質と具体例を紹介する．特に, 極や対蹠集合との差異についても述べる．

1 導入

我々はカンドルの対称空間論的な研究を行っている．カンドルは, 結び目の研究の過程で Joyce ([5]) によって導入された, 二項演算をもつ代数系である．一方で, カンドルは対称空間の “離散化”, すなわち, 各点に写像 (点対称) が対応しているという条件のみを抽出し, (リーマン) 多様体あるいは位相などの構造を全て忘れたものだと考えることができる．ここでは, 二項演算を “各点に写像を対応させるもの” と読み替えたものを, カンドルの定義として紹介する．$\mathrm{Map}(X, X)$ を X から X への写像全体の集合とする．

定義 1.1. X を集合とし, 写像 $s : X \to \mathrm{Map}(X, X) : x \mapsto s_x$ を考える．このとき, (X, s) が **カンドル** とは, 以下が成り立つこと:

(S1) $\forall x \in X$, $s_x(x) = x$.

(S2) $\forall x \in X$, s_x は全単射.

(S3) $\forall x, y \in X$, $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

---

* tamaru@sci.osaka-cu.ac.jp

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University. This work was partly supported by Osaka City University Advanced Mathematical Institute (MEXT Joint Usage/Research Center on Mathematics and Theoretical Physics).

我々はカンドルを対称空間論の視点から研究している．これまでの研究成果は, 論文としてだけではなく, 様々な研究集会でも発表する機会を頂き, またそれらの研究集会の記録集等に “対称空間論の離散化とカンドル代数” と題する一連の原稿を発表させて頂いた ([10, 11, 12, 13])．本稿は, 内容的にもタイトル的にもそれらの続編であるが, 独立して読んでも意味は通じるように心掛けた積りである．

我々の最近の研究では, カンドル内の部分集合に着目している．対称空間, 特にコンパクトなリーマン対称空間の研究において, 特定の部分多様体あるいは部分集合に着目することは多い．典型的な例としては, 極大トーラス (極大な連結完備全測地的平坦部分多様体) が挙げられる．その次元は階数と呼ばれる重要な不変量である．その他にも, 極, 極地, 子午空間, 対蹠集合などといった部分集合がある．特に本稿では「極」と「対蹠集合」に着目する．これらはいずれも Chen-長野 ([2]) によって導入された概念であり, どちらも有限部分集合となることが知られている．ちなみに, 極は対称空間の被覆写像と関係し, また対蹠集合 (あるいはその元の個数の最大値として定義される 2-nubmer という不変量) は対称空間の位相的な性質を反映する．詳細は [1] に詳しくまとめられている．

本稿では, カンドル内の部分集合をいくつか考える．特に上述の「極」と「対蹠集合」は, 点対称を用いて定義されるため, 容易にカンドルに移植することができる．さらに, 前稿 (Part IV, [13]) でも紹介した「s-可換集合」という概念を我々は定義しており, これは対蹠集合の一般化になっている．これらの関係を図式的に書くと次のようになる:

$$\text{極 (pole)} \Longrightarrow \text{対蹠} \Longrightarrow s\text{-可換}.$$

本稿では, これらの部分集合の基本的な性質と, それぞれの間の差異について調べる．特に, 上記の矢印の逆は一般には成立しないこと, また逆が成り立つための条件についても述べることができるので, それらを紹介したい．なお, カンドルにおけるこれらの研究は始まったばかりであり, まだまだ多くのやるべきことが残されていると感じている．特に, 典型的なカンドルにおける部分集合の決定, さらに, (対称空間の場合のように) 部分集合の性質と外のカンドルの性質の間の関係の解明などは, 当然考えるべき問題であろう．

2 カンドル内の部分集合

対称空間における極と対蹠集合の概念は, Chen-長野 ([2]) によって導入された．これらの概念は点対称だけを使って定式化することができるため, 容易にカンドルに移植することができる．また, これらの一般化として s-可換集合の概念が定義される．ここではこれらの概念と性質を紹介する．

なお当然ながら, カンドル内の部分集合の性質は, 同型写像で保たれるものを考える. ここで写像 $f : (Q_1, s^1) \to (Q_2, s^2)$ がカンドル準同型であるとは, $f \circ s^1_x = s^2_{f(x)} \circ f$ $(\forall x \in Q_1)$ が成り立つことである. また, 全単射な準同型を同型という.

2.1 pole 集合

まずは極 (pole) について述べる. 以下では, 極は pole と表記することとする. 部分集合を定式化するために, 二項関係, すなわち二点の組の性質から出発する.

定義 2.1. (Q, s) をカンドルとする. このとき

(1) Q 内の二点の組 (x, y) が **pole pair** とは, 次が成り立つこと: $s_x = s_y$.

(2) Q 内の部分集合 X が **pole 集合** とは, 次が成り立つこと: $\forall x, y \in X$, (x, y) は pole pair.

当然ながら (x, x) は常に pole pair である. これを自明な pole pair という. また, 一点集合 $\{x\}$ を自明な pole 集合という. 定義から pole 集合の部分集合も pole 集合なので, 包含関係に関して極大なものに興味がある. また, (極大) pole 集合は同型写像で移しても同じ性質をもつので, 自己同型を除いた分類が問題となる. この問題に関して, pole 集合の場合には次が成り立つ.

命題 2.2. (Q, s) をカンドルとし, $x \in Q$ とする. このとき x を含む極大 pole 集合は次で与えられる: $\{y \in Q \mid s_y = s_x\}$.

従って特に, (Q, s) が等質カンドルならば, 極大 pole 集合は自己同型を除いて一意的である. ここでカンドルが等質とは, 自己同型群が推移的に作用すること.

2.2 対蹠集合

ここでは対蹠集合について述べる. pole と同様に, 二項関係を用いて定義する.

定義 2.3. (Q, s) をカンドルとする. このとき

(1) Q 内の二点の組 (x, y) が **対蹠 pair** とは, 次が成り立つこと: $s_x(y) = y$ かつ $s_y(x) = x$.

(2) Q 内の部分集合 X が **対蹠集合** とは, 次が成り立つこと: $\forall x, y \in X$, (x, y) は対蹠 pair.

定義から, 対蹠集合の部分集合は対蹠である. また (極大) 対蹠集合という性質は同型写像で保たれる. 以上より, 与えられたカンドル (Q, s) 内の極大対蹠集合を, 自己同型を除いて分類することが問題となる. ちなみに一般の対称空間に対して, 極大対蹠集合の一意性は成立しない.

命題 2.4. カンドル内の pole 集合は対蹠である.

すなわち, 対蹠集合は pole 集合の拡張になっている. 逆が成立する例としない例について, 後半で紹介する.

2.3 s-可換集合

最後に s-可換集合を定義する.

定義 2.5. (Q, s) をカンドルとする. このとき

(1) Q 内の二点の組 (x, y) が **s-可換 pair** とは, 次が成り立つこと: $s_x \circ s_y = s_y \circ s_x$.

(2) Q 内の部分集合 X が **s-可換集合** とは, 次が成り立つこと: $\forall x, y \in X$, (x, y) は対蹠 pair.

今までと同様に, s-可換集合の部分集合は s-可換である. また (極大) s-可換集合という性質は同型写像で保たれる. 従って, 与えられたカンドル (Q, s) 内の極大 s-可換集合を, 自己同型を除いて分類することが問題となる.

命題 2.6. カンドル (Q, s) 内の部分集合 X に対して,

(1) X が対蹠集合なら s-可換である.

(2) (Q, s) の pole が自明であるとき, 逆も成立する.

また, カンドル内の部分集合 X が **部分カンドル** であるとは, 次が成り立つことであった: $\forall x, y \in X$, $s_x^{\pm 1}(y) \in X$. 従って pole 集合と対蹠集合は, 極大であってもなくても, 常に部分カンドルとなる (内在的には自明カンドル, すなわち $s_x = \mathrm{id}$ となるカンドル). 一方で s-可換集合に関しては, 極大性を仮定すれば次が成り立つ.

命題 2.7. カンドル内の極大 s-可換集合 X は部分カンドルである.

従って極大 s-可換集合については, その内在的なカンドルとしての性質も考えられる. その内在的な性質と外のカンドルの間の関係を問う問題は, 興味深いと思われる.

3 具体例

以下では球面, 実射影空間, 二面体カンドルの pole 集合を紹介する. これらを通して, pole, 対蹠, s-可換の差異を明らかにしていく.

3.1 球面

まずは球面 S^n 内の部分集合に関して述べる. S^n 上の点対称は, s_x を $\mathbb{R}x$ に関する折り返しで与えられる. 式で書くと $s_x(y) = -y + 2\langle y, x\rangle x$ (ここで S^n は $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の単位球である). すなわち s_x を $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の変換とみると, $\mathbb{R}x$ 上で id, その直交補空間 $(\mathbb{R}x)^\perp$ 上で $-\mathrm{id}$ となる線型写像である. この点対称の定義より, 次が従う.

命題 3.1. 球面 (S^n, s) および $x, y \in S^n$ に対して, 以下が成り立つ:

(1) (x, y) が pole pair であるための必要十分条件は $x = \pm y$ となること. 従って, (S^n, s) 内の極大 pole 集合は $\{\pm e_1\}$ と自己同型で合同.
(2) (x, y) が対蹠 pair であるための必要十分条件は $x = \pm y$ となること. 従って, (S^n, s) 内の対蹠集合は pole 集合である.
(3) (x, y) が s-可換 pair であるための必要十分条件は $x = \pm y$ または $\langle x, y\rangle$ となること. 従って, (S^n, s) 内の極大 s-可換集合は $\{\pm e_1, \ldots, \pm e_{n+1}\}$ と自己同型で合同.

球面は対称空間すなわち無限カンドルであるが, その場合に, 各部分集合の差異をまとめると次のようになる:

$$S^n : \quad \text{pole} = \text{対蹠} \subsetneq s\text{-可換}.$$

3.2 実射影空間

次に実射影空間 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ を扱う. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は, 集合としては $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の 1 次元線型部分空間の全体である. 各 $0 \neq x \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して $[x] := \mathbb{R}x \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ と表す. 点対称 $s_{[x]}$ は, 球面 S^n の点対称から誘導されるものである. S^n および $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ における点対称を区別して記号で書くと, $s_{[x]}^{\mathbb{R}\mathrm{P}^n}([y]) := [s_x^{S^n}(y)]$. この点対称が well-defined であることは $s_x^{S^n} = s_{-x}^{S^n}$ から従う. このとき, 例えば $s_{[e_1]}([e_2]) = [-e_2] = [e_2]$ なので, $([e_1], [e_2])$ は対蹠 pair である. 同様に考えていくと, 次が得られる.

例 3.2. $n > 1$ とする．このとき，実射影空間 $(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, s)$ および $[x], [y] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ に対して，以下が成り立つ:

(1) $([x], [y])$ が pole pair であるための必要十分条件は $[x] = [y]$ となること．従って，$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 内の pole 集合は自明なもの (一点集合) に限る．

(2) $([x], [y])$ が対蹠 pair であるための必要十分条件は $[x] = [y]$ または $x \perp y$ となること．従って，$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 内の極大対蹠集合は $\{[e_1], \ldots, [e_{n+1}]\}$ と自己同型で合同．

(3) $([x], [y])$ が s-可換 pair であるための必要十分条件は，それらが対蹠 pair であること．従って，$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 内の s-可換集合は対蹠集合である．

実射影空間も対称空間すなわち無限カンドルであるが，その場合に，次をみたす例が存在することが分かったことになる:

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n \ (n \geq 2): \quad \text{pole} \subsetneq \text{対蹠} = s\text{-可換}.$$

これと球面の場合と合わせて，対称空間において，pole 集合と対蹠集合が一致する例と異なる例，また対蹠集合と s-可換集合が一致する例と異なる例が得られた．

上の例では $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ の次元を $n > 1$ に限定していたが，$n = 1$ の場合は様子が異なることも分かっている．

例 3.3. $n = 1$ とする．このとき，実射影空間 $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ および $[x], [y] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ に対して以下が成り立つ:

(1) $([x], [y])$ が pole pair であるための必要十分条件は，x と y が平行または直交すること．従って，$\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ 内の極大 pole 集合は $\{[e_1], [e_2]\}$ と自己同型で合同．

(2) $([x], [y])$ が対蹠 pair であるための必要十分条件は，それらが pole pair であること．従って，$\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ 内の対蹠集合は pole 集合となる．

(3) $([x], [y])$ が s-可換 pair であるための必要十分条件は，それらの間の角度が 0, $\pi/4$, $\pi/2$ のいずれかであること．従って，$\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ 内の極大 s-可換集合は次と自己同型で合同: $\{[e_1], [e_2], [e_1 + e_2], [e_1 - e_2]\}$．

従って，この場合も上と同様の図式を書いておくと，次のようになる:

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n \ (n = 1): \quad \text{pole} = \text{対蹠} \subsetneq s\text{-可換}.$$

3.3 二面体カンドル

ここでは有限カンドルの典型例として, 二面体カンドルを扱う. 二面体カンドル R_n は, 円 S^1 の n 等分点の集合を部分カンドルと見て点対称を定義したものである. また, 巡回群 $\mathbb{Z}_n$ に点対称を $s_x(y) = 2x - y \pmod n$ で定義したものと見ることもできる.

例 **3.4.** 二面体カンドル R_n および $x, y \in R_n$ に対して, 以下が成り立つ:

(1) (a) n が奇数のとき, (x, y) が pole pair であるための必要十分条件は $x = y$ となること. 従って pole 集合は一点集合.

(b) $n = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) のとき, (x, y) が pole pair であるための必要十分条件は $x - y \in k\mathbb{Z}$ となること. 従って極大 pole 集合は $\{x, x+k\}$ と自己同型で合同.

(2) (x, y) が対蹠 pair であるための必要十分条件は, これらが pole pair であること. 従って対蹠集合は pole 集合である. すなわち, n が奇数なら一点集合, n が偶数なら二点集合.

(3) (a) n が奇数のとき, 極大 s-可換集合は一点集合.

(b) $n = 4k - 2$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) のとき, s-可換集合は対蹠集合である.

(c) $n = 4k$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) のとき, (x, y) が s-可換 pair であるための必要十分条件は $x - y \in k\mathbb{Z}$ となること. 従って, 極大 s-可換は $\{0, k, 2k, 3k\}$ と自己同型で合同.

以上の状況をまとめると, 次のようになる:

$$\begin{aligned} R_n \ (n \notin 4\mathbb{Z}_{>0}) &: \quad \text{pole} = \text{対蹠} = s\text{-可換}, \\ R_n \ (n \in 4\mathbb{Z}_{>0}) &: \quad \text{pole} = \text{対蹠} \subsetneq s\text{-可換}. \end{aligned}$$

3.4 その他の有限カンドル

上でみたように, 二面体カンドルにおいては, pole 集合と対蹠集合は一致していた. 対称空間 (無限カンドル) の場合には, pole 集合と対蹠集合が異なる例を挙げているので, 違う概念であることは分かっているが, ここでは有限カンドルにおいても異なる例がある, ということを示しておく. そのために次の概念を導入する. ちなみに次の定義自体は, カンドルが有限である必要はない.

命題 3.5. (Q_λ, s^λ) (ただし $\lambda \in \Lambda$) をカンドルとする. このとき, 集合としての非交和 $Q := \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda$ に, 次の s^{free} で構造を定義したものはカンドルになる:

$$s_x^{\mathrm{free}}(y) = \begin{cases} s_x^\eta(y) & (\text{if } x, y \in Q_\eta), \\ y & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

上で得られたカンドルを, **相互作用のない非交和** という (当然ながら, 相互作用のある非交和も考えられる). このようなカンドルに対して, x と y が異なる成分に含まれている場合には (x, y) は対蹠 pair になるが, それらが pole pair になるとは限らない. その最も簡単と思われる場合が, 次の例である.

例 3.6. 一点カンドル $\{a\}$ と二面体カンドル $R_3 = \{0, 1, 2\}$ の相互作用のない非交和に対して, pole 集合は一点集合に限るが, 極大対蹠集合は $\{a, 0\}$ と自己同型で合同.

これによって, 有限カンドルにおいても pole 集合と対蹠集合は一般に異なることが示された.

最後に, 相互作用のない非交和や, 対蹠集合と s-可換集合が異なる二面体カンドル (すなわち R_{4k}) は非連結になることを補足しておく. ここでカンドルが **連結** とは, 内部自己同型群 (s_x 達で生成される群) が推移的に作用することだった. 連結な有限カンドルに限定した場合に, pole・対蹠・s-可換の間にどの程度の差異が生じるか, ということは, 当然調べるべき問題の一つである. また, 本稿で扱ったカンドルに対しては, 極大 s-可換集合は合同を除いて一意的であり, さらに内在的には等質カンドルであった. このような性質は, ある程度簡単なカンドルでは成り立つと思われるが, どの程度までなら同様の性質が成り立つか, という問題も興味深いと思われる.

参考文献

[1] Chen, B.-Y.: *Two-numbers and their applications — a survey*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **25** (2018), 565–596.

[2] Chen, B.-Y., Nagano, T.: *A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre*, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.

[3] Furuki, K., Tamaru, H.: *Flat homogeneous quandles and vertex-transitive graphs*, preprint.

[4] Ishihara, Y., Tamaru, H.: *Flat connected finite quandles*, Proc. Amer. Math. Soc., **144** (2016), 4959–4971.

[5] Joyce, D.: *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra, **23** (1982), 37–65.

[6] Kamada, S., Tamaru, H., Wada, K.: *On classification of quandles of cyclic type*, Tokyo J. Math., **39** (2016), 157–171.

[7] Kubo, A., Nagashiki, M., Okuda, T., Tamaru, H.: *A commutativity condition for subsets in quandles — a generalization of antipodal subsets*, In: Differential Geometry and Global Analysis, in Honor of Tadashi Nagano. Contemp. Math., to appear.

[8] Loos, O.: *Symmetric Spaces, I: General Theory.* Benjamin, New York (1969).

[9] Tamaru, H.: *Two-point homogeneous quandles with prime cardinality*, J. Math. Soc. Japan, **65** (2013), 1117–1134.

[10] 田丸 博士: 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part I, In: Geometry and Analysis 2014 (福岡大学微分幾何研究会) 記録集, 99–107 (2015).

[11] 田丸 博士: 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part II, In: 部分多様体論・湯沢 2014 記録集, 55–60 (2015).

[12] 田丸 博士: 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part III, In: 第 35 回代数的組合せ論シンポジウム記録集, 67–73 (2018).

[13] 田丸 博士: 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part IV, In: 部分多様体論・湯沢 2018 記録集 (2019).