例外型コンパクトリー群 F_4 および FI 型コンパクト対称空間の極大対蹠集合

東京工業高等専門学校 一般教育科 佐々木優

Yuuki Sasaki
Department of Liberal Arts,
National Institute of Technology, Tokyo College

本研究では，例外型コンパクトリー群 F_4 および FI 型コンパクト対称空間の極大対蹠集合の合同類の分類および具体的構成を行った．また，FI 型対称空間を例外ジョルダン代数を用いたグラスマン多様体として実現させ，この実現において極大対蹠集合を明示的に構成した．さらに，それぞれの場合に関して例外型コンパクトリー群 G_2 および G 型コンパクト対称空間の極大対蹠集合との関連も調べた．

1 背景

リーマン多様体 M の各点 p に対して，p を孤立固定点とするような対合的等長変換 s_p が対応付いているとき，M を対称空間といい s_p を p における点対称と呼ぶ．対称空間 M の二つの部分集合 A, B が合同であるとは，M の等長変換群の単位連結成分に含まれる等長変換 f によって，$f(A) = B$ が成り立つことをいう．A と合同な M の部分集合全体を A の合同類という．M の 2 点 $p, q \in M$ が対蹠的であるとは，$s_p(q) = q (\Leftrightarrow s_q(p) = p)$ をみたすことをいう．部分集合 $S \subset M$ の任意の 2 点が対蹠的であるとき，S を対蹠集合と呼ぶ．対蹠集合間の包含関係で極大なものを極大対蹠集合といい，最大の濃度を持つ対蹠集合を大対蹠集合と呼ぶ．また，大対蹠集合の濃度を 2-number といい．$\#_2 M$ と記す．とくに，コンパクトリー群上の単位元を含む極大対蹠集合は maximal elementary abelian 2-subgroup となることが知られており，これを極大対蹠部分群と呼ぶ．対蹠集合の概念は，Chen-Nagano により導入された [1]．以下，本稿では対称空間はコンパクトであるものを考える．対蹠集合は，対称空間上の様々な数理と関連を持つことが知られており，現在様々な数学者により研究がなされている．しかしながら，全ての対称空間に対してその極大対蹠集合がどのように与えられるのか分かっているわけではない．

本稿では例外型コンパクトリー群 F_4 および FI 型コンパクト対称空間に関して，その極大対蹠集合の合同類を分類し具体的構成を行う．F_4 においては Griess [5] によって極大対蹠部分群の共役類の分類はなされており，共役類の数は 1 つであるとわかっている．しかしながら，彼らの仕事では F_4 の極大対蹠集合を具体的な形で与えているわけではない．そこで我々は本稿において，F_4 の極大対蹠部分群の共役類の分類を独自に与え，F_4 の例外型ジョルダン代数への自己同形群としての実現において極大対蹠部分群がどのように与えられるのかを調べる．また，F_4 の極大対蹠集合を利用することで，FI 型コンパクト対称空間の極大対蹠集合の合同類を分類する．さらに，FI 型を例外ジョルダン代数のグラスマン多様体として実現させ，この実現において極大対蹠集合がどのように与えられるかを示す．加えて，例外型コンパクトリー群 G_2 や G 型対称空間の

極大対蹠集合との関連も調べる．F_4 の等質空間として与えられるコンパクト対称空間として FII 型も存在するが，FII 型は対称 R 空間であるので，対称 R 空間における極大対蹠集合の研究結果 ([7]) からその極大対蹠集合はよくわかっている．そのため，FII 型は本稿では多くは取り上げない．

2 準備

2.1 コンパクトリー群の極大対蹠集合の分類方法

本小節では，コンパクトリー群における極大対蹠集合の分類の基本方針を述べる．G を連結コンパクトリー群とし，e を G の単位元とする．G には両側不変計量が存在しこれにより G はコンパクト対称空間となる．G の任意の極大対蹠集合は合同変換により単位元を含む極大対蹠集合へと移るので，極大対蹠集合の合同類の分類問題は極大対蹠部分群の共役類の分類問題へと帰着される．ここで，対称空間の極地を考える．以下，コンパクト対称空間 M の等長変換 h に関して，h の不動点集合を $F(h, M)$ と書くことにする．

定義 2.1. $o \in M$ について，s_o の不動点集合 $F(s_o, M)$ の連結成分を o の極地と呼ぶ．$p \in F(s_o, M)$ を含む極地を $M_o^+(p)$ とかく．1 点集合である極地を極といい，$\{o\}$ を自明な極であるという．

各コンパクト対称空間で極地の個数は有限になる．極地に関して，次の性質が成り立つことがわかっている．

命題 2.2. [2] $o \in M$ における，等長変換群のイソトロピー群の単位連結成分を K とおく．このとき，$M_o^+(p) = \bigcup_{k \in K} k(p)$ となる．

A を M の極大対蹠集合とし，$o \in A$ であるとする．このとき $A \subset F(s_o, M)$ であるので，o の極地を $\{o\}, M_1^+, \cdots, M_k^+$ とすると，A の分割として

$$A = \{o\} \ \sqcup \ (A \cap M_1^+) \ \sqcup \ \cdots \ \sqcup \ (A \cap M_k^+)$$

が得られる．この議論をコンパクトリー群 G に適用する．単位元 $e \in G$ に関して，$F(s_e, G) = \{g \in G \ ; \ g^{-1} = g\}$ である．そこで，e の極地を $\{e\}, M_1^+, \cdots, M_k^+$ であるとする．このとき，各極地 M_l^+ $(1 \leq l \leq k)$ は任意の $p \in M_l^+$ により，$M_l^+ = \bigcup_{g \in G} gpg^{-1}$ として与えられる．A を G の極大対蹠部分群であるとする．このとき，A の分割として

$$A = \{e\} \ \sqcup \ (A \cap M_1^+) \ \sqcup \ \cdots \ \sqcup (A \cap M_k^+)$$

が得られる．各 $h \in G$ に対して，$\tau_h : G \to G \ ; \ x \mapsto hxh^{-1}$ とする．このとき，$g \in F(s_e, G)$ について $g^2 = e$ なので，τ_g は対合的内部自己同型となっている．$G^g = \{h \in G \ ; \ \tau_g(h) = h\}$ とおく．G が単連結のとき，各 $g \in F(s_e, G)$ について G^g は連結となる．自明な極を除く各極地 M_l^+ から元 σ_l をとる．次の主張は自明である．

命題 2.3. A を G の極大対蹠部分群とし，$A\cap M_l^+\neq\phi$ であるとする．このとき，A は G^{σ_l} のある極大対蹠部分群と共役になる．逆に，任意の $1\leq l\leq k$ について，G^{σ_l} の極大対蹠部分群は G の極大対蹠部分群となる．

よって，G の極大対蹠部分群の共役類の分類は，各 G^{σ_l} $(1\leq l\leq k)$ における極大対蹠部分群の共役類の分類へと帰着する．また G の極大対蹠部分群を用いて，G の単位元の極地の極大対蹠集合を分類することができる．

命題 2.4. G をコンパクトリー群とし，M_I^+ を単位元 I に関する一つの極地であるとする．もし，G の任意の極大対蹠集合が互いに共役であれば，M_I^+ の任意の極大対蹠集合は互いに合同である．

証明. A を G の極大対蹠部分群とする．B を M_I^+ の極大対蹠集合とすると，B を含む G の極大対蹠部分群 B' が存在する．B' はある $g\in G$ により $gB'g^{-1}=A$ となる．したがって，$gBg^{-1}\subset A\cap M_I^+$ となるので，$B\subset gAg^{-1}\cap M_I^+$ となる．いま，$gAg^{-1}\cap M_I^+$ は M_I^+ の対蹠集合であるので，B の極大性から $B=gAg^{-1}\cap M_I^+$ となる．これより，M_I^+ の任意の極大対蹠集合は互いに内部自己同型により移り合うので，互いに合同である． □

2.2　八元数と G_2

ここでは F_4 に関する種々の準備をする．多くの内容は [10] に準拠する．以下，$\mathbb{O}$ により八元数を表す．すなわち，$\mathbb{O}$ は $e_0=1,e_1,\cdots,e_7$ を基底とする $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間で，$e_1,\cdots,e_7$ の積は図 1 のようにして定める．次図において同じ線に乗っている e_1,e_2,e_3 について

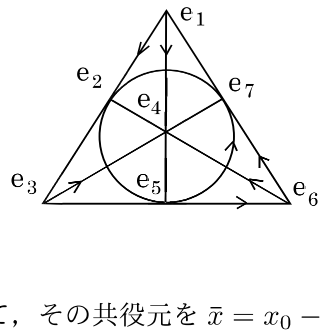
$$e_1e_2=e_3,\ e_2e_3=e_1,\ e_3e_1=e_2$$

と定める．その他の線に関しても同様に定める．さらに，1 をこの積に関する単位元とする．各 $1\leq i\neq j\leq 7$ に対して

$$e_i^2=-1,\ e_ie_j=-e_je_i$$

を満たすとし，分配法則が成り立つものとして積を定める．

図 1



$x=x_0+\sum_{i=1}^7 x_ie_i\in\mathbb{O}$ に関して，その共役元を $\bar{x}=x_0-\sum_{i=1}^7 x_ie_i$，実部を $R(x)=x_0$ と定める．さらに，$x=\sum_{i=0}^7 x_ie_i$ と $y=\sum_{i=0}^7 y_ie_i$ の内積を $\langle x,y\rangle=x_0y_0+\sum_{i=1}^7 x_iy_i$ と定め，そのノルムを $|x|$ と記す．八元数においては結合法則が成り立たない．写像 $\alpha:\mathbb{O}\to\mathbb{O}$ が自己同形

であるとは，α はベクトル空間の自己同型写像でさらに $\alpha(x)\alpha(y) = \alpha(xy)$ が成り立つこととする．$\mathbb{O}$ の自己同型写像全体のなす群を G_2 と定める．G_2 の元に関して次の命題が成り立つ．

命題 2.5. 任意の $\alpha \in G_2$ について次が成り立つ．
(1) 任意の $x, y \in \mathbb{O}$ について $\langle \alpha(x), \alpha(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
(2) $\alpha(1) = 1$
(3) $\alpha(\overline{x}) = \overline{\alpha(x)} \quad (x \in \mathbb{O})$

とくに G_2 は連結であることが知られているので ([11])，$G_2 \subset SO(7) \cong \{g \in SO(\mathbb{O})\ ;\ g(1) = 1\}$ である．次に，3 対原理をみておく．以下，$\mathbb{R}^8$ と $\mathbb{O}$ を同一視し，$SO(8) = SO(\mathbb{O})$ かつ $O(8) = O(\mathbb{O})$ としておく．

命題 2.6 ($SO(8)$ における 3 対原理)**.** 任意の $x_1 \in SO(8)$ に対して，$x_2, x_3 \in SO(8)$ で

$$(x_1 u)(x_2 v) = x_3(uv) \quad u, v \in \mathbb{O}$$

を満たすものが存在する．さらに，このような x_2, x_3 は，x_1 に対して $(x_2, x_3), (-x_2, -x_3)$ の 2 通りに限る．

写像 $\kappa : SO(8) \to SO(8)$ を $g \in SO(8), x \in \mathbb{O}$ に対して $(\kappa g)(x) = \overline{g(\overline{x})}$ により定める．

命題 2.7. [10] $x_1, x_2, x_3 \in O(8)$ に対して，$(x_1 u)(x_2 v) = (\kappa x_3)(uv)(u, v \in \mathbb{O})$ が成り立つならば,

$$(x_2 u)(x_3 v) = (\kappa x_1)(uv), \quad (x_3 u)(x_1 v) = (\kappa x_2)(uv).$$

3 対原理を用いて $SO(8) \times SO(8) \times SO(8)$ の部分群として次の $\tilde{D_4}$ を考える．

$$\tilde{D_4} = \{(x_1, x_2, x_3) \in SO(8) \times SO(8) \times SO(8)\ ;\ (x_1 u)(x_2 v) = (\kappa x_3)(u, v)\ (u, v \in \mathbb{O})\}.$$

命題 2.8. [10] $\tilde{D_4} \cong Spin(8)$

G_2 の元 g について $(\kappa g)(uv) = \overline{g(\overline{uv})} = \overline{\overline{g(uv)}} = g(uv) = (gu)(gv)$ が成り立つので,

$$G_2 \cong \{(g, g, g) \in SO(8) \times SO(8) \times SO(8)\ ;\ g \in G_2\} \subset \tilde{D_4} \cong Spin(8).$$

とくに，$\tilde{D_4}$ と $SO(8) \times SO(8) \times SO(8)$ の対角線集合の共通部分は G_2 に含まれることに注意．また，G_2 の $\tilde{D_4}$ への以下の 4 種類の埋め込み $\phi_i : G_2 \to \tilde{D_4}$ を考える．$g \in G_2$ としたとき，

$$\phi_0(g) = (g, g, g), \quad \phi_1(g) = (g, -g, -g), \quad \phi_2(g) = (-g, g, -g), \quad \phi_3(g) = (-g, -g, g)$$

により定める．以下，I_n で n 次単位行列とする．このとき，$Spin(8)$ の中心 $Z(Spin(8))$ は

$$Z(Spin(8)) = \{(I_{\mathbb{O}}, I_{\mathbb{O}}, I_{\mathbb{O}}), (I_{\mathbb{O}}, -I_{\mathbb{O}}, -I_{\mathbb{O}}), (-I_{\mathbb{O}}, I_{\mathbb{O}}, -I_{\mathbb{O}}), (-I_{\mathbb{O}}, -I_{\mathbb{O}}, I_{\mathbb{O}})\}$$

である．各 $\phi_i(G_2)$ たちは $Z(Spin(8))$ の元により互いに移り合う．

2.3 Jordan 代数と F_4

$M(3,\mathbb{O})$ を八元数を成分にもつ 3 次正方行列全体とし $\mathfrak{J}=\{X\in M(3,\mathbb{O})\ ;\ X^*=X\}$ とする．このとき，各 $X\in\mathfrak{J}$ は次のように書くことができる．

$$X=\begin{pmatrix}\xi_1 & x_3 & \bar{x_2}\\ \bar{x_3} & \xi_2 & x_1\\ x_2 & \bar{x_1} & \xi_3\end{pmatrix},\quad \xi_i\in\mathbb{R},\ x_i\in\mathbb{O}.$$

この X を $X(\xi,x)$ と書くことにする．$\mathfrak{J}$ は 27 次元の $\mathbb{R}$ 上ベクトル空間である．$\mathfrak{J}$ に Jordan 積 $X\circ Y=\frac{1}{2}(XY+YX)$ を定める．Jordan 積の入った $\mathfrak{J}$ を例外 Jordan 代数という．定義から明らかに $X\circ Y=Y\circ X$ である．$\mathfrak{J}$ のトレース $\mathrm{tr}(X)=\xi_1+\xi_2+\xi_3$，内積 $(X,Y)=\mathrm{tr}(X\circ Y)$ を定める．E_{ij} $(1\le i,j\le 3)$ を (i,j)-成分を 1 とし，その他の成分を 0 とする 3 次正方行列とする．$\mathfrak{J}$ の元 $E_i,F_i(x)(x\in\mathbb{O})$ $(1\le i\le 3)$ を次で定める．

$$\begin{aligned}&E_1=E_{11},\quad E_2=E_{22},\quad E_3=E_{33},\\ &F_1(x)=xE_{21}+\bar{x}E_{21},\quad F_2(x)=\bar{x}E_{13}+xE_{31},\quad F_3(x)=xE_{12}+\bar{x}E_{21}.\end{aligned}$$

このとき，これらの元の間の Jordan 積は次のように与えられる．

$$\begin{aligned}&E_i\circ E_i=E_i,\ E_i\circ E_j=0\ (i\ne j),\\ &E_i\circ F_i(x)=0,\ E_i\circ F_j(x)=\frac{1}{2}F_j(x)\ (i\ne j),\\ &F_i(x)\circ F_i(y)=\langle x,y\rangle(E_{i+1}+E_{i+2}),\ F_i(x)\circ F_{i+1}(y)=\frac{1}{2}F_{i+2}(\bar{xy}).\end{aligned}$$

ただし，最後の式においては添え字は mod3 であるとする．線形自己同型 $f:\mathfrak{J}\to\mathfrak{J}$ が $\mathfrak{J}$ の自己同型写像であるとは，f が Jordan 積を保つものと定める．さらに，$\mathfrak{J}$ の自己同型写像全体のなす群を F_4 と定める．任意の $f\in F_4$ について，$(f(X),f(Y))=(X,Y)$ が成り立つ．本稿ではこの実現を用いて F_4 の極大対蹠集合を考える．以下，I で F_4 の単位元を表すことにする．

2.4 F_4 の部分群

ここでは，横田 [10] から F_4 のいくつかの部分群をみておく．F_4 の部分群 $D_4'=\{g\in F_4\ ;\ gE_i=E_i\ (i=1,2,3)\}$ を定める．このとき $\tilde{D}_4$ と D_4' は同型になり同型写像として次が知られている．

$$\tilde{D}_4\to D_4'\ ;\ (x_1,x_2,x_3)\mapsto x,\quad x(X(\xi,x))=\begin{pmatrix}\xi_1 & x_3u_3 & \overline{x_2u_2}\\ \overline{x_3u_3} & \xi_2 & x_1u_1\\ x_2u_2 & \overline{x_1u_1} & \xi_1\end{pmatrix}.$$

したがって，D_4' は $Spin(8)$ と同型になる．以下，単に $Spin(8)$ と書いたら，それは D_4' を指すこととする．また，$x\in Spin(8)$ を $\bar{D}_4$ の表示を用いて (x_1,x_2,x_3) と書く．$G_2\subset\tilde{D}_4$ であるので，$G_2\subset Spin(8)\subset F_4$ とみなせる．F_4 の元 σ を以下により定める．

$$\sigma(X(\xi,x))=\begin{pmatrix}\xi_1 & -x_3 & -\overline{x_2}\\ -\overline{x_3} & \xi_2 & x_1\\ -x_2 & \overline{x_1} & \xi_3\end{pmatrix}$$

F_4 の 2 種類の部分群 $(F_4)^\sigma = \{g \in F_4 \,;\, \sigma g = g\sigma\}$ と $(F_4)_{E_1} = \{g \in F_4 \,;\, g(E_1) = E_1\}$ を定めると，$(F_4)^\sigma = (F_4)_{E_1} \cong Spin(9)$ となることが知られている．以下単に $Spin(9)$ と書いたら，これらの群を指すこととする．定め方から $Spin(8) \subset Spin(9)$ となる．等質空間 $F_4/Spin(9)$ を FII 型コンパクト対称空間と呼ぶ．

以下, $Sp(1)\times Sp(3)$ を部分群 $\{\pm(1, I_3)\}$ で割って得られる群を，ドット積を用いて $Sp(1)\cdot Sp(3)$ と書くことにする [1]．ただし，I_n は n 次単位行列とする．$\gamma \in G_2$ を以下により定める．

$$\gamma(x_0 + \sum_{i=1}^{7} x_i e_i) = x_0 + \sum_{i=1}^{3} x_i e_i - \sum_{j=4}^{7} x_j e_j$$

このとき，γ に対して $G_2 \subset Spin(8) \subset F_4$ により定まる元を同じ記号 γ と書く．定義からすぐに $\gamma^2 = I$ となる．F_4 の部分群 $F_4^\gamma = \{g \in F_4 \,;\, g\gamma = \gamma g\}$ を定める．$\mathfrak{J}$ を以下のように分解する．

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & m_3 & \overline{m_2} \\ \overline{m_3} & \xi_2 & m_1 \\ m_2 & \overline{m_1} & \xi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_3 e_4 & -a_2 e_4 \\ -a_3 e_4 & 0 & a_1 e_4 \\ a_2 e_4 & -a_1 e_4 & 0 \end{pmatrix}$$

ただし，$x_i = m_i + a_i e_4$ $(m_i, a_i \in \mathbb{H})$．これより，$\eta : \mathfrak{J} \to H_3(\mathbb{H}) + \mathbb{H}^3$ を以下により定める．

$$\eta(X) = \begin{pmatrix} \xi_1 & m_3 & \overline{m_2} \\ \overline{m_3} & \xi_2 & m_1 \\ m_2 & \overline{m_1} & \xi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \end{pmatrix}$$

$\eta(X)$ の $H_3(\mathbb{H})$ 成分を $M(X)$，$\mathbb{H}^3$ 成分を $a(X)$ と書くことにする．明らかに η はベクトル空間の同形写像を与えている．$\psi : Sp(1) \times Sp(3) \to F_4$ を次で定める．

$$\psi(\alpha, A)(X(\xi, x)) = \eta^{-1}(AM(X)A^{-1} + \alpha a(X)A^{-1})$$

命題 2.9. [11] $\mathrm{Ker}(\psi) = \{(1, I_3), (-1, -I_3)\}$, $\mathrm{Im}(\psi) = F_4^\gamma$．とくに，$F_4^\gamma \cong Sp(1)\cdot Sp(3)$.

以下，単に $Sp(1)\cdot Sp(3)$ と書いたら F_4^γ のことであるとする．等質空間 $F_4/Sp(1)\cdot Sp(3)$ を FI 型コンパクト対称空間と呼ぶ．$Sp(1)\cdot Sp(3)$ の極大対蹠集合に関しては以下の結果をすでに得ている．$\pi : Sp(1)\times Sp(3) \to Sp(1)\cdot Sp(3)$ を自然な射影とし，Δ_n を対角成分が ± 1 である n 次対角行列全体とする．

命題 2.10. [6] $Sp(1)\cdot Sp(n)$ の任意の極大対蹠集合は $\pi(\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}(\Delta_1 \times \Delta_n))$ と共役である．とくに，$\#_2 Sp(1)\cdot Sp(n) = 2^{n+2}$ である．

F_4 において極地の個数は 2 になることが知られている．単位元 I に関するそれぞれの極地は $M_1^+ = \bigcup_{g\in F_4} g\gamma g^{-1}$, $M_2^+ = M_2^+ = \bigcup_{g\in F_4} g\sigma g^{-1}$ により与えられている．等質空間としてそれぞれ $M_1^+ = F_4/Sp(1)\cdot Sp(3)$, $M_2^+ = F_4/Spin(9)$ となっており M_1^+ は FI 型，M_2^+ は FII 型コンパクト対称空間になっている．

3 F_4 の極大対蹠集合

本節では F_4 の極大対蹠部分群の共役類を決定し，極大対蹠集合の各元を例外ジョルダン代数の自己同型写像として具体的に記述する．まず，Tanaka-Tasaki [7] の結果から，FII 型コンパクト

対称空間の極大対蹠集合は互いに合同になり $\#_2 FII = 3$ となることが分かっている．F_4 の単位元 I に関する極地 $M_2 = \bigcup_{g\in F_4} g\sigma g^{-1}$ は FII 型コンパクト対称空間になる．そこで，$\sigma_1 = \sigma$ とし，$\sigma_2, \sigma_3 \in M_2^+$ を次で定める．

$$\sigma_2\left(\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi_1 & -x_3 & \overline{x_2} \\ -\overline{x_3} & \xi_2 & -x_1 \\ x_2 & -\overline{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3\left(\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & -\overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \xi_2 & -x_1 \\ -x_2 & -\overline{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix}.$$

これらの可換性および対合的であることを用いて次の主張を得る．

補題 3.1. [7] $A^{II} := \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ は M_2^+ の極大対蹠集合であり，M_2^+ の任意の極大対蹠集合は A^{II} と合同である．

補題 3.2. F_4 の任意の極大対蹠部分群 A に関して，$A \cap M_1^+ \neq \phi$ が成り立つ．

証明. F_4 の極大対蹠部分群 A で $A \cap M_1^+ = \phi$ であるものが存在するとする．このとき，$A \subset \{I\} \cup M_2^+$ であることおよび A の極大性から A は $\{I\} \cup A^{II}$ と合同になる．しかしながら，$\{I\} \cup A^{II}$ は F_4 の極大対蹠部分群ではない．実際，γ は対合的であり $\{I\} \cup A^{II}$ の各元と可換であるため，$\{\gamma\} \cup A$ は対蹠集合である．これは A の極大性に矛盾するため $A \cap M_1^+ \neq \phi$ が成り立つ．

□

したがって命題 2.3 から F_4 の任意の極大対蹠部分群は，F_4^γ の極大対蹠部分群と合同になる．よって，全射準同型 $\psi : Sp(1) \times Sp(3) \to F_4^\gamma$ による $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}(\Delta_1 \times \Delta_3)$ の像を A_{F_4} とおけば次が成り立つ．

定理 3.3. A_{F_4} は F_4 の極大対蹠部分群であり，F_4 の任意の極大対蹠部分群は A_{F_4} と合同になる．

A_{F_4} の各元を記述するため $p_0, \cdots, p_7 \in G_2$ を次で定める．

$$\begin{aligned}
&p_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{O}}, && p_1 = \mathrm{Id}_{\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_0,e_1,e_2,e_3\}} - \mathrm{Id}_{\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_4,e_5,e_6,e_7\}}, \\
&p_2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_0,e_1,e_4,e_5\}} - \mathrm{Id}_{\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_2,e_3,e_6,e_7\}}, && p_3 = \mathrm{Id}_{\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_0,e_1,e_6,e_7\}} - \mathrm{Id}_{\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_2,e_3,e_4,e_5\}}, \\
&p_4 = \mathrm{Id}_{\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_0,e_2,e_4,e_6\}} - \mathrm{Id}_{\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_1,e_3,e_5,e_7\}}, && p_5 = \mathrm{Id}_{\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_0,e_2,e_5,e_7\}} - \mathrm{Id}_{\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_1,e_3,e_4,e_6\}}, \\
&p_6 = \mathrm{Id}_{\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_0,e_3,e_4,e_7\}} - \mathrm{Id}_{\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_1,e_2,e_5,e_6\}}, && p_7 = \mathrm{Id}_{\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_0,e_3,e_5,e_6\}} - \mathrm{Id}_{\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_1,e_2,e_4,e_7\}}.
\end{aligned}$$

このとき，$\{p_i \ ;\ 0 \leq i \leq 7\}$ は G_2 の極大対蹠部分群になっている [9]．計算から $A_{F_4} \subset Spin(8)$ であることがわかるので，(g_1, g_2, g_3) $(g_1, g_2, g_3 \in SO(8))$ の形で記すと次のようになる．

$$A_{F_4} = \left\{ \begin{matrix} (p_i, p_i, p_i), & (p_i, -p_i, -p_i), \\ (-p_i, p_i, -p_i) & (-p_i, -p_i, p_i) \end{matrix} \ ;\ 0 \leq i \leq 7 \right\}.$$

G_2 から F_4 への全測地的埋め込み $f_0, \cdots, f_3$ を次で定める．

$$\begin{aligned}
&f_0 : G_2 \to F_4 \ ;\ g \mapsto (g, g, g), && f_1 : G_2 \to F_4 \ ;\ g \mapsto (g, -g, -g), \\
&f_2 : G_2 \to F_4 \ ;\ g \mapsto (-g, g, -g), && f_3 : G_2 \to F_4 \ ;\ g \mapsto (-g, -g, g).
\end{aligned}$$

G_2 において任意の 2 つの極大対蹠部分群は互いに共役であること ([9]) から次の主張が得られる．

定理 3.4. A_{G_2} を G_2 の任意の極大対蹠部分群とする．このとき，$\bigcup_{i=0}^{3} f_i(A_{G_2})$ は F_4 の極大対蹠部分群になり，F_4 の任意の極大対蹠部分群は互いに共役である．

4 FI 型の極大対蹠集合

本節では，FI 型コンパクト対称空間の極大対蹠集合を調べる．F_4 の極地 M_1^+ が FI 型であった．命題 2.4 から次を得る．

定理 4.1. $A_{F_4} \cap M_1^+$ は FI 型コンパクト対称空間 M_1^+ の極大対蹠集合となり，M_1^+ の任意の極大対蹠集合は互いに合同である．

$A_{F_4} \cap M_1^+$ は次のように与えられる．

$$A_{F_4} = \left\{ \begin{array}{cc} (p_i, p_i, p_i), & (p_i, -p_i, -p_i), \\ (-p_i, p_i, -p_i) & (-p_i, -p_i, p_i) \end{array} \; ; \; 1 \leq i \leq 7 \right\}$$

$A_{F_4} \cap M_1^+$ がどのような集合かを調べるため，FI 型コンパクト対称空間の幾何的実現を考える．$\mathfrak{J}$ の部分空間でジョルダン積についても閉じているものを部分ジョルダン代数と呼ぶ．例えば $H_3(\mathbb{H}) := \{X \in M(3, \bigoplus_{i=0}^3 \mathbb{R}e_i) \; ; \; X = {}^t\bar{X}\}$ は $\mathfrak{J}$ の部分ジョルダン代数である．$\mathfrak{J}$ のジョルダン積 $\circ$ を $H_3(\mathbb{H})$ へ制限したものを $\circ_{\mathbb{H}}$ と記す．部分ジョルダン代数 V に対して，線形同型 $f : H_3(\mathbb{H}) \to V$ で $f(X \circ_{\mathbb{H}} Y) = f(X) \circ f(Y)$ を満たすものが存在するとき，V を $\mathbb{H}$-部分空間と呼ぶことにする．また，$\mathbb{H}$-部分空間をすべて集めた集合を $\mathbb{H}$-グラスマン多様体と呼び $G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ と記す．F_4 の定義から，$\mathbb{H}$-部分空間の F_4 の元による像は再び $\mathbb{H}$-部分空間になることがわかる．したがって，F_4 は自然に $G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ へ作用している，また，$H_3(\mathbb{H}) \in G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ におけるイソトロピー群は，$H_3(\mathbb{H})$ が γ の $+1$ 固有空間であることから $F_4^\gamma \cong Sp(1) \cdot Sp(3)$ となる．この作用を調べることで次がわかった．

定理 4.2. [6] F_4 の $\mathbb{H}$-グラスマン多様体 $G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ への作用は推移的となり，$\mathbb{H}$-グラスマン多様体 $G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ は FI 型コンパクト対称空間である．

F_4 の極地 $M_1 = \bigcup_{g \in F_4} g\gamma g^{-1}$ および $\mathbb{H}$-グラスマン多様体 $G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ はいずれも FI 型コンパクト対称空間であるが，その間の対応として次がある．

$$M_1^+ \ \ni p \ \mapsto \ V_p^{+1} := \{X \in \mathfrak{J} \; ; \; p(X) = X\} \ \in \ G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$$

この対応による M_1^+ の極大対蹠集合 $A_{F_4} \cap M_1^+$ の像を $A_{G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})}$ と記す．$A_{G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})}$ の各元を記述するため次のように記号を定める．4 節で導入した $p_1, \cdots, p_7 \in G_2$ に対して，各 p_k $(1 \leq k \leq 7)$ の $+1$ 固有空間 $V_{p_i}^{+1}$ を U_{p_i} と記す．すなわち，

$$\begin{array}{ll} U_1 = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{E}e_3, & U_2 = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_4 \oplus \mathbb{E}e_5, \\ U_3 = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_6 \oplus \mathbb{E}e_7, & U_4 = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_4 \oplus \mathbb{E}e_6, \\ U_5 = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_5 \oplus \mathbb{E}e_7, & U_6 = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_4 \oplus \mathbb{E}e_7, \\ U_7 = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_5 \oplus \mathbb{E}e_6. & \end{array}$$

さらに $\mathfrak{e} = \bigoplus_{i=1}^3 \mathbb{R}E_i \subset \mathfrak{J}$ とおく．また，各 $1 \leq i \leq 3$ および $\mathbb{O}$ の部分空間 V に対して $F_i(V) = \bigcup_{a \in V} F_i(a)$ と定める．このとき，$A_{G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})}$ は次のように与えられる．

$$A_{G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})} = \left\{ \begin{array}{cc} \mathfrak{e} \oplus F_1(U_k) \oplus F_2(U_k) \oplus F_3(U_k), & \mathfrak{e} \oplus F_1(U_k) \oplus F_2(U_k^\perp) \oplus F_3(U_k^\perp), \\ \mathfrak{e} \oplus F_1(U_k^\perp) \oplus F_2(U_k) \oplus F_3(U_k^\perp), & \mathfrak{e} \oplus F_1(U_k^\perp) \oplus F_2(U_k^\perp) \oplus F_3(U_k) \end{array} \; ; \; 1 \leq k \leq 7 \right\}.$$

$\mathbb{O}$ の 4 次元部分空間 V が結合的部分空間であるとは，任意の $v_1, v_2, v_3 \in V$ に対して $(v_1v_2)v_3 = v_1(v_2v_3)$ が成り立つことをいう．結合的部分空間全体によるグラスマン多様体を結合的グラスマン多様体といい $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ と記す．$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ は G 型コンパクト対称空間となることが知られている ([3] , Section IV, Thoeorem 1.4)．また，$\{U_k \ ; \ 1 \leq k \leq 7\}$ が $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ の極大対蹠集合となり，任意の極大対蹠集合は互いに合同になる [9]．次の $g_i \ (0 \leq i \leq 3)$ は $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ から $G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ への全測地的埋め込みを与える．

$$\begin{aligned}
g_0 &: G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \to G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}) \ ; \ V \mapsto \mathfrak{e} \oplus F_1(V) \oplus F_2(V) \oplus F_3(V), \\
g_1 &: G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \to G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}) \ ; \ V \mapsto \mathfrak{e} \oplus F_1(V) \oplus F_2(V^\perp) \oplus F_3(V^\perp), \\
g_2 &: G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \to G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}) \ ; \ V \mapsto \mathfrak{e} \oplus F_1(V^\perp) \oplus F_2(V) \oplus F_3(V^\perp), \\
g_3 &: G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \to G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}) \ ; \ V \mapsto \mathfrak{e} \oplus F_1(V)^\perp \oplus F_2(V^\perp) \oplus F_3(V).
\end{aligned}$$

このとき，$A_{G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})} = \bigcup_{i=0}^{3} g_i(\{U_k \ ; \ 1 \leq k \leq 7\})$ である．これより，$G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ の極大対蹠集合について次を得る．

定理 4.3. $A_{G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})}$ を $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ の任意の極大対蹠集合とする．このとき，$\bigcup_{i=0}^{3} g_i(A_{G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})})$ は $G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ の極大対蹠集合になり，$G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ の任意の極大対蹠集合は互いに合同になる．

注意 4.4. $\mathfrak{J}$ の部分ジョルダン代数 $\mathfrak{e} \oplus F_1(\mathbb{O})$ を考える．$\mathfrak{e} \oplus F_1(\mathbb{O})$ と同型であるような $\mathfrak{J}$ の部分ジョルダン代数全体を $G_s(\mathfrak{J})$ と記す．$G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ の場合と同じようにして $G_s(\mathfrak{J})$ には F_4 が推移的に作用することがわかり，$G_s(\mathfrak{J})$ は FII 型コンパクト対称空間になることがわかる．$G_s(\mathfrak{J})$ においては

$$\{\mathfrak{e} \oplus F_1(\mathbb{O}), \mathfrak{e} \oplus F_2(\mathbb{O}), \mathfrak{e} \oplus F_3(\mathbb{O})\}$$

が極大対蹠集合になっており，任意の極大対蹠集合は互いに合同になる [8]．

参考文献

[1] B.Y.Chen, T.Nagano, *A Riemmanian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre*, Trans. Amer. Math. J., 308(1988), 273-297

[2] B.Y.Chen, T.Nagano, *Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces II*, Duke. Math. J., 44(1977), 745-755

[3] R.Harvey, H.B.Lawson, *Calibrated geometries*, Acta. Math. **148**(1982), 47-157.

[4] T.Nagano, *The involutions of compact symmetric spaces*, Tokyo Math. J., 11,No.1(1988), 57-79

[5] R.L.Griess Jr, *Elementary abelian p-subgroups of algebraic groups*, Geom. Dedicata **39**(1991), 253-305.

[6] Y.Sasaki, *Maximal antipodal sets of* F_4 *and* FI, to appear in J. Lie Theory.

[7] M.S.Tanaka, H.Tasaki, *Antipodal sets of symmetric R-spaces*, Osaka J. Math., 50(2013), 161-169

[8] M.S.Tanaka, H.Tasaki, *Maximal antipodal subgroups of some compact classical Lie groups*, J. Lie Theory, 27(2017), 801-829

[9] M.S.Tanaka, H.Tasaki, O.Yasukura, *Maximal antipodal sets related to G_2*, preprint

[10] I.Yokota, *Exceptional Lie groups*, arXiv:0902.043lvl.

[11] I.Yokota, *Group and representation*, Shoukabou