Lie 球面幾何学の複素化と
実グラスマン多様体の全複素部分多様体

お茶の水女子大学 塚田 和美 *

Kazumi Tsukada

Ochanomizu University

序

私は四元数ケーラー多様体の複素部分多様体に興味を持って研究を続けてきた．n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の向き付けられた 4 次元部分空間全体のなす実グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ は四元数ケーラー構造をもつことが知られている． J.A.Wolf ([13]) によって分類された対称四元数ケーラー多様体の 1 種である．本稿ではグラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の半分次元全複素部分多様体の構成と Lie 球面幾何学の複素化と呼ばれるべき幾何学との関連について報告する．以下でその概要を述べる．

n 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の複素 2 次元部分空間で標準的な複素内積を制限したとき零となるもの全体 $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ は（複素） $2n-7$ 次元複素多様体となり，さらに正則接触構造をもつ．$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ から $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ への自然な射影が定義され，これは $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の四元数ケーラー構造に関するツイスターファイブレーションになっている．ツイスター空間は四元数ケーラー多様体を研究する際重要で有効な方法を与える．$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_{n-2}^2=1$ で定義される $\mathbb{C}^{n-2}$ の複素超曲面を $\mathbb{C}S^{n-3}$ で表し，複素球面と呼ぶ．$\mathbb{C}S^{n-3}$ には複素内積から誘導された複素リーマン計量が入り複素リーマン多様体になる．$\mathbb{C}S^{n-3}$ の単位接ベクトル束 $S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ は $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ への正則埋め込みをもち，その像は $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の開集合となる．以上をまとめると次のような図式を得る：

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathbb{C}S^{n-3} & & \widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n). \end{tikzcd}$$

ただし，左側のファイブレーションの定義域は $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ 全体ではなく，$S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ からの正則埋め込みによる像に限る．それぞれのファイブレーションと四元数ケーラー幾何学，Lie 球面幾何学の複素化との関係の概要を述べる．

上記右側のファイブレーションについて：$\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の複素部分多様体から $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ へのリフトが定まる（ツイスターリフトと呼ばれる）．この複素部分多様体が全複素部分多様体であるための必要十分条件はツイスターリフトが正則はめ込みで $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の正則接触構造に関してルジャンドル部分多様体になることである．逆にルジャンドル部分多様体を射影することにより全複素部分多様体が得られる．

*本研究は JSPS 科研費 18K03271 の助成を受けたものです

上記左側のファイブレーションについて：複素球面 $\mathbb{C}S^{n-3}$ の非退化複素超曲面の単位法ベクトル場により $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ への正則はめ込みが定まり，正則接触構造に関してルジャンドル部分多様体になる．ルジャンドル部分多様体の接触幾何学の視点から複素球面 $\mathbb{C}S^{n-3}$ の複素超曲面について論ずることが，Lie 球面幾何学の複素化に相当する幾何学である．

以上を統合することにより， $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ を仲立ちに複素球面 $\mathbb{C}S^{n-3}$ の複素超曲面と実グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の全複素部分多様体の間に対応関係があることが見いだされた．即ち，

複素球面の複素超曲面 $\to$ $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のルジャンドル部分多様体 $\to$ $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の全複素部分多様体

上記対応関係に着目して $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の全複素部分多様体の構成，特徴付け等の問題を考えることが研究課題である．

本論説の構成は以下の通り：

§1 四元数ケーラー多様体の全複素部分多様体

§2 $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の幾何

§3 複素リーマン幾何と Lie 球面幾何学の複素化

§1 四元数ケーラー多様体の全複素部分多様体

この節では四元数ケーラー多様体及びその複素部分多様体の定義と基本的な性質について述べる．

定義 1.1 $\tilde{M}^{4n}$ を $4n(n \geq 2)$ 次元多様体とし，$\tilde{g}$ を $\tilde{M}$ 上のリーマン計量，$\tilde{Q}$ を $\mathrm{End}\, T\tilde{M}$ の 3 次元部分束で次の条件をみたすものとする：

(a) $\tilde{M}$ の各点 p に対して p の近傍で定義された $\tilde{Q}$ の局所枠場 $\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$ が存在して，次をみたす:

$$\begin{aligned}\tilde{I}^2 = \tilde{J}^2 = \tilde{K}^2 = -\mathrm{id}, \quad \tilde{I}\tilde{J} = -\tilde{J}\tilde{I} = \tilde{K}, \\ \tilde{J}\tilde{K} = -\tilde{K}\tilde{J} = \tilde{I}, \quad \tilde{K}\tilde{I} = -\tilde{I}\tilde{K} = \tilde{J}.\end{aligned}$$

(b) 各点 p で $\tilde{g}_p$ は $\tilde{Q}_p$-不変である．即ち，任意の $F \in \tilde{Q}_p$ に対し

$$\tilde{g}_p(Fu, v) + \tilde{g}_p(u, Fv) = 0, \qquad u, v \in T_p\tilde{M}$$

が成り立つ．

(c) $\tilde{Q}$ は $\mathrm{End}\, T\tilde{M}$ の中で $\tilde{g}$ に随伴するリーマン接続 $\tilde{\nabla}$ に関して平行である．

このとき，$(\tilde{Q}, \tilde{g})$ を $\tilde{M}$ 上の**四元数ケーラー構造 (quaternionic Kähler structure)** といい，$(\tilde{Q}, \tilde{g})$ を備えた多様体 $(\tilde{M}, \tilde{Q}, \tilde{g})$ を**四元数ケーラー多様体 (quaternionic Kähler manifold)** という．条件 (a) をみたす局所枠場 $\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$ を局所許容枠場という．

四元数構造 $\tilde{Q}$ に次のようにして，自然に内積 $\langle , \rangle$ を導入することできる：$A, B \in \tilde{Q}$ に対し，

$$\langle A, B \rangle = -\frac{1}{4n}\mathrm{tr}(AB)$$

とおく．ここで，$\mathrm{tr}(AB)$ は AB を 各接空間の実線形変換とみたときのトレースを表す．局所許容枠場 $\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$ は，この内積に関して正規直交枠場となる．また，リーマン接続 $\tilde{\nabla}$ は $\langle , \rangle$ に関して計量接続となる．

四元数ケーラー多様体はアインシュタイン多様体となることが知られている．即ち，リッチ曲率テンソル Ric について $\mathrm{Ric} = \lambda \tilde{g}$ （ λ は実定数）が成立する．

例 1.2 リッチ曲率が 0 でない四元数ケーラー多様体 $\tilde{M}$ で，対称空間になるものは J.A.Wolf [13] によって分類されている．そのリストについては，Besse ([3]) にある表を引用させてもらう．リッチ曲率が正のときは，$\tilde{M}$ はコンパクト型で表中の G/K で表されるもの．リッチ曲率が負のときは，$\tilde{M}$ は非コンパクト型で表中の G^*/K で表されるものである．

G	G^*	K	$\dim \tilde{M}$
$Sp(n+1)$	$Sp(n,1)$	$Sp(n)Sp(1)$	$4n(n \geq 2)$
$SU(n+2)$	$SU(n,2)$	$S(U(n)U(2))$	$4n(n \geq 2)$
$SO(n+4)$	$SO(n,4)$	$SO(n)SO(4)$	$4n(n \geq 3)$
G_2	G_2^2	$SO(4)$	8
F_4	F_4^{-20}	$Sp(3)Sp(1)$	28
E_6	E_6^2	$SU(6)Sp(1)$	40
E_7	E_7^{-5}	$Spin(12)Sp(1)$	64
E_8	E_8^{-24}	$E_7Sp(1)$	112

ここで $Sp(n+1)/Sp(n)Sp(1)$ は四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$，$SU(n+2)/S(U(n)U(2))$ は $\mathbb{C}^{n+2}$ の複素 2 次元部分空間全体のなす複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+2})$, $SO(n+4)/SO(n)SO(4)$ は $\mathbb{R}^{n+4}$ の向きづけられた 4 次元部分空間全体のなす実グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^{n+4})$ である．

四元数微分幾何学を展開する際，ツイスター空間を導入し複素微分幾何学を援用するのは有効である．ツイスター空間とその上の複素構造，正則接触構造について述べる．$(\tilde{M}, \tilde{Q}, \tilde{g})$ を<u>リッチ曲率が 0 でない</u> 四元数ケーラー多様体とする．各点 $p \in \tilde{M}$ で

$$\mathcal{Z}_p = S(\tilde{Q}_p) = \{\tilde{I} \in \tilde{Q}_p | \tilde{I}^2 = -\mathrm{id}\} = \{\tilde{I} \in \tilde{Q}_p | \langle \tilde{I}, \tilde{I} \rangle = 1\}$$

とおく．$\pi : \mathcal{Z} \to \tilde{M}$ は，$\tilde{M}$ 上の S^2-束になる．$\mathcal{Z}$ を $\tilde{M}$ の**ツイスター空間**と呼ぶ．$\mathcal{Z}$ は自然な複素構造 $I^{\mathcal{Z}}$ ，正則接触構造 $\mathcal{H}$ をもつ (Salamon [11]). Besse ([3] Ch. 14 §G) に従いその構成の概略を述べる．リーマン接続 $\tilde{\nabla}$ に関して，$\tilde{Q}$ は End $T\tilde{M}$ の平行な部分束であり, $\tilde{\nabla}$ は $\tilde{Q}$ の自然な内積に関する計量接続であったので，$\tilde{\nabla}$ による平行移動で $\mathcal{Z}$ は保たれる．従って $\mathcal{Z}$ の接束 $T\mathcal{Z}$ は次のように直和分解される:

$$T\mathcal{Z} = \mathcal{V} + \mathcal{H}$$

ここで，$\mathcal{V}$ は S^2-束のファイバーに接する垂直接分布, $\mathcal{H}$ はリーマン接続 $\tilde{\nabla}$ によって定義される水平接分布を表す．各点 $z \in \mathcal{Z}$ に対し，$T_z\mathcal{Z}$ 上の概複素構造 $I^{\mathcal{Z}}$ を次のように定める．$\mathcal{Z}_{\pi(z)} = S(\tilde{Q}_{\pi(z)})$ には $\tilde{Q}_{\pi(z)}$ の内積と向きから，標準計量と向きが定まる．この標準計量と向きから $\mathcal{Z}_{\pi(z)}$ に複素構造が定まる．$\mathcal{V}_z = T_z\mathcal{Z}_{\pi(z)}$ であるから，$\mathcal{Z}_{\pi(z)}$ の複素構造より，$\hat{I}^2 = -\mathrm{id}$ をみたす $\mathcal{V}_z$ の線形変換 $\hat{I}$ が定まる．一方，$\pi_*|_{\mathcal{H}_z} : \mathcal{H}_z \to T_{\pi(z)}\tilde{M}$ は線形同型写像であり，z は $T_{\pi(z)}\tilde{M}$ の線形変換で，$z^2 = -\mathrm{id}$ をみたしている．従って，$\bar{I} = (\pi_*|_{\mathcal{H}_z})^{-1} \circ z \circ \pi_*|_{\mathcal{H}_z}$ とおいて，$\mathcal{H}_z$ の線形変換 $\bar{I}$ を定めれば，$\bar{I}^2 = -\mathrm{id}$ をみたす．以上の議論の上で $T_z\mathcal{Z}$ 上の概複素構造 $I^{\mathcal{Z}}$ を次のように定める．

(i) $I^{\mathcal{Z}}$ は $\mathcal{V}_z, \mathcal{H}_z$ をそれぞれ不変にする．
(ii) $\mathcal{H}_z$ 上では，$I^{\mathcal{Z}} = \bar{I}$.
(iii) $\mathcal{V}_z$ 上では，$I^{\mathcal{Z}} = \hat{I}$.

このとき，$I^{\mathcal{Z}}$ は積分可能であることが示され，$\mathcal{Z}$ は複素多様体となる．さらに，水平接分布 $\mathcal{H}$ は正則接触構造となる．ここで，正則接触構造は次のように定義される：(複素) $2n+1$ 次元複素多様体 Z の（複素）余次元 1 接分布 $\mathcal{H}$ に対し，各点の近傍 U 上に正則 1-形式 ω が存在し，U 上で $\omega \wedge (d\omega)^n \neq 0, \omega|_{\mathcal{H}} = 0$ をみたすとき，$\mathcal{H}$ を**正則接触構造 (holomorphic contact structure)** という．

四元数ケーラー多様体のツイスター空間を具体的に与えることは興味深いと思う．そればかりでなく，個別の四元数ケーラー多様体の詳細な研究を進める上で重要な方法を与える．四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ のツイスター空間は複素射影空間 $\mathbb{C}P^{2n+1}$ であり，複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{m+2})$ のツイスター空間は複素射影空間の射影余接束 $\mathrm{P}(T^*\mathbb{C}P^{m+1})$ である．実グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ のツイスター空間については本論説 §2 で述べられる．

四元数ケーラー多様体の複素部分多様体について，その定義と基本的な性質について述べる．$(\tilde{M}^{4n}, \tilde{Q}, \tilde{g})$ をリッチ曲率が 0 でない $4n(n \geq 2)$ 次元四元数ケーラー多様体とする．$\tilde{M}$ のはめ込まれた部分多様体 M^{2m} に対して，$\tilde{Q}|_M$ の切断 $\tilde{I}$ で (1) $\tilde{I}^2 = -\mathrm{id}$, (2) $\tilde{I}TM = TM$ をみたすものが存在するとき，M^{2m} を $\tilde{M}$ の**概複素部分多様体**という (cf. [1])．このとき，$\tilde{Q}|_M$ は次のように分解される：

$$\tilde{Q}|_M = \mathbb{R}\tilde{I} + Q'. \tag{1.1}$$

ここで $Q' = [\tilde{I}, \tilde{Q}|_M] = \tilde{I}$ の直交補空間．以下，M を $\tilde{M}$ の概複素部分多様体とする．$\tilde{I}$ を M に制限して得られる M の概複素構造を I で表し，誘導されたリーマン計量を g とする．(M, I, g) は概エルミート多様体となる．概複素部分多様体 M の各点 p で $\tilde{J} \in Q'_p$ に対し $\tilde{J}T_pM \perp T_pM$ が成立するとき，M を $(\tilde{M}, \tilde{Q}, \tilde{g})$ の**全複素部分多様体 (totally complex submanifold)** と呼ぶ (cf. [6])．$2m$ $(m \geq 2)$ 次元概エルミート部分多様体がケーラー多様体であるための必要十分条件は全複素部分多様体となることであることが知られている ([1])．

$\pi : \mathcal{Z} \to \tilde{M}$ をツイスターファイブレーションとする．M^{2m} $(m \geq 2)$ を $(\tilde{M}^{4n}, \tilde{Q}, \tilde{g})$ の概複素部分多様体とし，$\tilde{I} \in \Gamma(\tilde{Q}|_M)$ を対応する切断とする．$\tilde{I}$ は $\mathcal{Z}|_M$ の切断であり，$\tilde{I}$ は M から $\mathcal{Z}$ へのはめ込みとみることができる．$\tilde{I}$ もしくはその像となる $\mathcal{Z}$ の部分多様体 $\tilde{I}(M)$ を概複素部分多様体の**ツイスターリフト**と呼ぶ．次の事実は全複素部分多様体を構成する際基本的である．

命題 1.3 ([2]) $(\tilde{M}^{4n}, \tilde{Q}, \tilde{g})$ をリッチ曲率が 0 でない $4n (n \geq 2)$ 次元四元数ケーラー多様体とし，M^{2m} $(m \geq 2)$ を $(\tilde{M}^{4n}, \tilde{Q}, \tilde{g})$ の概複素部分多様体とする．M が全複素部分多様体となるための必要十分条件は，ツイスターリフト $\tilde{I}$ が $\mathcal{Z}$ への正則はめ込みであり，かつ正則接触構造 $\mathcal{H}$ に関して積分多様体となることである．特に，$m = n$ のとき，全複素部分多様体 $M^{2n} \subset \tilde{M}^{4n}$ から $\mathcal{Z}$ へのリフト $\tilde{I}(M)$ は $\mathcal{Z}$ のルジャンドル部分多様体になる．逆に，$\mathcal{Z}$ のルジャンドル部分多様体を射影することにより $\tilde{M}^{4n}$ の全複素部分多様体が得られる．

§2 $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の幾何

この節では $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の正則接触構造，$\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ へのツイスターファイブレーションについて述べる．$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ は等質空間として $SO(n)/U(2)SO(n-4)$ と表され，$\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n) = SO(n)/SO(4)SO(n-4)$ のツイスター空間となることが知られている (cf. [7])．ここでは，ベクトル束の議論を用いて記述する．

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ でそれぞれ実数 $\mathbb{R}$, 複素数 $\mathbb{C}$ を成分に持つ n 項列ベクトル全体のなす実ベクトル空間，複素ベクトル空間を表す．$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{C}^n$ の実ベクトル部分空間とみる．$v \in \mathbb{C}^n$ に対し，$\bar{v}$ で v の各成分を共役複素数とするベクトルを表す．また，複素部分空間 $W \subset \mathbb{C}^n$ に対して

$$\overline{W} = \{\bar{v} \in \mathbb{C}^n \mid \ v \in W\ \}.$$

とおく．$\overline{W}$ は $\mathbb{C}^n$ の複素部分空間となる．$\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathbb{C}^n$ の標準的な複素内積とする．即ち

$$\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i w_i \qquad z, w \in \mathbb{C}^n$$

$\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathbb{R}^n$ に制限すると $\mathbb{R}^n$ の標準的なユークリッド内積になる．$\mathbb{C}^n$ 上のエルミート内積 h を次で定める:

$$h(z, w) = \langle\bar{z}, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i w_i \qquad z, w \in \mathbb{C}^n$$

$W \subset \mathbb{C}^n$ を複素部分空間とする．W の任意のベクトル u, v に対して，$\langle u, v\rangle = 0$ が成り立つとき，W を**等方的部分空間 (isotropic subspace)** という．$\widetilde{W} \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の偶数次元部分空間とし，$\widetilde{I}$ を $\widetilde{W}$ の複素構造とする．即ち，$\widetilde{W}$ の線形変換で $\widetilde{I}^2 = -\mathrm{id}_{\widetilde{W}}$ をみたす．$\widetilde{W}$ の任意のベクトル u, v に対して $\langle\widetilde{I}u, \widetilde{I}v\rangle = \langle u, v\rangle$ が成り立つとき，$\widetilde{I}$ を $\widetilde{W}$ の**直交的複素構造**と呼ぶ．$\{\ v_1, \cdots, v_m\ \}$ を複素ベクトル空間 $(\widetilde{W}, \widetilde{I})$ の基底とする．このとき，$\{\ v_1, \widetilde{I}v_1, \cdots, v_m, \widetilde{I}v_m\ \}$ は実ベクトル空間 $\widetilde{W}$ の基底となる．この基底の定める $\widetilde{W}$ の向きは $(\widetilde{W}, \widetilde{I})$ の基底の選び方によらない．このようにして定まる $\widetilde{W}$ の向きを $\widetilde{I}$ から定まる向きという．

補題 2.1 $\mathbb{C}^n$ の m 次元等方的部分空間 W と $\mathbb{R}^n$ の $2m$ 次元部分空間 $\widetilde{W}$，その上の直交的複素構造の組 $(\widetilde{W}, \widetilde{I})$ とは 1 対 1 に対応する．

対応の与え方 $W \subset \mathbb{C}^n$ を m 次元等方的複素部分空間とする．このとき，$\overline{W}$ は再び等方的部分空間となり，エルミート内積 h に関し W に直交している．特に $W \cap \overline{W} = \{0\}$.

$\widetilde{W}=(W+\overline{W})\cap\mathbb{R}^n$ とおく．$\widetilde{W}$ は $\mathbb{R}^n$ の $2m$ 次元部分空間となる．$W+\overline{W}$ の複素線形変換 $\widetilde{I}$ を

$$\widetilde{I}w=\sqrt{-1}w \quad w\in W, \qquad \widetilde{I}\bar{w}=-\sqrt{-1}\bar{w} \quad \bar{w}\in\overline{W}$$

で定める．このとき，$\widetilde{W}$ は $\widetilde{I}$-不変，即ち $\widetilde{I}(\widetilde{W})=\widetilde{W}$．$\widetilde{I}$ を $\widetilde{W}$ に制限すると $\widetilde{W}$ の直交的複素構造になる．

逆に，$(\widetilde{W},\widetilde{I})$ を $\mathbb{R}^n$ の $2m$ 次元部分空間とその上の直交的複素構造の組とする．$\widetilde{W}$ の複素化 $\widetilde{W}^{\mathbb{C}}=\widetilde{W}+\sqrt{-1}\widetilde{W}$ を考える．$\widetilde{I}$ を $\widetilde{W}^{\mathbb{C}}$ に複素線形に拡張する．$\widetilde{W}^{\mathbb{C}}$ における $\widetilde{I}$ の $\sqrt{-1}$ 固有空間を W とする．即ち

$$W=\left\{v\in\widetilde{W}^{\mathbb{C}} \mid \widetilde{I}v=\sqrt{-1}v\right\}.$$

とおく．このとき，W は m 次元等方的部分空間となる． □

$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ ($n\geq 6$) で $\mathbb{C}^n$ の複素 2 次元部分空間全体のなす複素グラスマン多様体を表し，$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ で 2 次元等方的部分空間全体のなす集合を表す．$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ は (複素) $2(n-2)$ 次元複素多様体で，$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ は $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ の（複素）余次元 3 の複素部分多様体になる．複素内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を保つ $\mathbb{C}^n$ の複素線形変換で行列式 1 となるもの全体のなす複素 Lie 群を $SO(n,\mathbb{C})$ で表す． $SO(n,\mathbb{C})$ は $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ に複素 Lie 変換群として作用する．$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ はこの作用で不変である．さらに，$SO(n,\mathbb{C})$ は $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ に推移的に作用する．

$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の幾何学を複素ベクトル束を用いて論ずる．$\underline{\mathbb{C}^n}=\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)\times\mathbb{C}^n$ を $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ 上の自明束，$E\subset\underline{\mathbb{C}^n}$ を**同語反復部分束 (tautological bundle)** とする．即ち

$$E=\{(e,v)\in\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)\times\mathbb{C}^n \mid v\in e\}$$

E は自明束の正則部分ベクトル束である．$\underline{\mathbb{C}^n}/E$ で商ベクトル束を表す．自然に正則ベクトル束になる．$\pi_E:\underline{\mathbb{C}^n}\to\underline{\mathbb{C}^n}/E$ を射影とする．π_E は正則ベクトル束の間の束準同型写像になる．$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,\underline{\mathbb{C}^n}/E)$ を各ファイバーにおける複素線形写像からなる複素ベクトル束とする．複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ の接ベクトル束 $T\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,\underline{\mathbb{C}^n}/E)$ とは複素ベクトル束として同型になる．その同型対応は次のように与えられる : d を $\underline{\mathbb{C}^n}$ の自明接続とする．$e\in\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n), v\in e$ に対して e の近傍で定義された E の切断 s を $s(e)=v$ となるように選ぶ．$X\in T_e\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ に対し $\alpha(X):e\to\mathbb{C}^n/e$ を

$$\alpha(X)v=\pi_E(d_Xs) \tag{2.1}$$

で定める．切断 s の選び方によらず定義される．また，$\alpha(X)$ は e から $\mathbb{C}^n/e$ への複素線形写像である．このように定められた $\alpha:T\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,\underline{\mathbb{C}^n}/E)$ は複素ベクトル束としての同型写像になる．この同型対応で，接ベクトル束と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,\underline{\mathbb{C}^n}/E)$ とを同一視する．

多様体 M から $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ への写像 f 及びその微分 df を ベクトル束の言葉で記述する : 同語反復部分束を f で引き戻すことにより，次の 1 対 1 対応が成立する :

$$\text{写像 } f:M\to\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n) \quad\leftrightarrow\quad \begin{array}{c}\text{部分ベクトル束}\\ E\subset\underline{\mathbb{C}^n}=M\times\mathbb{C}^n\end{array}$$

また，df には実線形写像

$$df : TM \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, \underline{\mathbb{C}^n}/E)$$

が対応している．f が複素多様体 M からの正則写像ならば，E は自明束 $\underline{\mathbb{C}^n} = M \times \mathbb{C}^n$ の正則部分ベクトル束となり，df は複素ベクトル束の間の束準同型写像になる．$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ は $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ の複素部分多様体であるから，$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の接ベクトル空間 $T_e\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ には $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(e, \mathbb{C}^n/e)$ の複素部分空間が対応している．それは次で与えられる：

$$T_e\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n) = \{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(e, \mathbb{C}^n/e) \mid \langle \phi(u), v\rangle + \langle u, \phi(v)\rangle = 0, \quad u, v \in e\}$$

ここで，e は等方的部分空間であるから，$\langle \phi(u), v\rangle$ は $\phi(u) \in \mathbb{C}^n/e$ に関して，$\mathbb{C}^n/e$ における代表元の選び方によらず定まることに注意する．

$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ に正則接触構造を定義しよう．複素余次元 1 の接分布 $\mathcal{D}$ を次のように定める：$e \in \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ で

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_e &= \{\phi \in T_e\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n) \mid \langle \phi(u), v\rangle = 0, \quad u, v \in e\} \\ &= \{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(e, \mathbb{C}^n/e) \mid \langle \phi(u), v\rangle = 0, \quad u, v \in e\} \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(e, e^{\perp}/e) \end{aligned}$$

とおく．ここで，$e^{\perp}$ は複素内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に関して e に直交する $\mathbb{C}^n$ の部分空間を表す．e は等方的部分空間であるから，$e \subset e^{\perp}$ であることに注意する．また，商ベクトル空間 $e^{\perp}/e$ の次元は $n-4$ である．$\mathcal{D}$ は $SO(n, \mathbb{C})$ の作用で不変な接分布である．

命題 2.2 $\mathcal{D}$ は $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の正則接触構造となる．また, $SO(n, \mathbb{C})$ は接触構造を保つ変換群として作用する．

$SO(n, \mathbb{C})$ の作用による $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の変換群を **Lie 接触変換群**とよぶ．

正則接触構造 $\mathcal{D}$ に関する $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のルジャンドル部分多様体について考える．M を複素多様体とし, その正則はめ込み (holomorphic immersion) $\lambda : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ が $\mathcal{D}$ の積分多様体となるものとする．即ち，$d\lambda$ による接ベクトル空間の像が $\mathcal{D}$ に含まれている．そのようなはめ込まれた複素多様体で最大次元 ($\frac{1}{2}\dim\mathcal{D}$) となるものがルジャンドル部分多様体である．ここで議論されている設定では，$\dim M = \frac{1}{2}\dim\mathcal{D} = \frac{1}{2}(\dim \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n) - 1) = n-4$ となる．

M を $n-4$ 次元複素多様体とし，$\lambda : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ を正則写像とする．同語反復部分束を引き戻すことにより，自明束 $\underline{\mathbb{C}^n} = M \times \mathbb{C}^n$ の正則部分ベクトル束 E が定まる．M の各点の近傍で定義された $\mathbb{C}^n$ に値をもつ正則関数 Z_1, Z_2 が E の局所枠場となっているとき，$\lambda = [Z_1, Z_2]$ と表すことにする．以上の設定で $\lambda : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ がルジャンドル部分多様体となるための条件を与えよう（cf. [5]）.

補題 2.3 $\lambda : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ がルジャンドル部分多様体になるための必要十分条件は M の各点 p の近傍で次の条件をみたす E の局所枠場 $[Z_1, Z_2]$ が存在することである．

(1) $\langle Z_i, Z_j\rangle = 0 \quad (i, j = 1, 2)$

(2) $X \in T_pM$ に対して，$dZ_1(X), dZ_2(X) \in \{Z_1(p), Z_2(p)\}_{\mathbb{C}}$ ならば，　$X = 0$.

(3) $\langle dZ_1, Z_2 \rangle = 0$

上記補題の条件 (2) で，$\{Z_1(p), Z_2(p)\}_{\mathbb{C}}$ は $Z_1(p), Z_2(p)$ で張られる $\mathbb{C}^n$ の部分空間即ち E_p を表す．(2) は λ がはめ込みになることに対応している．(3) で $\langle dZ_1, Z_2 \rangle$ は p の近傍で定義された正則 1 次微分形式を表している．条件 (3) は λ が $\mathcal{D}$ の積分多様体となることに対応している．

ルジャンドル部分多様体の自然な例を 2 つ述べる．

例 2.4 (1) 複素 2 次超曲面の積　$Q^{r-2} \times Q^{s-2}$: r, s を $r + s = n$ をみたす 2 以上の整数とする．$\mathbb{C}^n$ の r 次元部分空間 $\mathbb{C}^r$, s 次元部分空間 $\mathbb{C}^s$ を次で定める:

$$\mathbb{C}^r = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mid z_i \in \mathbb{C} \right\}, \quad \mathbb{C}^s = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_s \end{pmatrix} \mid w_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

このとき，直和分解 $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^r + \mathbb{C}^s$ を得る．$\mathbb{C}^r$, $\mathbb{C}^s$ は複素内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に関して直交している．複素 2 次超曲面 Q^{r-2}, Q^{s-2} を次で定める．

$$\begin{aligned} Q^{r-2} &= \{[z] \in \mathbb{C}P^{r-1} \mid z \in \mathbb{C}^r - \{0\}, \quad \langle z, z \rangle = 0\} \\ Q^{s-2} &= \{[w] \in \mathbb{C}P^{s-1} \mid w \in \mathbb{C}^s - \{0\}, \quad \langle w, w \rangle = 0\} \end{aligned}$$

ここで，Q^0 は，$\mathbb{C}P^1$ の 2 点である．$[z] \in Q^{r-2}$, $[w] \in Q^{s-2}$ に対して，$\{z, w\}_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}^n$ の 2 次元等方的部分空間になる．これより，自然な正則写像

$$\lambda : Q^{r-2} \times Q^{s-2} \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n), \quad ([z], [w]) \mapsto \{z, w\}_{\mathbb{C}}$$

が得られる．補題 2.3 により，$\lambda : Q^{r-2} \times Q^{s-2} \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ はルジャンドル部分多様体であることが分かる．

(2) V を $\mathbb{C}^{2m}$ の m 次元等方的部分空間とする．V の任意の複素 2 次元部分空間は明らかに $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^{2m})$ の元である．$\mathrm{Gr}_2(V)$ を V の複素 2 次元部分空間全体のなす複素グラスマン多様体とする．このとき，埋め込み $\lambda : \mathrm{Gr}_2(V) \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^{2m})$ はルジャンドル部分多様体になる．

実グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ は四元数ケーラー構造をもつことが知られている (例 1.2). ここでは，ベクトル束の議論を用いた四元数ケーラー構造の構成法を述べる．最初に，Lie 環 $\mathfrak{so}(4)$ の分解 $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{sp}(1) + \mathfrak{sp}(1)$ を思い起こす．V をユークリッド内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ向き付けられた 4 次元実ベクトル空間とし，$\wedge^2 V$ を V の 2 重外積ベキ空間とする．$\wedge^2 V$ に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を次のように定める : $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$ に対して

$$\langle u_1 \wedge v_1, u_2 \wedge v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle \langle v_1, v_2 \rangle - \langle u_1, v_2 \rangle \langle v_1, u_2 \rangle.$$

内積と向きによりホッジ作用素 $*: \wedge^2 V \to \wedge^2 V$ が定義される．ホッジ作用素 $*$ は，$*^2 = \mathrm{id}_{\wedge^2 V}$ をみたすので，$\wedge^2 V$ は ± 1 固有空間 $\wedge^+ V, \wedge^- V$ に分解される：

$$\wedge^2 V = \wedge^+ V + \wedge^- V.$$

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ を V の正の向きの正規直交基底とする．$\wedge^+ V, \wedge^- V$ はそれぞれ，次の形の基底 (2.2), (2.3) をもつ：

$$\{e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2, e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3\} \tag{2.2}$$

$$\{e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 - e_4 \wedge e_2, -e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3\} \tag{2.3}$$

$\wedge^2 V$ は V の歪対称変換のなす Lie 環 $\mathfrak{so}(V) = \mathfrak{so}(4)$ と同一視される．同一視を与える同型写像 $\wedge^2 V \to \mathfrak{so}(V)$ は，$v \wedge w \in \wedge^2 V$ に対し，

$$(v \wedge w)(u) = \langle v, u \rangle w - \langle w, u \rangle v \qquad u \in V$$

で与えられる．この同型写像で $\wedge^+ V, \wedge^- V$ に対応する $\mathfrak{so}(V)$ の部分空間をそれぞれ $\mathfrak{so}^+(V)$, $\mathfrak{so}^-(V)$ で表す．ともに Lie 部分環となり，Lie 環の直和分解 $\mathfrak{so}(V) = \mathfrak{so}^+(V) + \mathfrak{so}^-(V)$ が得られる．$\wedge^+ V$ 及び $\mathfrak{so}^+(V)$ の元を自己双対的 (self-dual), $\wedge^- V$ 及び $\mathfrak{so}^-(V)$ の元を反自己双対的 (anti-self-dual) であるという．以降，$\mathfrak{so}^-(V)$ を中心に述べる．(2.3) の各元に対応する $\mathfrak{so}^-(V)$ の元をそれぞれ，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ で表す．このとき，$\varepsilon_i^2 = -\mathrm{id}_V$ $(i = 1, 2, 3)$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -\varepsilon_2 \varepsilon_1 = \varepsilon_3$ が成り立ち，$\mathfrak{so}^-(V)$ は V に四元数ベクトル空間の構造を定める．$\langle \varepsilon, \varepsilon \rangle = 2$ をみたす $\varepsilon \in \mathfrak{so}^-(V)$ は，V の直交的複素構造となる．また，ε から定まる V の向きは負である．$\mathfrak{so}^+(V)$ も同様に，V に四元数ベクトル空間の構造を定める．$\mathfrak{so}^+(V)$ の元から定まる V の向きは正である．

$\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の幾何学をベクトル束を用いて論ずる．前述の $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ の場合と同様である．$\underline{\mathbb{R}^n} = \widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ を $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ 上の自明束，$L \subset \underline{\mathbb{R}^n}$ を同語反復部分束とする．L の各ファイバーは向き付けられた 4 次元ベクトル空間で，$\mathbb{R}^n$ の標準内積から誘導された内積をもつ．$\mathfrak{so}^-(L)$ を L の各ファイバーにおける反自己双対的歪対称変換のなす 3 次元ベクトル束とする．$L^\perp$ を $\underline{\mathbb{R}^n}$ において L に直交する部分ベクトル束とする．これより，自明束の直交直和分解 $\underline{\mathbb{R}^n} = L + L^\perp$ が得られる．$L^\perp$ は商ベクトル束 $\underline{\mathbb{R}^n}/L$ に同型である．$\mathrm{Hom}(L, L^\perp)$ を $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の各点で L のファイバーから $L^\perp$ のファイバーへの線形写像全体からなる実ベクトル束とする．実グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の接ベクトル束 $T\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ は $\mathrm{Hom}(L, L^\perp)$ に実ベクトル束として同型になる．その同型対応は 前述の $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ の場合と同様に与えられる．ベクトル束の準同型 $\tilde{J}: \mathfrak{so}^-(L) \to \mathrm{End}(\mathrm{Hom}(L, L^\perp))$ を $\varepsilon \in \mathfrak{so}^-(L)$, $F \in \mathrm{Hom}(L, L^\perp)$ に対し，$\tilde{J}_\varepsilon F = F \circ \varepsilon$ で定める．$\tilde{J}$ の像となる $\mathrm{End}(\mathrm{Hom}(L, L^\perp))$ の 3 次元部分束を $\tilde{Q}$ で表す．$\mathbb{R}^n$ の標準内積 $\langle\ ,\ \rangle$ により $\mathrm{Hom}(L, L^\perp)$ のファイバー計量 $\tilde{g}$ を次のように定める：$F_1, F_2 \in \mathrm{Hom}(L, L^\perp)$ に対して，$\tilde{g}(F_1, F_2) = \sum_{i=1}^4 \langle F_1(e_i), F_2(e_i) \rangle$．ここで，$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ は L の正規直交基底である．接ベクトル束 $T\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ と $\mathrm{Hom}(L, L^\perp)$ との同一視のもと，$\mathrm{End}(T\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n))$ の 3 次元部分束 $\tilde{Q}$, $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ のリーマン計量 $\tilde{g}$ が定義される．このようにして定められた $(\tilde{Q}, \tilde{g})$ は定義 1.1 の条件をみたし，実グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ 上の四元数ケーラー構造となる．

ツイスターファイブレーションを与えよう．$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ から $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ への写像 π を以下のように定める：$W \in \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ に対して，補題 2.1 の証明のように，$\widetilde{W} = (W + \overline{W}) \cap \mathbb{R}^n$ とおく．$\widetilde{W}$ は $\mathbb{R}^n$ の 4 次元部分空間となる．$\widetilde{W}$ に定まる直交的複素構造を $\widetilde{I}$ とする．$\widetilde{W}$ に $\widetilde{I}$ から定まる向きと<u>逆の向き</u>を入れ向き付けられた 4 次元部分空間とする．このようにして $W \in \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ に対して，$\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の元 $\widetilde{W}$ を対応させる写像を π で表す．即ち，

$$\pi : \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n) \ni W \mapsto (\widetilde{W}, \widetilde{I}) \mapsto (\widetilde{W}, \text{向き}) \in \widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n) \tag{2.4}$$

定理 2.5 $\pi : \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n) \to \widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ は $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の四元数ケーラー構造に関するツイスターファイブレーションになる．

命題 1.3 と上記定理によって，$\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の全複素部分多様体の例を構成することができる．例 2.4 で示したルジャンドル部分多様体 λ とツイスターファイブレーション π を合成することによりはめ込まれた（半分次元）全複素部分多様体 $\pi \circ \lambda : Q^{r-2} \times Q^{s-2} \to \widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ $(r+s=n)$, $\pi \circ \lambda : \mathrm{Gr}_2(V) \to \widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^{2m})$ (V は $\mathbb{C}^{2m}$ の m 次元等方的部分空間) を得る．前者は 2 重被覆になっており，その像は $Q^{r-2} \times Q^{s-2}/\mathbb{Z}_2$, 後者は埋め込みであることが分かる．両者とも全測地的部分多様体である．竹内勝 ([12]) は対称四元数ケーラー多様体の（半分次元）全測地的全複素部分多様体の構成，分類を与えている．コンパクト型（あるいは非コンパクト型）対称四元数ケーラー多様体 $\tilde{M}$ とその（半分次元）完備全測地的全複素部分多様体 M の組 $(\tilde{M}, M)$ と佐竹図形のあるクラスとの 1 対 1 対応を与えるという美しい理論に基づいている．上記 2 種の全複素部分多様体は $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ における分類結果として現れるものである．ここでは，ツイスター空間を用いてそのはめ込みを具体的に与えた．

§3 複素リーマン幾何と Lie 球面幾何学の複素化

この節では複素球面の複素超曲面に関する Lie 球面幾何学, より一般に $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のルジャンドル部分多様体について述べる．M を複素多様体とする．M 上の正則 $(0,2)$ 型対称テンソル場 g が各点で非退化な複素内積を定める時，**正則リーマン計量**と呼ばれる．正則リーマン計量 g を備えた複素多様体 (M,g) を**複素リーマン多様体** という (cf. Lebrun [9])．複素座標系 $z_1, \cdots, z_m$ のもとでは次のように表示される：

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} dz_i \otimes dz_j,$$

ここで，g_{ij} は正則関数，即ち $\bar{\partial} g_{ij} = 0$，また 非退化性により $\det(g_{ij}) \neq 0$ をみたす．正則リーマン計量 g の実部を $g_{\mathbb{R}}$ とおく．このとき，$g_{\mathbb{R}}$ は符号数 (m,m) をもつ擬リーマン計量で，$g_{\mathbb{R}}(JX, JY) = -g_{\mathbb{R}}(X,Y)$ をみたす．ここで，J は M の複素構造を表す．このような計量は**アンチ-ケーラー計量**と呼ばれている．アンチ-ケーラー多様体に対し興味深い研究が行われている（cf. [4],[8]）．両者は本質的に同じ対象である．

複素リーマン多様体に対して，(実) リーマン幾何学とほぼ同じ議論が展開される．最初に適合する接続の存在が示される．複素多様体 M 上の捩れのないアフィン接続 ∇ で $\nabla J = 0$ をみたすものを複素接続という．複素接続 ∇ が**正則**であるとは任意の局所正則ベクトル場

Z, W に対して $\nabla_Z W$ が正則であるときをいう．この条件は，複素座標系に関する接続係数が正則関数となることと同値である．

命題 3.1 (cf [9]) (M, g) を複素リーマン多様体とする．このとき，正則アフィン接続 ∇ で $\nabla g = 0$ をみたすものが唯 1 つ存在する．

適合する接続が導入されれば，この接続に基づき様々な幾何学的諸量や概念 – 曲率テンソル，測地線など – が定義され，幾何学が展開される．複素リーマン多様体の複素部分多様体論も興味深いのではないかと思う．$(\tilde{M}, \tilde{g})$ を複素リーマン多様体とし，$f : M \to \tilde{M}$ を複素多様体 M から $\tilde{M}$ への正則はめ込みとする．M の各点 p で，$df(T_pM)$ が $\tilde{g}$ に関して非退化部分空間になっているとき，**非退化部分多様体** という．このとき，引き戻し $f^{-1}T\tilde{M}$ は M 上の正則ベクトル束となり，接ベクトル束 TM の像 $df(TM)$ はその正則部分ベクトル束である．$\tilde{g}$ に関する直交補空間をとり，法ベクトル束 $T^{\perp}M$ を定義することができる．$T^{\perp}M$ は $f^{-1}T\tilde{M}$ の正則部分ベクトル束である．このようにして，正則ベクトル束の直和分解を得る：

$$f^{-1}T\tilde{M} = df(TM) + T^{\perp}M.$$

上記のような設定で（実）リーマン部分多様体論と同様に，第 2 基本形式，型作用素などの概念が定義され，ガウス，ワインガルテンの公式，部分多様体の基本方程式である ガウス方程式，コダッチ方程式，リッチ方程式が導かれる．

複素リーマン多様体の典型例である複素球面について述べる．複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^{n-2}$ は，各点 $\boldsymbol{z}$ における接ベクトル空間 $T_{\boldsymbol{z}}\mathbb{C}^{n-2}$ と $\mathbb{C}^{n-2}$ との同一視のもと，標準的な複素内積 $\langle\ ,\ \rangle$ から定まる正則リーマン計量 $\sum_{i=1}^{n-2} dz_i \otimes dz_i$ をもつ．$\mathbb{C}^{n-2}$ の超曲面 $\mathbb{C}S^{n-3}$ を次で定め，**複素球面** と呼ぶ：

$$\mathbb{C}S^{n-3} = \left\{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^{n-2} \mid \ \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle = 1 \ \right\}.$$

このとき，$\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}S^{n-3}$ における接ベクトル空間 $T_{\boldsymbol{z}}\mathbb{C}S^{n-3}$ は次で与えられる:

$$T_{\boldsymbol{z}}\mathbb{C}S^{n-3} = \left\{ X \in T_{\boldsymbol{z}}\mathbb{C}^{n-2} = \mathbb{C}^{n-2} \mid \ \langle X, \boldsymbol{z} \rangle = 0 \ \right\}.$$

このようにして，直交直和分解

$$\mathbb{C}^{n-2} = T_{\boldsymbol{z}}\mathbb{C}S^{n-3} + \mathbb{C}\boldsymbol{z}$$

を得る．従って，$\mathbb{C}S^{n-3}$ は $\mathbb{C}^{n-2}$ の非退化部分多様体であり，誘導計量に関して複素リーマン多様体になる．また，原点からの位置ベクトル $\boldsymbol{z}$ は $\boldsymbol{z}$ での単位法ベクトルとみることができる．誘導計量に適合する正則アフィン接続の曲率テンソル R は次をみたす:

$$R(X, Y)Z = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y, \qquad X, Y, Z \in T_{\boldsymbol{z}}\mathbb{C}S^{n-3}$$

$\mathbb{C}S^{n-3}$ の単位接ベクトル束 $S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ は $\mathbb{C}^{n-2} \times \mathbb{C}^{n-2}$ の余次元 3 の複素部分多様体として次のように表される：

$$S(T\mathbb{C}S^{n-3}) = \left\{ (\boldsymbol{z}, \xi) \in \mathbb{C}^{n-2} \times \mathbb{C}^{n-2} \mid \ \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle = 1, \langle \xi, \xi \rangle = 1, \langle \boldsymbol{z}, \xi \rangle = 0 \ \right\}.$$

π_1 を $\mathbb{C}^{n-2} \times \mathbb{C}^{n-2}$ の第 1 成分への射影を $S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ に制限した写像とする．π_1 は $S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ から $\mathbb{C}S^{n-3}$ への単位接ベクトル束としての射影に外ならない．$S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ の余次元 1 の接分布 $\mathcal{D}$ を

$$\mathcal{D}_{(\boldsymbol{z}_0,\xi_0)} = \left\{ X \in T_{(\boldsymbol{z}_0,\xi_0)} S(T\mathbb{C}S^{n-3}) \mid \langle d\pi_1(X), \xi_0 \rangle = 0 \right\}$$

で定めると，$\mathcal{D}$ は $S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ の正則接触構造になる．

$(\boldsymbol{z}, \xi) \in S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ に対して，${}^t({}^t\boldsymbol{z}, \sqrt{-1}, 0)$, ${}^t({}^t\xi, 0, \sqrt{-1})$ で張られる $\mathbb{C}^n$ の 2 次元部分空間 $\left\{ {}^t({}^t\boldsymbol{z}, \sqrt{-1}, 0), {}^t({}^t\xi, 0, \sqrt{-1}) \right\}_{\mathbb{C}}$ は等方的部分空間である．このようにして定まる $S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ から $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ への写像を ψ で表す．即ち，

$$\psi : S(T\mathbb{C}S^{n-3}) \ni (\boldsymbol{z}, \xi) \mapsto \left\{ {}^t({}^t\boldsymbol{z}, \sqrt{-1}, 0), {}^t({}^t\xi, 0, \sqrt{-1}) \right\}_{\mathbb{C}} \in \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n). \tag{3.1}$$

命題 3.2 ψ は $S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ から $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の開部分多様体への正則同型写像である．さらに正則接触構造を保つ．

複素球面の複素部分多様体から 単位接ベクトル束 $S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ のルジャンドル部分多様体を構成する．(実) リーマン多様体の単位接ベクトル束での接触構造に対するルジャンドル部分多様体の構成の類似である．$\varphi : M \to \mathbb{C}S^{n-3}$ を複素多様体 M から $\mathbb{C}S^{n-3}$ への非退化正則はめ込み（nondegenerate holomorphic immersion）とする．$S(T^{\perp}M)$ を次で定める：

$$S(T^{\perp}M) = \left\{ (p, (\boldsymbol{z}, \xi)) \in M \times S(T\mathbb{C}S^{n-3}) \mid \varphi(p) = \boldsymbol{z},\ \langle d\varphi(T_pM), \xi \rangle = 0 \right\}.$$

このとき，$S(T^{\perp}M)$ は，$M \times S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ に埋め込まれた $n-4$ 次元複素部分多様体である．$M \times S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ の第 1 成分への射影により，M の各点における単位法ベクトル球面をファイバーとするファイブレーション $S(T^{\perp}M) \to M$ が定まる．第 2 成分への射影により正則写像 $\hat{\varphi} : S(T^{\perp}M) \to S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ を得る．$\hat{\varphi}$ は正則はめ込みで $S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ のルジャンドル部分多様体になる．M を $n-4$ 次元複素多様体，$\varphi : M \to \mathbb{C}S^{n-3}$ を非退化超曲面はめ込みとする．射影 $S(T^{\perp}M) \to M$ は 2 重被覆になっている．連続な単位法ベクトル場 ξ がとれると仮定する．このとき，$\hat{\varphi}$ は M から $S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ へのルジャンドルはめ込みとなる．$S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ から $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の中への正則同型写像 ψ との合成写像を考えることにより，ルジャンドルはめ込み $\psi \circ \hat{\varphi} : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ を得る．ルジャンドル部分多様体の接触幾何学の視点から複素球面 $\mathbb{C}S^{n-3}$ の複素超曲面について論ずることが，Lie 球面幾何学の複素化に相当する幾何学である．特に，接触変換群として作用する $SO(n, \mathbb{C})$ のもとで不変な幾何学として議論する．Lie 球面幾何学の複素化の議論は後で述べることにし，ここではグラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の全複素部分多様体の構成への応用について見ることにする．

以上で述べた $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ へのルジャンドルはめ込みの構成法と，命題 1.3, 定理 2.5 より，次のような結果を得る．$\pi : \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n) \to \widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ を (2.4) で定義されたツイスターファイブレーションとする．

定理 3.3 $\varphi : M \to \mathbb{C}S^{n-3}$ を複素多様体 M から複素球面 $\mathbb{C}S^{n-3}$ への非退化正則はめ込みとする．このとき，$\tilde{\varphi} = \pi \circ \psi \circ \hat{\varphi} : S(T^{\perp}M) \to \widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ は（半分次元）全複素はめ込みで

ある．$\varphi : M \to \mathbb{C}S^{n-3}$ を非退化超曲面はめ込みとし，連続な単位法ベクトル場 ξ がとれると仮定する．このとき，$\tilde{\varphi} = \pi \circ \psi \circ \hat{\varphi} : M \to \widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ は（半分次元）全複素はめ込みである．

この結果を踏まえ，今後の課題として次のようなものが考えられる．
(1) $\mathbb{C}S^{n-3}$ の興味深い複素超曲面の例の構成，従って $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の全複素部分多様体の例の構成
(2) $\mathbb{C}S^{n-3}$ の複素超曲面の幾何と $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の全複素部分多様体の幾何との関係
(3) より一般に $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のルジャンドル部分多様体の幾何学理論の構築

ここでは，初等的な例についてルジャンドル部分多様体の幾何学を試みる．最初に，$\mathbb{C}S^{n-3}$ の超球面の構成について述べる． $p = {}^t(p_1, \cdots, p_{n-2}) \in \mathbb{C}^{n-2}$, $(p \neq 0)$, $c \in \mathbb{C}$ に対して，$\mathbb{C}S^{n-3}$ の超曲面を次で定める：

$$M = \left\{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}S^{n-3} \mid \ \langle p, \boldsymbol{z} \rangle = c \ \right\}$$

このとき，M が非退化超曲面になるための必要十分条件は $\langle p, p \rangle \neq c^2$．非退化超曲面になるとき, M 上に連続な単位法ベクトル場 ζ を定めることができ，ζ に関する型作用素 A_ζ は $A_\zeta = a\ \mathrm{id}$ (a はある複素定数) をみたす．このような型作用素をもつ非退化超曲面を**超球面**と呼ぶ．超球面の誘導計量に関する曲率テンソルは

$$R(X, Y)Z = (1 + a^2)\{\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y\}$$

で与えられる．

上の事実を受け，単位法ベクトル場の選び方を含め次のような超球面を考える：
Case 1. $\langle p, p \rangle = 1$, $\rho \in \mathbb{C}$, $\rho \neq m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ に対し，

$$S(p, \rho) = \left\{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}S^{n-3} \mid \ \langle p, \boldsymbol{z} \rangle = \cos\rho \ \right\}$$

単位法ベクトル場 $\zeta = \frac{1}{\sin\rho}(p - \cos\rho\ \boldsymbol{z})$. このとき，主曲率は $\cot\rho = \frac{\cos\rho}{\sin\rho}$.
Case 2. $\langle p, p \rangle = 0$ $(p \neq 0)$ に対し，

(i) $S(p, +) = \left\{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}S^{n-3} \mid \ \langle p, \boldsymbol{z} \rangle = 1 \ \right\}$， 単位法ベクトル場 $\zeta = \sqrt{-1}(p - \boldsymbol{z})$

(ii) $S(p, -) = \left\{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}S^{n-3} \mid \ \langle p, \boldsymbol{z} \rangle = 1 \ \right\}$， 単位法ベクトル場 $\zeta = -\sqrt{-1}(p - \boldsymbol{z})$

このとき，主曲率はそれぞれ (i) $\sqrt{-1}$, (ii) $-\sqrt{-1}$.
Case 2 の誘導計量は平坦であり，ホロ球面に相当する．超球面はこれらで尽くされる．その証明はリーマン幾何学における定曲率球面の全臍的超曲面の決定の場合と同じである．超球面は Lie 球面幾何学を展開する上での基本図形になっている．

$\mathbb{C}S^{n-3}$ の超球面全体の集合は複素 2 次超曲面 $Q^{n-2} = \{[z] \in \mathbb{C}P^{n-1} \mid z \in \mathbb{C}^n - \{0\},\ \langle z, z \rangle = 0\}$ によってパラメータ付けることができる．Case 1 の超球面に対しては $k(p, \rho) = {}^t({}^tp, \sqrt{-1}\cos\rho, \sqrt{-1}\sin\rho)$, Case 2 (i),(ii) の超球面に対しては $k(p, +) = {}^t({}^tp, \sqrt{-1}, 1)$, $k(p, -) = {}^t({}^tp, \sqrt{-1}, -1)$ とおき，これらを代表元とする Q^{n-2} の点 $[k(p, \rho)]$, $[k(p, +)]$,$[k(p, -)]$ を定める．このとき，Case 1 において，$S(p, \rho)$ より構成される $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$

のルジャンドル部分多様体の任意の点 $\psi(z,\zeta)=\left\{{}^t({}^t\boldsymbol{z},\sqrt{-1},0),{}^t({}^t\zeta,0,\sqrt{-1})\right\}_{\mathbb{C}}$ は，定ベクトル $k(p,\rho)$ を含む．Case 2 においても同様のことが成立する．$[{}^t({}^tp,w_{n-1},w_n)]$ を $w_n\neq 0$ をみたす Q^{n-2} の点とする．$w_{n-1}^2+w_n^2\neq 0$ のとき，$w_{n-1}=\sqrt{-1}\cos\rho, w_n=\sqrt{-1}\sin\rho$ をみたすように代表元を選ぶことができる．この点は，Case 1 の超球面 $S(p,\rho)$ に対応している．$w_{n-1}^2+w_n^2=0$ のとき，$w_{n-1}=\sqrt{-1},w_n=1$ または $w_{n-1}=\sqrt{-1},w_n=-1$ をみたすように代表元を選ぶことができる．前者は，Case 2 の超球面 $S(p,+)$, 後者は，$S(p,-)$ に対応している．$w_n=0$ のとき，$\left\{\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}S^{n-3}\mid\ \langle p,\boldsymbol{z}\rangle=-\sqrt{-1}w_{n-1}\right\}$ は，特異点が現れたり，誘導計量が退化する．このような Q^{n-2} の点は，超球面全体の集合をパラメータ付ける空間の点としては Q^{n-2} から除外する．

$\mathbb{C}S^{n-3}$ の超球面より構成される $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のルジャンドル部分多様体について考える．複素 2 次超曲面 Q^{n-2} の元からルジャンドル部分多様体を構成する．$\kappa\in Q^{n-2}$ に対し，$\kappa^\perp$ を複素内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に関して，κ に直交する空間とする．このとき，$\kappa^\perp\supset\kappa$ である．$\kappa^\perp/\kappa$ を商ベクトル空間，$\pi_\kappa:\kappa^\perp\to\kappa^\perp/\kappa$ を射影とする．π_κ により $\kappa^\perp/\kappa$ に複素内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が誘導される．$\langle\ ,\ \rangle$ は非退化である．$P(\kappa^\perp/\kappa)$ を $\kappa^\perp/\kappa$ の射影空間とし，$Q(\kappa)$ を $P(\kappa^\perp/\kappa)$ の複素 2 次超曲面とする．即ち，

$$Q(\kappa)=\{[\zeta]\in P(\kappa^\perp/\kappa)\mid\zeta\in\kappa^\perp/\kappa,\ \langle\zeta,\zeta\rangle=0\}.$$

$Q(\kappa)$ の次元は $n-4$ である．$[\zeta]\in Q(\kappa)$ に対し，$\pi_\kappa^{-1}([\zeta])$ は κ を部分空間として含む 2 次元等方的部分空間である．従って，$[\zeta]\mapsto\pi_\kappa^{-1}([\zeta])$ によって，正則写像 $\varphi:Q(\kappa)\to\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ が定義される．φ はルジャンドル埋め込みである．実際，任意の $[\zeta]\in Q(\kappa)$ に対して，$\kappa\subset\varphi([\zeta])\subset\kappa^\perp$ であり，$\pi_\kappa(\varphi([\zeta]))=[\zeta]$ が成り立つので，φ は埋め込みである．また，局所枠場 $\varphi=[Z_1,Z_2]$ を $Z_1=v$,$Z_2=\zeta$ で定める．ここで，v は 0 でない κ の定ベクトル，ζ は $\kappa^\perp$ に値をもつ正則関数である．$dZ_1=0$ であるから，補題 2.3 (3) をみたす．これより，φ はルジャンドル埋め込みであることが示された．以降，φ による像 となる $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のルジャンドル部分多様体 $\varphi(Q(\kappa))$ も同じ記号 $Q(\kappa)$ で表す．実直交群 $SO(n)$ は複素 2 次超曲面 Q^{n-2} に推移的に作用する．即ち，任意の $\kappa,\kappa'\in Q^{n-2}$ に対して，$P\kappa=\kappa'$ をみたす $P\in SO(n)$ が存在する．これより，$SO(n)$ の $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ への作用のもと $P(Q(\kappa))=Q(\kappa')$ が成り立つ．$\pi:\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)\to\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ をツイスターファイブレーションとする．全複素部分多様体 $\pi(Q(\kappa))$ は $\pi(Q(\kappa'))$ に $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の等長変換で移される．特に，例 2.4 (1) $r=n-2,s=2$ より構成される全測地的全複素部分多様体に等長である．

$Q(\kappa)$ は次のように特徴付けられる．

命題 3.4 $\lambda:M\to\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ を $n-4$ 次元複素多様体 M からの正則はめ込みとする．固定された $\kappa\in Q^{n-2}$ が存在し，任意の $p\in M$ に対して $\kappa\subset\lambda(p)$ をみたしているとする．このとき，λ の像は $Q(\kappa)$ の開部分多様体になる．

証明 任意の $p\in M$ に対して，$\kappa\subset\lambda(p)\subset\kappa^\perp$ が成り立つ．$\pi_\kappa(\lambda(p))\in Q(\kappa)$, $\varphi(\pi_\kappa(\lambda(p)))=\lambda(p)$ であるから，$\lambda(M)\subset Q(\kappa)$. □

命題 3.4 を適用することにより，次が導かれる．

系 3.5 複素球面 $\mathbb{C}S^{n-3}$ の超球面 $S(p,\rho)$, $S(p,+)$,$S(p,-)$ より定理 3.3 を適用して構成される $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のルジャンドル部分多様体は, それぞれ 2 次超曲面 $Q([k(p,\rho)])$, $Q([k(p,+)])$, $Q([k(p,-)])$ の開部分多様体になる．

命題 3.4 を少し一般化して次を得る．

系 3.6 $\lambda : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ を $n-4$ (≥ 2) 次元複素多様体 M からのルジャンドルはめ込みとする．E を同語反復部分束を引き戻すことにより定まる自明束 $\underline{\mathbb{C}^n} = M \times \mathbb{C}^n$ の正則部分ベクトル束とする．E の正則直線部分束 K で次の条件をみたすものが存在すると仮定する：M の任意の点 p, 任意の接ベクトル $X \in T_pM$ に対し，$d\lambda(X)k = 0$, $k \in K_p$ が成立する．ここで，$d\lambda(X)$ を $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, \underline{\mathbb{C}^n}/E)$ の元として捉えている．このとき，正則直線部分束 K の定める複素 2 次超曲面 Q^{n-2} への写像は定値である．その像となる Q^{n-2} の点を κ とすると, λ の像は $Q(\kappa)$ の開部分多様体になる．

証明 λ の局所枠場 $\lambda = [Z_1, Z_2]$ を Z_1 が K の局所切断となるように選ぶ．$d\lambda(X)Z_1 = 0$ より，$dZ_1(X) \in \{Z_1(p), Z_2(p)\}_{\mathbb{C}}$．補題 2.3 (2) により，$T_pM \ni X \mapsto \pi_E dZ_2(X) \in \underline{\mathbb{C}^n}/E$ は単射である．ここで，π_E は $\underline{\mathbb{C}^n}$ から $\underline{\mathbb{C}^n}/E$ への射影である．(局所) 1 次微分形式 a, b を，$dZ_1(X) = a(X)Z_1 + b(X)Z_2$ で定める．$(d^2Z_1)(X,Y) = 0$ より，

$$da(X,Y)Z_1 + (db(X,Y) + a(Y)b(X) - a(X)b(Y))Z_2 + b(Y)dZ_2(X) - b(X)dZ_2(Y) = 0.$$

両辺に π_E を施すことにより，

$$b(Y)\pi_E dZ_2(X) - b(X)\pi_E dZ_2(Y) = 0$$

線形独立である接ベクトル X, Y に対し，$\pi_E dZ_2(X), \pi_E dZ_2(Y)$ は線形独立であるから，$b(X) = 0, b(Y) = 0$ を得る．以上から，$dZ_1(X) \in \{Z_1(p)\}_{\mathbb{C}}$ が成り立つことが示された．このことは，Z_1 の定める Q^{n-2} への写像 $[Z_1]$ について，$d[Z_1](X) = 0$ が成り立つことを意味する．従って，正則直線部分束 K の定める Q^{n-2} への写像は定値であることが分かる．系 3.6 の残りの主張は命題 3.4 より導かれる． □

(実)Lie 球面幾何学の理論に倣い，ルジャンドル部分多様体に対して曲率球を導入する（cf. [5],[10]）．

定義 3.7 $\lambda : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ を $n-4$ 次元複素多様体 M からのルジャンドルはめ込みとし，p を M の点とする．0 でない $k \in \lambda(p)$ に対し，0 でない接ベクトル $X \in T_pM$ で $d\lambda(X)k = 0$ をみたすものが存在するとき，$[k] \in Q^{n-2}$ を点 p での λ の**曲率球 (curvature sphere)** といい，X を $[k]$ に対応する**曲率方向 (a direction of curvature)** という．曲率方向となる接ベクトルのなす部分空間の次元を曲率球 $[k]$ の重複度という．

$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の点 $\lambda(p)$ で接触構造を与える接分布 $\mathcal{D}_{\lambda(p)}$ について，$\mathcal{D}_{\lambda(p)} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\lambda(p), \lambda(p)^{\perp}/\lambda(p))$ であったことを思い起こそう．$\dim_{\mathbb{C}} \lambda(p)^{\perp}/\lambda(p) = \dim_{\mathbb{C}} T_pM = n-4$ であることも注意する．$\{v_1, v_2\}$ を $\lambda(p)$ の基底とする．このとき，複素数 s に対して次のような T_pM から $\lambda(p)^{\perp}/\lambda(p)$ への複素線形写像 ϕ_s を考える：

$$T_pM \ni X \mapsto d\lambda(X)(sv_1 + v_2) = sd\lambda(X)v_1 + d\lambda(X)v_2 \in \lambda(p)^{\perp}/\lambda(p).$$

このとき，ϕ_s は高々 $n-4$ $(= \dim_{\mathbb{C}} T_pM)$ 個の s を除いて線形同型になるかすべての s について単射にならないかのいずれかである．このことより，点 p での曲率球について次のいずれかが成り立つ：

Case 1. 高々 $n-4$ 個の異なる曲率球が存在する．

Case 2. すべての $k \in \lambda(p)$ について $[k] \in Q^{n-2}$ は曲率球である．
Case 2 は (実)Lie 球面幾何学では起こらない現象である． Case 1,Case 2 それぞれの例をあげよう．
Case 1 の例： $\varphi : M \to \mathbb{C}S^{n-3}$ を非退化超曲面はめ込み, ξ を φ に沿う単位法ベクトル場とする．$Z_1 = {}^t({}^t\varphi, \sqrt{-1}, 0)$, $Z_2 = {}^t({}^t\xi, 0, \sqrt{-1})$, $\lambda = [Z_1, Z_2]$ とおき，φ に対応するルジャンドルはめ込み λ を定める．

$$d\lambda(X)Z_1 = \pi_E(dZ_1(X)) = \pi_E{}^t({}^td\varphi(X), 0, 0), \quad d\lambda(X)Z_2 = \pi_E(dZ_2(X)) = \pi_E{}^t({}^td\xi(X), 0, 0).$$

従って，$d\lambda(X)(sZ_1 + Z_2) = 0$ となるための必要十分条件は $s\, d\varphi(X) + d\xi(X) = 0$. これは，$s$ が型作用素 A_ξ の固有値，即ち主曲率，X が主曲率ベクトルであることを意味している．Lie 球面幾何学における主曲率の対応物が曲率球である．この場合は，相異なる曲率球の個数と主曲率の個数は一致する．$X \mapsto d\lambda(X)Z_1$ によって接ベクトル束 TM から商ベクトル束 $E^\perp/E$ への束同型写像が得られる．$E^\perp/E$ の各ファイバーには，$\mathbb{C}^n$ の内積から誘導された非退化複素内積が定まる．上の束同型写像は M に誘導された正則リーマン計量，$E^\perp/E$ のファイバー計量に関して等長的である．
Case 2 の例：例 2.4 (2) のルジャンドル埋め込み $\lambda : \mathrm{Gr}_2(V) \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^{2m})$ を考えよう．簡単のため，$M = \mathrm{Gr}_2(V)$ とおく．$\underline{V} = M \times V$ は自明束 $\underline{\mathbb{C}^{2m}}$ の自明な部分束で，自明接続 d に関して平行である．同語反復部分束を引き戻すことにより定まる正則ベクトル束 E は，$\underline{V}$ の部分束になっている．従って，任意の $k \in \lambda(p)$, $X \in T_pM$ に対し，$d\lambda(X)k \in V/\lambda(p)$. $\dim_{\mathbb{C}} V/\lambda(p) = m - 2 = 1/2 \dim_{\mathbb{C}} T_pM$ であるから，線形写像 $X \mapsto d\lambda(X)k$ の核空間の次元は $1/2 \dim_{\mathbb{C}} T_pM$ 以上である．

曲率球の概念は Lie 接触変換群の作用で不変である．即ち，次が成立する（cf. [5],[10]）．
命題 3.8 $\lambda : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ をルジャンドルはめ込みとし，P を $SO(n, \mathbb{C})$ の元とする．$[k] \in Q^{n-2}$ を点 p での λ の曲率球とする．このとき，$P[k]$ はルジャンドルはめ込み $P\lambda$ の点 p での曲率球である．また，$[k], P[k]$ に対応する曲率方向は一致する．

Case 1 のときはそのルジャンドル部分多様体の局所的な描像について，複素球面の超曲面に関する複素リーマン幾何学を援用して調べることができる．以下それを説明する．(実) Lie 球面幾何学の理論で行われている方法と同じである．ルジャンドルはめ込み $\lambda : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ に対し，点 $p \in M$ で Case 1 とする．このとき，その開近傍の点でも Case 1 になる．$\lambda = [Z_1, Z_2]$ とおく．Z_1, Z_2 は E の局所枠場である．Z_1, Z_2 の $n-1$ 行，n 行より定まる 2 次小行列式が 0 でないとする（他の 2 つの行の選び方でも議論は同じ）．このとき，局所枠場として $Z_1 = {}^t({}^t\varphi, \sqrt{-1}, 0)$, $Z_2 = {}^t({}^t\xi, 0, \sqrt{-1})$ を採ることができる．ここで，φ, ξ は p の近傍で定義された $\mathbb{C}^{n-2}$ への正則写像である． $\lambda = [Z_1, Z_2]$ は $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ へのルジャンドルはめ込みであるから，$\langle\varphi, \varphi\rangle = 1$, $\langle\xi, \xi\rangle = 1$, $\langle\varphi, \xi\rangle = 0$, $\langle d\varphi, \xi\rangle = 0$ が成立する．Case 1 のもとで，$[\cos\theta Z_1 + \sin\theta Z_2]$ が p の近傍で λ の曲率球にならないように実数 θ を選ぶことができる．実直交群 $SO(n)$ の元 P_θ を次で定める：

$$P_\theta = \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad I_{n-2} \text{ は } n-2 \text{ 次単位行列.}$$

ルジャンドルはめ込み $P_\theta^{-1}\lambda$ の局所枠場を $\tilde{Z}_1 = P_\theta^{-1}(\cos\theta Z_1 + \sin\theta Z_2)$, $\tilde{Z}_2 = P_\theta^{-1}(-\sin\theta Z_1 + \cos\theta Z_2)$ で定めると，$\tilde{Z}_1 = {}^t({}^t\tilde{\varphi}, \sqrt{-1}, 0)$, $\tilde{Z}_2 = {}^t({}^t\tilde{\xi}, 0, \sqrt{-1})$ となる．命題 3.8 より，$[\tilde{Z}_1]$ は $p \in M$ の近傍で $P_\theta^{-1}\lambda$ の曲率球ではない．これより，$d\tilde{\varphi}$ は単射であることが導かれる．従って，$\tilde{\varphi}$ は複素球面 $\mathbb{C}S^{n-3}$ への非退化超曲面はめ込みで, $\tilde{\xi}$ は $\tilde{\varphi}$ に沿う単位法ベクトル場であることが分かる．以上の議論により，$SO(n)$ の作用で不変な λ に関する性質を $\mathbb{C}S^{n-3}$ への非退化超曲面はめ込み $\tilde{\varphi}$ を用いて調べることができる．

曲率球の性質に着目したルジャンドル部分多様体の特徴付けは Lie 球面幾何学の興味深い問題と思う．系 3.6 は重複度 $n-4$ $(= \dim M)$ の唯 1 つの曲率球をもつルジャンドル部分多様体を決定した結果とみることができる．それでは，相異なる曲率球を 2 つもつ場合はどうなるだろうか? （実）Lie 球面幾何学では（追加の条件も課され）**デュパンサイクライド (a cyclide of Dupin)** と呼ばれている対象である（cf. [5],[10]）．これは（実）Lie 球面幾何学の枠組みで Pinkall によって分類されている ([10], Theorem 3)．複素版として $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ におけるモデルを示す．例 2.4 (1) を少し一般化したものである．

例 3.9 V を $\mathbb{C}^n$ の非退化部分空間，$V^\perp$ を V の直交補空間とする．$V, V^\perp$ それぞれの次元を $r+2, s+2$ $(r, s \geq 1)$ とする．従って特に $r+s = n-4$ である．$P(V), P(V^\perp)$ を $V, V^\perp$ の射影空間とする．複素 2 次超曲面 Q^r, Q^s を次で定める．

$$\begin{aligned} Q^r &= P(V) \cap Q^{n-2} = \{[z] \in P(V) \mid \langle z, z\rangle = 0\} \\ Q^s &= P(V^\perp) \cap Q^{n-2} = \{[w] \in P(V^\perp) \mid \langle w, w\rangle = 0\}. \end{aligned}$$

正則写像 $\lambda : Q^r \times Q^s \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ を次で定める：

$$\lambda([z], [w]) = \{z, w\}_{\mathbb{C}}\,.$$

λ はルジャンドル埋め込みである．λ の曲率球を求めよう．K_1, K_2 をそれぞれ $P(V), P(V^\perp)$ の同語反復直線束を Q^r, Q^s に引き戻すことにより定まる直線束とする．これらを直積多様体 $Q^r \times Q^s$ に引き戻して定まる直線束を同じ記号で表す．このとき，λ による同語反復部分束の引き戻し E について $E = K_1 + K_2$ が成立する．Q^r, Q^s 上の K_1,K_2 の局所切断を k_1, k_2 とし，それを $Q^r \times Q^s$ に引き戻したものも同じ記号で表す．k_1, k_2 は λ の局所枠場となる．$Q^r \times Q^s$ の接ベクトル空間は次のように分解される：

$$T_{([k_1],[k_2])}Q^r \times Q^s = T_{[k_1]}Q^r + T_{[k_2]}Q^s.$$

$X \in T_{[k_1]}Q^r$ に対して，$X \mapsto d\lambda(X)k_1 = \pi_E dk_1(X) \in \pi_E(V)$ は単射であり，像 $d\lambda(T_{[k_1]}Q^r)k_1$ は $E^\perp/E$ の内積に関して非退化部分空間である．また，$d\lambda(X)k_2 = \pi_E dk_2(X) = 0$. 同様に $Y \in T_{[k_2]}Q^s$ に対して，$Y \mapsto d\lambda(Y)k_2 = \pi_E dk_2(Y) \in \pi_E(V^\perp)$ は単射であり，像 $d\lambda(T_{[k_2]}Q^s)k_2$ は 非退化部分空間である．また，$d\lambda(Y)k_1 = \pi_E dk_1(Y) = 0$. 像 $d\lambda(T_{[k_1]}Q^r)\,k_1$ と $d\lambda(T_{[k_2]}Q^s)\,k_2$ とは直交している．実際，$X \in T_{[k_1]}Q^r$, $Y \in T_{[k_2]}Q^s$ に対し,

$$\langle dk_1(X), dk_2(Y)\rangle = \langle dk_1(Y), dk_2(X)\rangle = 0.$$

以上から，$[k_1]$ は重複度 s, $[k_2]$ は重複度 r の曲率球であり, 曲率球はこの 2 つだけであることが分かる．

内積が退化する部分空間 V においても同様の議論が行うことができ $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ への正則写像が定義されるが，はめ込みにならない部分集合が存在し，また曲率球の描像も V が非退化のときとは異なっている．

（実）Lie 球面幾何学に倣い，デュパンサイクライドを定義する．$\lambda : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ を $n-4$ 次元複素多様体 M からのルジャンドルはめ込みとする．λ が次の条件 (i),(ii),(iii) をみたすとき，特性数 (r,s) のデュパンサイクライドという：

(i) M の各点で ちょうど 2 つの曲率球 $[k_1],[k_2]$ をもち，それぞれの重複度は $r,s,(r+s=n-4)$．さらに，各 $[k_i]$ $(i=1,2)$ は M から 2 次超曲面 Q^{n-2} への正則写像を定めているとする．

(ii) T_i $(i=1,2)$ を各曲率球 $[k_i]$ の曲率方向ベクトルからなる接分布とする．(i) の仮定のもと，T_i は完全積分可能である．

(iii) 各 i $(i=1,2)$ について，T_i の積分多様体上 曲率球 $[k_i]$ は一定である．

例 3.9 は特性数 (s,r) のデュパンサイクライドである．（実）Lie 球面幾何学の場合と同様に $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のデュパンサイクライドの分類を得る．証明もほぼ同じである．

定理 3.10 (1) 特性数 (s,r) の連結デュパンサイクライド $\lambda : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の像は例 3.9 で示されたデュパンサイクライドに含まれる．

(2) 同じ特性数をもつ 2 つのデュパンサイクライドは，局所的に Lie 接触変換で移り合う．

ここまでは初等的な例に基づく議論であった．より多くの例について調べ，先に述べた課題について解き明かしていきたいと考えている．

参考文献

[1] D.V.Alekseevsky and S.Marchiafava : *Hermitian and Kähler submanifolds of a quaternionic Kähler manifold*, Osaka J. Math. 38(2001), 869-904

[2] D.V.Alekseevsky and S.Marchiafava : *A twistor construction of Kähler submanifolds of a quaternionic Kähler manifold*, Annali di Mat. 184(2005), 53-74

[3] A.L.Besse : *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, 1987, Berlin

[4] A.Borowiec, M.Francaviglia, and I.Volovich : *Anti-Kählerian manifolds*, Differ. Geom. Appl. 12(2000), 281-289

[5] T.E.Cecil : *Lie sphere geometry*, 2nd edn, Springer, New York, 2008

[6] S.Funabashi : *Totally complex submanifolds of a quaternionic Kaehlerian manifold*, Kodai Math.J. 2(1979), 314-336

[7] R.Herrera and S.Salamon : *Moduli and twistor spaces*, Rend.di.Mat. 17(1997), 697-712

[8] N.Koike : *The complexifications of pseudo-Riemannian manifolds and anti-Kaehler geometry*, SUT J. of Math. 50(2014), 271-295

[9] C.Lebrun : *Spaces of complex null geodesics in complex-Riemannian geometry*, Trans. of A.M.S. 278(1983), 209-231

[10] U.Pinkall : *Dupin hypersurfaces*, Math.Ann. 270(1985), 427-440

[11] S.Salamon : *Quaternionic Kähler manifolds*, Invent. Math. 67(1982), 143-171

[12] M.Takeuchi : *Totally complex submanifolds of quaternionic symmetric spaces*, Japan J. Math. 12(1986), 161-189

[13] J.A.Wolf : *Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces*, J. of Math. and Mech. 14(1965), 1033-1047