L^2 評価と L^2 拡張の問題

名古屋大学 大沢健夫
Takeo Ohsawa, Nagoya University

概要

複素多様体上の正則ベクトル束とその正則切断および $\bar{\partial}$ コホモロジー類は多変数複素解析の問題から生じたが、代数幾何、微分幾何、および数理物理と密接に関係する基本的な数学的対象である。以下ではそれらの存在に関わる L^2 評価式と L^2 拡張問題を中心に、関連する諸問題を列挙してみよう。

0 記号、定義など

- M: (連結かつ可分な) n 次元複素多様体
- (M, g): Hermite 計量 g つきの複素多様体
- $E \to M$: 正則ベクトル束
- (E, h):ファイバー計量 h つきの正則ベクトル束
- $C^{p,q}(\Omega, E)$: M の開集合 Ω 上の E-値 C^∞ 級 (p, q) 形式の空間
- $\bar{\partial} : C^{p,q}(\Omega, E) \to C^{p,q+1}(\Omega, E)$: $(0, 1)$ 型複素外微分作用素
- $H^{p,q}(\Omega, E) = \dfrac{\mathrm{Ker}(\bar{\partial} : C^{p,q}(\Omega, E) \to C^{p,q+1}(\Omega, E))}{\mathrm{Im}(\bar{\partial} : C^{p,q-1}(\Omega, E) \to C^{p,q}(\Omega, E))}$
- $L^{p,q}_{(2)}(\Omega, E, g, h)$
  $= \Omega$ 上の E 値可測 (p, q) 形式で (g, h) に関して二乗可積分なものの空間
- $H^{p,q}_{(2)}(\Omega, E, g, h) = \dfrac{\mathrm{Ker}(\bar{\partial} : L^{p,q}_{(2)}(\Omega, E, g, h) \to L^{p,q+1}_{(2)}(\Omega, E, g, h))}{\mathrm{Im}(\bar{\partial} : L^{p,q-1}_{(2)}(\Omega, E, g, h) \to L^{p,q}_{(2)}(\Omega, E, g, h))}$
  $= \Omega$ の (g, h) に関する E 値 (p, q) 型 $L^2\bar{\partial}$ コホモロジー群
- 閉作用素 $\bar{\partial} : L^{p,q}_{(2)}(\Omega, E, g, h) \to L^{p,q+1}_{(2)}(\Omega, E, g, h)$ の共役 (adjoint) を $\bar{\partial}^*$ で表す。
- $\mathcal{H}^{p,q}(\Omega, E, g, h) = \mathrm{Ker}\,\bar{\partial} \cap \mathrm{Ker}\,\bar{\partial}^* \cap L^{p,q}_{(2)}(\Omega, E, g, h)$
  $= E$ 値調和形式の空間
- $\mathcal{K}_M = M$ の標準束

- $K^{p,q}_{\Omega,E} = \mathcal{H}^{p,q}_{(2)}(\Omega,E,g,h)$ の Bergman 核
- $K_{\Omega,E} = K^{n,0}_{\Omega,(E,h)}$
- $K_{\Omega,\varphi} = K^{n,0}_{\Omega,(\mathbb{C}\times\Omega,e^{-\varphi})}$, $K_\Omega = K_{\Omega,0}$
  ($E = \mathbb{C}\times M$ (自明束) のとき E は省略する。)
- L^2 不等式 (基本形)： $(Au,u) \leq \|\bar\partial u\|^2 + \|\bar\partial^* u\|^2$
  - $\cdot$ $u \in \mathrm{Dom}\,\bar\partial \cap \mathrm{Dom}\,\bar\partial^* \cap L^{p,q}_{(2)}(\Omega,E,g,h)$
  - $\cdot$ $A : L^{p,q}_{(2)}(\Omega,E,g,h) \to L^{p,q}_{(2)}(\Omega,E,g,h)$ (有界)

1 L^2 $\bar\partial$ コホモロジー群の次元について

M が完備な Kähler 計量を持ち (E,h) が直線束で曲率形式 $\Theta(=\Theta_h)$ が正ならば $H^{n,q}_{(2)}(M,E,\Theta,h) = 0$ $(q \geq 1)$ である (L^2 消滅定理 cf. [Dm-1], [Oh-3, 4])。L^2 消滅定理は、$p = n$ かつ $q \geq 1$ のときに A が Θ に正比例する形で L^2 不等式が成り立つことを用いて小平 [K] により確立されたものが、[A-V-1, 2] や [Hm] を経て一般化されたものである。

上の L^2 消滅定理の条件 $\Theta > 0$ を「M のあるコンパクト集合の補集合上で $\Theta > 0$」(短く $\liminf_M \Theta \succ 0$ と記す) に弱めた時、結論を

$$\mathrm{supp}(g-\Theta) \Subset M \text{ をみたす計量 } g \text{ に対して } \dim H^{n,q}_{(2)}(M,E,g,h) < \infty \ (q \geq 1)$$

に替えたものは正しいか。つまり

問 1*****.** M が完備な Kähler 計量を持ち $\liminf_M \Theta \succ 0$ なら $\mathrm{supp}(g-\Theta) \Subset M$ のとき $\dim H^{n,q}_{(2)}(M,E,g,h) < \infty$ $(q \geq 1)$ か。

これは難問だが、M が弱 1 完備で $\liminf_M \Theta \succ 0$ なら $\dim H^{p,q}(M,E) < \infty$ $(p+q > n)$ であることから (cf. [N], [Oh-1, 2])、次はその延長上で比較的容易に示せるだろう。

問 2*(予想)**.** M が弱 1 完備であり $\liminf_M \Theta \succ 0$ かつ $\mathrm{supp}(g-\Theta) \Subset M$ なら $\dim H^{n,q}_{(2)}(M,E,g,h) < \infty$ $(q \geq 1)$ である。

一方、M が複素解析空間としてのコンパクト化 $\overline{M}$ を持つ場合、(E,h) の曲率条件なしに

$$q < \mathrm{codim}(\overline{M}\setminus M) - 1 \Rightarrow \dim H^{n,q}(M,E) < \infty$$

だが (cf. [A-G])、

問 3*. このとき問 1 の答はどうか。

$\overline{M}$ が非特異であり有効因子 D があって $|D| = \overline{M} \setminus M$ となるとき、$[D]|_{|D|} < 0$ なら $|D|$ は例外因子なので $\mathrm{codim}(\overline{M} \setminus M) = n$ の状況と変わらない ([G-2]) が、$[D]|_{|D|} > 0$ なら $[D] \geq 0$ なので M は弱 1 完備になり問 2 の状況に含まれる。$[D]|_{|D|} \geq 0$ でも M が弱 1 完備でないことがある。(例えば Hopf 曲面上のアファイン直線束で、全空間が $\{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < 2\} \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$ と同型になるものがある。) M が弱 1 完備であっても D に沿って対数的増大度を持つ PSH(多重劣調和) 皆既関数 (exhaustion function) を持たないことがあるので (cf. Serre の例や上田理論 [U])、次の問いは自然であろう。

問 4**. $[D]|_{|D|} \geq 0$ のとき問 1 の答はどうか。

g が計量として $\overline{M}$ 上に拡張でき (E, h) が $\overline{M}$ 上に Hermite ベクトル束 $(\overline{E}, \overline{h})$ として拡張されるとき $H^{p,q}_{(2)}(M, E, g, h)$ はすべて有限次元だが

問 5**. g が $|D|$ に沿って退化する時でも $\mathrm{supp}(g - \Theta) \Subset M$ であればこれらは $p = n$ なら有限次元ではないか。($[D]|_{|D|} \geq 0$ は仮定しない。)

L^2 コホモロジーについては次も重要であろう。

問 6***. M が等質有界領域で g が $\mathrm{Aut}\, M$ の作用で不変なら $\dim \mathcal{H}^{p,q}_{(2)}(M, g) = \infty$ $(p + q = n)$ か。

Bergman 計量 $\partial\bar{\partial} \log K_M$ が $\mathrm{Aut}\, M$ 不変であるので、$\partial \log K_M$ を評価することにより g を $A = \mathrm{Id}$ となる L^2 評価が成り立つように取れ、その結果 $p + q \neq n$ なら $\dim \mathcal{H}^{p,q}_{(2)}(M, g) = 0$ であり $p + q = n$ なら $H^{p,q}_{(2)}(M, g) \cong \mathcal{H}^{p,q}(M, g)$ となる (cf. [K-Oh])。M が対称有界領域のときには問 6 は肯定的に解決されている (cf. [Gm])。

2 Levi 問題と L^2 評価

M が有界な強多重劣調和関数を持つ Stein 多様体なら、任意の PSH 関数 $\varphi : M \to [-\infty, \infty)$ は Bergman 核の列 $K_{M,m\varphi}$ を用いて $\frac{1}{m} \log K_{M,m\varphi}$ で近似できる ([Dm-2])。これは Levi 問題が L^2 評価つきで解けたことの一つの著しい帰結である。一般の多様体上で領域の正則凸性を幾何学的な条件で特徴づけることは Levi 問題の本来の目的であろうが、部分的な結果が多く、難易度も様々である (cf. [S-1])。以下ではその中で特に L^2 評価と相性が好いものを選び、最近の結果が示唆する問題を提示したい。

Ω は M 内の局所的に擬凸な領域であるとする。強擬凸領域の正則凸性を示した

[G-1] を受けて 1962 年の ICM で R. Narasimhan が提出した問題は、現在次の形で残っている。

問 7*.** $\Omega \Subset M$ かつ $\partial\Omega \in C^2$ であり、$\partial\Omega$ はどこかで強擬凸であるとする。このとき Ω 上に非定数正則関数が存在するか ($n = 2$ で $\partial\Omega$ が連結なら [D-Oh] で $\partial\Omega \in C^\omega$ のときに解決)。

問 7 の原型では Ω の正則凸性が問われたが、Grauert は [G-3] でその反例 ($n \geq 3$) を与えた。実際、$L(= M)$ がコンパクトな複素多様体 N 上の正則直線束で、部分多様体 $S \subset N$ 以外で曲率が正になるファイバー計量を持ち、任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $L^m|_S \neq \mathbb{C} \times N$ であれば、L の零切断は問 7 の仮定をみたす近傍を持つ非正則凸な近傍を持つ。Ω が正則直線束の零切断の管状近傍であれば問 7 の答は肯定的である (cf. [S-2])。

一方、Grauert は正則凸性の概念を次のように拡げて問 7 とは別の方向に Levi 問題を拡張した。

定義. Ω が E**-凸**であるとは、任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対して K を含む Ω のコンパクト集合 $\hat{K}$ があり、E の零切断の任意の近傍 U と任意の点 $x \in \Omega \setminus \hat{K}$ および任意の $P \in E_x$ に対し、E の正則切断 s で $s(K) \subset U$ かつ $s(x) = P$ をみたすものが存在することをいう。

問 8*. M が弱 1 完備であり (E, h) が M のコンパクト集合の補集合上で中野正 $(\Theta > 0)$ であれば、M は $(\mathcal{K}_M \otimes E)$-凸か。

M が正則凸なら弱 1 完備だが

問 9.** ある E に対し M が E-凸ならば M は弱 1 完備か。また、このとき E は曲率がコンパクト集合の補集合上で中野半正であるようなファイバー計量を持つか。

定義. Ω 内に集積しない任意の $(x_k) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ に対して E の正則切断 s で $\limsup_{k\to\infty} |s(x_k)| = \infty$ となるものがあれば Ω は**弱** E**-凸**であるという。

E が正直線束 $(E > 0)$ で $\Omega \Subset M$ (局所擬凸) ならば、Ω は $m \gg 1$ のとき弱 E^m-凸になることが L^2 評価により示された (cf. [P], [A])。条件 $E > 0$ を $E|_{\partial\Omega} > 0$ に弱めると Ω が弱 E^m-凸にならない例がある (簡単なので省略) が、$\partial\Omega \in C^2$ であれば Ω は弱 E^m-凸 $(m \gg 1)$ であることが示せる (cf. [Oh-11])。

$\mathcal{K}_M|_{\partial\Omega} < 0$ ($\partial\Omega$ の近傍で負) なら Ω はほとんど正則凸、つまり Ω から $\mathbb{C}^N$ への正

則写像で像の上にプロパーなものがある (cf. [Oh-12, 13])。

問 10****.** $\mathcal{K}_M|_{\partial\Omega} < 0$ なら Ω は正則凸か。

ちなみに標準束が負であるような弱 1 完備多様体は正則凸だが (cf. [T])、この条件は「標準束がコンパクト集合の補集合上で負」に弱めてもよい (cf. [Oh-13])。$\delta(z) = \mathrm{dist}(z, \partial\Omega)$ とおく。

問 11****.** $\partial\Omega \in C^2$ の時、$\displaystyle\bigcup_{\mu=1}^{\infty} H^{n,0}_{(2)}(\Omega, E, g, h\delta^\mu)$ は $H^{n,0}(\Omega, E)$ 内で稠密か。([Oh-14] で少し調べた。)

正則写像 $f : M \to N$ が **Stein** であるとは、f による逆像が Stein であるような開集合で N が覆えることをいう。

定理 (岡潔)**.** M が Stein 多様体への局所同相 Stein 写像を持てば、M は Stein である。

これが L^2 評価で解けたことが話の発端だった。

問 12*****.** M がある Stein 多様体への単射 Stein 写像を持てば、M は Stein か。(Griffiths の問題)

単射性の仮定を外すと Fornaess の反例 [F] や Skoda の反例 [Sk] がある。
問 12 は難しすぎるので、計算結果が出せそうな状況を次に上げる。

問 13****.** $\mathbb{C}^N$ 内の C^2 級の境界を持つ有界領域 Ω の複素閉部分多様体 S が $\mathbb{C}^N$ 内で局所的に Stein なら Stein か。$\overline{\Omega}$ の近傍内に複素多様体 $\tilde{S}$ があって $S = \tilde{S} \cap \Omega$ となるときはどうか。

$\mathrm{Aut}\, M$ の離散部分群 Γ が M に固定点なしで作用する時、被覆写像 $M \to M/\Gamma$ は Stein である。

問 14*****.** M/Γ がコンパクトな Kähler 多様体なら M は弱 1 完備か (阿部誠)。さらに M が単連結なら正則凸か (Shafarevich)。

前者については部分的な答が知られており (cf. [Np]) 後者は Γ が「十分多くの」線形表現を持つ時には正しい (cf. [E-K-P-R])。
M が双曲的閉 Riemann 面の被覆面であれば $K_M \neq 0$ である (cf. [D], [Oh-5])。こ

のとき Γ の正規部分群の降下列 Γ_k で $\bigcap_{k=1}^{\infty}\Gamma_k=\{1\}$ をみたすものに対し、K_{M/Γ_k} の M への引き戻し $\tilde{K}_{M/\Gamma_k}$ が K_M に収束するかどうかは Kazhdan (Kajdan) [Kd] が提起し、M が単連結のときの解決 [R] を経て [B-S-W] で一般的に解決された。[C-F] では M/Γ が開 Riemann 面のときでも M が単連結ならば K_{M/Γ_k} に対する収束定理が成り立つことが示された。

問 15**. M が複連結でも $\lim \tilde{K}_{M/\Gamma_k}=K_M$ か。

[C-F] によれば、$M\cong\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$ のとき $\tilde{K}_{M/\Gamma_k}$ は M_k の Poincaré 的入射半径を τ_k としたとき $e^{-\tau_k/3}$ の定数倍より速く K_M に収束する。

M が強擬凸領域であれば K_M の漸近展開と ∂M の不変量の関係は詳しく調べられている。

問 16**. K_M の $e^{-\tau_k}$ に関する「漸近展開の係数」を求めよ。

3 L^2 拡張定理に関連する問題

Kähler 多様体上の L^2 不等式は $\bar\partial\bar\partial^*+\bar\partial^*\bar\partial$ と $\partial_h\partial_h^*+\partial_h^*\partial_h$ ($\partial_h=h^{-1}\circ\partial\circ h$) の差が Θ に比例することから従うが、正値 C^∞ 級関数 η に対し

$$\bar\partial\circ\eta\circ\bar\partial^*+\bar\partial^*\circ\eta\circ\bar\partial-(\partial_h\circ\eta\circ\partial_h^*+\partial_h^*\circ\eta\circ\partial_h)$$

を計算すると、(n,q) 型の u に対して

$$(Bu,u)\le\left\|\sqrt{\eta}\,\bar\partial^*u\right\|^2+\left\|\sqrt{\eta+|\bar\partial\eta|}\,\bar\partial u\right\|^2$$

(B は $\eta\Theta-\partial\bar\partial\eta$ に比例) の形の不等式 (捩 L^2 不等式) が従い、$\Theta\ge 0$ かつ $\partial\bar\partial\eta\le 0$ の場合には $\bar\partial$ 方程式が L^2 評価付きで解ける。

これから L^2 拡張定理 [Oh-T] が得られ、Bergman 核や代数幾何への応用を含む展開があった。その中で吹田予想 [Su] の解決 ([Bł-1], [G-Z]) と藤田予想や変形理論への応用 ([A-S], [S-3])、および両者の関連性の発見 [Bn-L] は著しい。[Bn-L] は [Oh-T] が次の形で最良化されたことに触発されたものである。

定理 I (最良型の L^2 拡張定理 (cf. [Bł-1], [G-Z]))**.** Ω は $\mathbb{C}^n$ の擬凸開集合で $\sup_\Omega|z_n|\le 1$ をみたすものとし、φ は Ω 上の PSH 関数とする。このとき $\Omega':=\Omega\cap z_n^{-1}(0)$ 上の正則関数 f で $\int_{\Omega'}e^{-\varphi}|f|^2<\infty$ をみたすものに対し Ω 上の正則関数

$\tilde{f}$ で $\tilde{f}|_{\Omega'} = f$ かつ

$$\int_\Omega e^{-\varphi}|\tilde{f}|^2 \le \pi \int_{\Omega'} e^{-\varphi}|f|^2$$

となるものが存在する。ただし積分は Lebesgue 測度に関するものとする。

これに先立つ [Oh-7, 8] では、M の部分多様体上の E の正則切断を L^2 条件付きで M 上に拡張する作用素 (L^2 拡張作用素) の存在条件を、一変数の補間理論 [Sp] で用いられた密度概念を参考にして定式化して述べた。

測度つきの複素多様体 $(M, d\mu)$ と Hermite 束 (E, h) に対し、対 $(d\mu, h)$ に関する 2 乗可積分な正則切断の空間 $H^{0,0}_{(2)}(M, E, d\mu, h)$ が定まるが、問題は、複素部分多様体 $S \subset M$ が与えられたとき、S 上のどんな測度 $d\mu_S$ に対して $H^{0,0}_{(2)}(S, E, d\mu_S, h)$ の任意の元が $H^{0,0}_{(2)}(M, E, d\mu, h)$ の元へと拡張できるかということである。

定義. 複素部分多様体 $S \subset M$ と S 上の測度 $d\mu_S$ に対し、有界線形作用素

$$I : H^{0,0}_{(2)}(S, E, d\mu_S, h) \to H^{0,0}_{(2)}(M, E, d\mu, h)$$

で $\forall s \in H^{0,0}_{(2)}(S, E, d\mu_S, h)$ に対して $I(s)|_S = s$ をみたすものが存在する時、I を (E, h) に対する $(S, d\mu_S)$ から $(M, d\mu)$ への $\boldsymbol{L^2}$ **拡張作用素**という。

[Oh-8] では $d\mu$ として M 上の連続な体積要素 dV をとり、連続な関数 $\Psi : M \to [-\infty, 0)$ で S に沿って標準的な対数特異性を持つものに対して S のポテンシャル論的な密度に相当する測度 $dV[\Psi]$ を定義し、捩 L^2 不等式を用いて L^2 拡張作用素の存在を次の形で示した。(簡単のため、ここでは M は Stein で Ψ は PSH であるとして述べる。)

定理 II. $\Theta \ge 0$ ならば $(E \otimes \mathcal{K}_M, h \otimes (dV)^{-1})$ に対する $(S, dV[\Psi])$ から (M, dV) への L^2 拡張作用素

$$I : H^{0,0}_{(2)}(S, E \otimes \mathcal{K}_M, dV[\Psi], h \otimes (dV)^{-1}) \longrightarrow H^{0,0}_{(2)}(M, E \otimes \mathcal{K}_M, dV, h \otimes (dV)^{-1})$$

が存在する。

後に I のノルムは $\sqrt{\pi}$ 以下にできることが判明した (cf. [Bł-1], [G-Z])。

S が特異点を持つ解析集合の場合にも $dV[\Psi]$ の構成は同様で、定理 II は同じ形で成立する。$dV[\Psi]$ と特異点の性質 (e.g. klt) の関係が [Dm-3] や [K-S] で調べられている。

一方、このとき M の計量の S への制限に関する体積要素 (計量的測度)dV_S および S の点 x に対し、x のある近傍 $U \subset M$ 上で次の i)、ii) は同値である (cf. [G-L])。

$i)$ x は S の特異点ではない。

$ii)$ U 上の任意の PSH 関数 φ に対し L^2 拡張作用素 $H^{0,0}_{(2)}(U \cap S, e^{-\varphi}dV_S) \to H^{0,0}_{(2)}(U, e^{-\varphi}dV)$ が存在する。

問 17****.** Stein 多様体 M と解析集合 $S \subset M$ 上の計量的測度 dV_S に対し、M 上の体積要素 dV で L^2 拡張作用素 $H^{0,0}_{(2)}(S, dV_S) \to H^{0,0}_{(2)}(M, dV)$ を持つものを具体的に構成することはできるか。

$M = \mathbb{C}^n$ の場合に Pingali と Varolin [P-V-1,2] はこの問と似た観点で L^2 拡張問題を論じている。

定理 II における I のノルム評価 $\|I\| \leq \sqrt{\pi}$ (最良) から、Stein 族 Ω_t $(= \pi^{-1}(t), \pi : \tilde{\Omega} \to \mathbb{D}, d\pi \neq 0, \tilde{\Omega}$ は Stein) の Bergman 核 K_{Ω_t} のパラメータ依存性 $\partial\bar{\partial} \log K_{\Omega_t} \geq 0$ が従う (cf. [G-Z])。これは米谷・山口 [M-Y] により $\dim \Omega_t = 1$ のとき示され、Berndtsson [Bn] によって高次元へと一般化された結果だったが、Lempert は [M-Y] から [Su] で予想された Riemann 面上の Bergman 核の評価が得られることを見出し (cf. [Bł-2])、[Bn-L] では同じ方法で $\|I\| \leq \sqrt{\pi}$ が得られた。$\|I\| \leq \pi$ の応用として、Păun と高山 [P-T] は射影的代数多様体のカテゴリーで半正直線束の多重随伴束の順像の半正値性を示し、最近、Schnell と Yang [S-Y] は VHS に付随する「斎藤束」の半正値性を示した。これらの目覚ましい成果を起点として L^2 拡張作用素がさらに詳しく解明され、Stein 族を中心とする複素解析族がさらに解明されることが期待される。

参考文献

[A-G] Andreotti, A. and Grauert, H., *Théorème de finitude pour la cohomologie des espaces complexes,* Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 193-259.

[A-V-1] Andreotti, A.; Vesentini, E. *Sopra un teorema di Kodaira,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3) **15** (1961), 283-309.

[A-V-2] ——, *Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **25** (1965), 81-130.

[A-S] Angehrn, U. and Siu, Y.-T., *Effective freeness and point separation for adjoint bundles,* Invent. Math. **122** (1995), no. 2, 291-308.

[A] Asserda, S., *The Levi problem on projective manifolds,* Math. Z. **219** (1995), no. 4, 631-636.

[B-S-W] Baik, H., Shokrieh, F. and Wu, C., *Limits of canonical forms on towers* *of Riemann surfaces,* J. Reine Angew. Math. **764** (2020), 287-304.

[Bn] Berndtsson, B., *Subharmonicity properties of the Bergman kernel and some other functions associated to pseudoconvex domains,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), no. 6, 1633-1662.

[Bn-L] Berndtsson, B. and Lempert, L., *A proof of the Ohsawa-Takegoshi theorem with sharp estimates,* J. Math. Soc. Japan **68**, no. 4 (2016), 1461-1472.

[Bł-1] Błocki, Z., *Suita conjecture and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem,* Invent. Math. **193** (2013), 149-158.

[Bł-2] ——, *Bergman kernel and pluripotential theory. Analysis, complex geometry, and mathematical physics,* in honor of Duong H. Phong, 1-10, Contemp. Math., **644**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[C-F] Chen, B.-Y. and Fu, S.-Q., *Stability of the Bergman kernel on a tower of coverings,* J. Differential Geom.**104** (2016), no. 3, 371-– 398.

[Dm-1] Demailly, J.-P., *Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar\partial$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète,* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **15** (1982), no. 3, 457-511.

[Dm-2] ——, *Regularization of closed positive currents and intersection theory,* J. Algebraic Geom. **1** (1992), no. 3, 361-409.

[Dm-3] ——, *Extension of holomorphic functions and cohomology classes from non reduced analytic subvarieties,* Geometric complex analysis, 97-113, Springer Proc. Math. Stat., **246**, Springer, Singapore, 2018.

[D-Oh] Diederich, K. and Ohsawa, T., *A Levi problem on two-dimensional complex manifolds,* Math. Ann. **261** (1982), no. 2, 255-261.

[D] Dodziuk, J., *Every covering of a compact Riemann surface of genus greater than one carries a nontrivial L^2 harmonic differential,* Acta Math. **152** (1984), no. 1-2, 49-56.

[E-K-P-R] Eyssidieux, P., Katzarkov, L., Pantev, T. and Ramachandran, M., *Linear Shafarevich conjecture,* Ann. of Math. (2) **176** (2012), no. 3, 1545-1581.

[F] Fornaess, J.- E., *A counterexample for the Levi problem for branched Riemann domains over $\mathbb{C}^n$*, Math. Ann. 234 (1978), no. 3, 275-277.

[G-1] Grauert, H., *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds,* Ann. of Math. (2) **68** (1958), 460-472.

[G-2] ——, *Über Modifikation en und exzeptionelle analytische Mengen,* Math.

Ann. **146** (1962), 331-368.

[G-3] ——, *Bemerkenswerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten,* Math. Z. **81** (1963), 377-391.

[Gm] Gromov, M., *Kähler hyperbolicity and L^2-Hodge theory,* J. Differential Geom. **33** (1991), no. 1, 263-292.

[G-L] Guan, Q.-A. and Li, Z.-Q., *A characterization of regular points by Ohsawa-Takegoshi extension theorem,* J. Math. Soc. Japan **70** (2018), no. 1, 403-408.

[G-Z] Guan, Q.-A. and Zhou, X.-Y., *A solution of an L^2 extension problem with optimal estimate and applications*, Ann. of Math. **181** (2015), 1139-1208.

[Hm] Hörmander, L., *L^2 estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ operator*, Acta Math. **113** (1965), 89-152.

[K-Oh] Kai, C. and Ohsawa, T., *A note on the Bergman metric of bounded homogeneous domains,* Nagoya Math. J. **186** (2007), 157-163.

[Kd] Kajdan, D., *Arithmetic varieties and their fields of quasi-definition,* Actes du Congrè International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2, pp. 321-325. Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[K-S] Kim, D. and Seo, H., *On L^2 extension from singular hypersurfaces,* arXiv:2104.03554v2 [math.CV].

[K] Kodaira, K. *On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks,* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 39, (1953). 1268-1273.

[M-Y] Maitani, F. and Yamaguchi, H., *Variation of Bergman metrics on Riemann surfaces,* Math. Ann. **330** (2004), no. 3, 477-489.

[N] Nakano, S., *Vanishing theorems for weakly 1-complete manifolds, II,* Publ. RIMS, Kyoto Univ. **10** (1974), 101-110.

[Np] Napier, T., *Convexity properties of coverings of smooth projective varieties,* Math. Ann. **286** (1990), no. 1-3, 433-479.

[Oh-1] Ohsawa, T., *Finiteness theorems on weakly 1-complete manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **15** (1979), 853-870.

[Oh-2] ——, *On $H^{p,q}(X, B)$ of weakly 1-complete manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **17** (1981), 113-126.

[Oh-3] ——, *On complete Kähler domains with C^1-boundary,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **16** (1980), no. 3, 929-940.

[Oh-4] ——, *Vanishing theorems on complete Kähler manifolds,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), no. 1, 21-38.

[Oh-5] ——, *On the hyperbolicity of certain planar domains,* Math. Z. **195** (1987), no. 1, 127-128.

[Oh-6] ——, *Hodge spectral sequence and symmetry on compact Kähler spaces,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **23** (1987), no. 4, 613-625.

[Oh-7] ——, *On the extension of L^2 holomorphic functions. IV. A new density concept,* Geometry and analysis on complex manifolds, 157-170, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994.

[Oh-8] ——, *On the extension of L^2 holomorphic functions. V. Effects of generalization,* Nagoya Math. J. **161** (2001), 1-21. Erratum: Nagoya Math. J. **163** (2001), 229.

[Oh-9] ——, *A tower of Riemann surfaces whose Bergman kernels jump at the roof,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **46** (2010), no. 3, 473-– 478.

[Oh-10] ——, *Variants of Hörmander's theorem on q-convex manifolds by a technique of infinitely many weights,* Abhandlungen aus dem math. Sem.Hmbrg (2021 Online).

[Oh-11] ——, *L^2 $\bar\partial$-cohomology with weights and bundle-convexity of certain locally pseudoconvex domains,* preprint.

[Oh-12] ——, *On the Levi problem on Kähler manifolds under the negativity of canonical bundles on the boundary,* to appear in Pure and Applied Math. Q.

[Oh-13] ——, *On the Levi problem on complex manifolds under the negativity of canonical bundles on the boundary,* preprint.

[Oh-14] ——, *On weakly psedoconvex doamins of regular type — an approximation theorem,* preprint.

[Oh-T] Ohsawa, T. and Takegoshi, K., *On the extension of L^2 holomorphic functions,* Math. Z. **195** (1987), 197-204.

[P-T] Păun, M. and Takayama, S., *Positivity of twisted relative pluricanonical bundles and their direct images,* J. Algebraic Geom. **27** (2018), no. 2, 211-272.

[P-V-1] Pingali, V. P. and Varolin, D., *Bargmann-Fock extension from singular hypersurfaces,* J. Reine Angew. Math. **717** (2016), 227-249.

[P-V-2] ——, *Nonuniformly flat affine algebraic hypersurfaces,* Nagoya Math. J. **241** (2021), 1-43.

[P] Pinney, K. R., *Line bundle convexity of pseudoconvex domains in complex manifolds,* Math. Z., **206** (1991), 605-615.

[R] Rhodes, J. A., *Sequences of metrics on compact Riemann surfaces,* Duke Math. J. **72** (1993), no. 3, 725-738.

[Sp] Seip, K., *Beurling type density theorems in the unit disk,* Invent. Math. **113** (1993), no. 1, 21-39.

[S-Y] Schnell, C. and Yang, R., *Hodge modules and singular Hermitian metrics,* arXiv:2003.09064v1 [math.AG]

[S-1] Siu, Y.- T., *Pseudoconvexity and the problem of Levi,* Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), no. 4, 481-512.

[S-2] ——, *Some recent results in complex manifold theory related to vanishing theorems for the semipositive case,* Workshop Bonn 1984 (Bonn, 1984), 169-192, Lecture Notes in Math., **1111**, Springer, Berlin, 1985.

[S-3] ——, *Extension of twisted pluricanonical sections with plurisubharmonic weight and invariance of semipositively twisted plurigenera for manifolds not necessarily of general type,* Complex geometry (Göttingen, 2000), 223-277, Springer, Berlin, 2002.

[Sk] Skoda, H. *Fibrés holomorphes à base et à fibre de Stein,* Invent. Math. **43** (1977), no. 2, 97-107.

[Su] Suita, N., *Capacities and kernels on Riemann surfaces,* Arch. Rational Mech. Anal. **46** (1972), 212-217.

[T] Takayama, S., *The Levi problem and the structure theorem for non-negatively curved complete Kähler manifolds,* J. Reine Angew. Math. **504** (1998), 139-157.

[U] Ueda, T., *On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle,* J. Math. Kyoto Univ. **22** (1982/83), no. 4, 583-607.