値分布の問題

大阪大学・大学院理学研究科　山ノ井　克俊
KATSUTOSHI YAMANOI
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE,
OSAKA UNIVERSITY

1. 注意事項

本稿では，問題の「難易度」を示す星の数は概ね以下のような基準でつけている．星一つ (*) は，筆者以外の研究者にあまり知られていない、もしくは関心を持たれていない（ように思われる）問題．従って，難易度が高いか，低いかは，よく分からない．星二つ (**) は，この分野の研究者なら知っていそうだけど，広く複素幾何の研究者全般が知っているわけではなさそうな問題．従って，チャレンジしたことがある人が比較的少ないかもしれない．星三つ (***) は有名問題，もしくは有名ではないかもしれないが，この分野の研究者が昔から挑戦してきて，超難問として認定されているもの．このような基準なので，例えば問題 A が解ければ問題 B が解ける，という状況で，問題 B には星三つ，問題 A には星一つ，という一見矛盾した星の割り当ても，あえて辞さないこととした．

2. 一変数の問題

この章では，$f:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^1$ を非定数な有理型関数とする．ここで，$\mathbb{P}^1$ はリーマン球面と同一視する．$\mathbb{C}(t)=\{z\in\mathbb{C};\ |z|<t\}$ とおき，以下の記号を用いる．

1. (清水-Ahlfors の) 位数関数: $T(r)=\displaystyle\int_1^r\left\{\int_{\mathbb{C}(t)}f^*\omega\right\}\frac{dt}{t}$.

ただし、$\omega=\dfrac{1}{(1+|z|^2)^2}\dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}dz\wedge d\bar{z}$ は球面計量.

2. 接近関数：点 $a\in\mathbb{P}^1$ に対して，$m(r,a)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{[f(re^{i\theta}),a]}d\theta$

ただし，$[x,y]=\dfrac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}$ は弦距離.

3. 分岐個数関数：$N_1(r)=\displaystyle\int_1^r n_1(t)\frac{dt}{t}$

ただし，$n_1(t)$ は、$f:\mathbb{C}(t)\to\mathbb{P}^1$ の分岐点の重複度を込めた個数.

以上の準備の下，一変数のネヴァンリンナ理論の主結果は次の第二主要定理である.

定理 1 (第二主要定理). 相異なる $a_1,\dots,a_q\in\mathbb{P}^1$ に対して、次が成立：

$$\sum_{i=1}^q m(r,a_i)+N_1(r)\leq(2+o(1))T(r)\ ||$$

ただし、$||$ は $r\to\infty$ において、測度有限の除外集合の外で不等式が成立することを意味する.

f が有理関数のとき，第二主要定理は，より強く等式として次の形で成立することが，リーマン・フルビッツの公式から従う：$a_1 = f(\infty)$ として、

$$\sum_{i=1}^{q} m(r, a_i) + N_1(r) = \left(2 - \frac{1}{\deg f}\right) T(r) + O(1)$$

f が超越的な場合は，第二主要定理をこのような形で等式にすることはできない．実際，$z = \infty$ において f は真性特異点をもつので，'$f(\infty)$' が意味をなさない．そこで、第二主要定理の左辺の $\sum$ を

$$\overline{m}_q(r) = \sup_{(a_1,\ldots,a_q)\in(\mathbb{P}^1)^q} \int_0^{2\pi} \max_{1\le j\le q} \log \frac{1}{[f(re^{i\theta}), a_j]} \frac{d\theta}{2\pi}$$

と置き換えると，次が成り立つ．

定理 2 ([8])**.** f を超越的として，$q : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{N}$ を

$$q(r) \sim \left\{\log^+ \left(\frac{T(r)}{\log r}\right)\right\}^{20} \tag{2.1}$$

とする。このとき

$$\overline{m}_{q(r)}(r) + N_1(r) = (2 + o(1))T(r) \tag{2.2}$$

が $r \to \infty$ で対数密度 *0* の除外集合の外で成立する．

問題 1 (*)**.** 条件 (2.1) より小さい $q(r)$ で (2.2) は成立するか?例えば，f が位数有限（$\lambda < \infty$）であれば，$q(r) \to \infty$ で *OK* である（[9]）．ここで，f の位数を次で定義する：

$$\lambda = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log^+ T(r)}{\log r}$$

漠然とした問題であるが，筆者としては，対数微分の補題の精密な評価と関係しているのではないかと思っている．最良評価にたどり着ければ，かなり面白い.（例えば，(2.1) の 20 をもっと小さくできる，というのはある方から教えて頂いたことがある.）

問題 2 (*)**.** f が位数有限のとき，除外集合なしで (2.2) は成立するか？f が位数有限のとき、第二主要定理は除外集合なしで成立することは，古典的によく知られている．

次に，$a \in \mathbb{P}^1$ の欠如指数を $\delta(a) = \underline{\lim}_{r\to\infty} \dfrac{m(r,a)}{T(r)}$ と定義する．第二主要定理から，次の欠如指数関係式が成立する．

$$\sum_{a\in\mathbb{P}^1} \delta(a) \le 2 \tag{2.3}$$

位数有限の場合，欠如指数関係式が等式として成立するのはどのような状況か，古典的に深い研究がされてきた．

定理 3. f を位数有限とする．

(1) （[4]）$N_1(r) = o(T(r))$ ならば、$\sum_{a\in\mathbb{P}^1} \delta(a) = 2$

(2) （[2]）$\sum_{a\in\mathbb{P}^1} \delta(a) = 2$ ならば $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\ge 0}$ かつ $\delta(a)\lambda \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ が全ての $a \in \mathbb{P}^1$ で成立する．

従って，$\lambda \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ であれば，欠如指数関係式は等式にはなり得ないので，(2.3) の右辺の最良評価が問題になる．

問題 3 (***). f を位数有限とする．

(1) （例えば [6] 参照）$\delta(0)+\delta(\infty) \le 2-K(\lambda)$ は成立するか？ただし，

$$K(\lambda)=\begin{cases} \frac{|\sin\pi\lambda|}{[\lambda]+|\sin\pi\lambda|} & [\lambda]\le\lambda\le[\lambda]+1/2 \\ \frac{|\sin\pi\lambda|}{[\lambda]+1} & [\lambda]+1/2<\lambda<[\lambda]+1 \end{cases}$$

(2) （[3] 参照）$\sum_{a\in\mathbb{P}^1}\delta(a)\le\Lambda(\lambda)$ は成立するか？ただし，

$$\Lambda_1(\lambda)=2-\frac{2\sin\frac{\pi}{2}(2\lambda-[2\lambda])}{[2\lambda]+2\sin\frac{\pi}{2}(2\lambda-[2\lambda])},\quad \Lambda_2(\lambda)=2-\frac{2\cos\frac{\pi}{2}(2\lambda-[2\lambda])}{[2\lambda]+1}$$

として，$\Lambda(\lambda)=\max\{\Lambda_1(\lambda),\Lambda_2(\lambda)\}$.

3. 高次元の問題

この章では，X を滑らかな代数多様体として，特に断らなければ射影的とする．$f:\mathbb{C}\to X$ を整曲線（非定数な正則写像）とする．以下の記号を用いる．

1.: X 上の正則直線束 L に対して、$T_{f,L}(r)=\int_1^r\left\{\int_{\mathbb{C}(t)}f^*c_1(L)\right\}\frac{dt}{t}+O(1)$.
ただし、$c_1(L)$ は L の第一チャーン類（(1,1)-形式）.

2: X 上の有効因子 D で $f(\mathbb{C})\not\subset D$ に対して、$\bar{N}_{f,D}(r)=\int_1^r\left\{\sum_{z\in\mathbb{C}(t)}\min\{1,\mathrm{ord}_z f^*D\}\right\}\frac{dt}{t}$

高次元ネヴァンリンナ理論のかなり以前からの中心問題は次である．

問題 4 (***). X を滑らかな射影多様体，$D\subset X$ を単純正規交差因子，L を X の豊富な直線束として，$f:\mathbb{C}\to X$ を整曲線で像がザリスキー位相で稠密とする．このとき，次の不等式が成立するか？

$$T_{f,K_X(D)}(r)\le\overline{N}_{f,D}(r)+o(T_{f,L}(r))\ ||$$

ただし，K_X は X の標準束とする．

X が一次元であれば正しいことは古典的に知られている．また，X がアーベル多様体と双有理同値であれば正しいことも知られている（[10]）．整曲線 $\mathbb{C}\to X$ の定義域を $\mathbb{C}$ の有限次分岐被覆面 $p:Y\to\mathbb{C}$ に拡張して，ネヴァンリンナ理論を考えることもできる．この場合，$\mathbb{C}(t)$ のかわりに $Y(t)=p^{-1}(\mathbb{C}(t))$ として，正則写像 $f:Y\to X$ に対して，$T_{f,L}(r)$ と $\overline{N}_{f,D}(r)$ を定義できる．また，$\mathrm{ram}\ p\subset Y$ を $p:Y\to\mathbb{C}$ の分岐因子として，$N_{\mathrm{ram}\ p}(r)=\int_1^r\left\{\sum_{z\in Y(t)}\mathrm{ord}_z(\mathrm{ram}\ p)\right\}\frac{dt}{t}$ とおく．ネヴァンリンナ理論をこのように拡張しておくと，問題 4 はアーベル多様体の場合に帰着することができる．次の問題が肯定的であれば，問題 4 は肯定的に解決できる（[11]）．

問題 5 (*). X をアーベル多様体と双有理同値な射影多様体とする．$D\subset X$ を単純正規交差因子，L を X の豊富な直線束として，$f:Y\to X$ を正則写像で像がザリスキー位相で稠密とする．このとき次の不等式が成立するか？

$$T_{f,K_X(D)}(r)\le\overline{N}_{f,D}(r)+N_{\mathrm{ram}\ p}(r)+o(T_{f,L}(r))\ ||$$

もとの整曲線 $\mathbb{C} \to X$ の設定に戻る．問題 4 に関しては，そもそも具体例があまり知られていない．

問題 6. X が例えば以下の場合に問題 *4* を検討せよ．

(1) （*）クンマー曲面.（問題 *5* をいきなり考えるのは難しい場合は，まずは特別な場合から.）
(2) （*）X が小平次元 *1* の曲面.（最近の幾何的ボゴモロフ予想の解決と関係があるかもしれない.）
(3) （***）$X = \mathbb{P}^n$ で D が一般の位置にある超平面の合併の場合.（古典的な未解決問題.）

次は，グリーン・グリフィス予想とよばれ，高次元値分布論で最も有名な問題である．

問題 7 (***)**.** X が一般型の射影多様体であれば、任意の整曲線 $f : \mathbb{C} \to X$ は代数退化するか？（問題 *4* が肯定的であれば，肯定的に解決することが知られている.）

次に小林擬距離の定義を述べる．
小林・ロイデン微分計量: 接ベクトル $v \in TX$ に対して、

$$F_X(v) = \inf\{r > 0\ ;\ \exists f : \mathbb{C}(1/r) \to X \text{ s.t. } f'(0) = v\}$$

小林擬距離: $x, y \in X$ に対して、$d_X(x, y) = \inf_{\gamma} \int_0^1 F_X(\gamma'(t))dt.$
ただし，inf は x, y を結ぶ X 上の区分的に滑らかな曲線 $\gamma : [0, 1] \to X$ 全体にわたる．
小林双曲多様体: 小林擬距離が真の距離となる複素多様体.

定理 4 (ブロディの補題)**.** コンパクト複素多様体 X が小林双曲的でないならば整曲線 $\mathbb{C} \to X$ が存在する．

この定理は小林双曲多様体に関する基本的な結果である．関係した問題をいくつか挙げる．

問題 8 (**)**.** X がアフィン代数多様体の場合，X が小林双曲的でないならば整曲線 $\mathbb{C} \to X$ が存在するか？

問題 9 (**)**.** X を射影多様体とする．$F_X(v) = 0$ となる $v \in TX - \{0\}$ に対して，整曲線 $f : \mathbb{C} \to X$ で $f'(0) = v$ となるものが存在するか？

これより控えめな問題も未解決である．これは，例えば [7] でも問題とされている．

問題 10 (***)**.** X を射影多様体とする．$\mathrm{Exc} \subset X$ の外で d_X は真の距離か？ただし，$\mathrm{Exc} = \overline{\bigcup_{f:\mathbb{C}\to X} f(\mathbb{C})}$ で，合併はすべての整曲線 $f : \mathbb{C} \to X$ にわたり，閉包は X のザリスキー位相に関してとる．

次も [7] で取り上げられている問題である．

問題 11 (***)**.** X が一般型であることと $\mathrm{Exc} \subsetneq X$ は同値か？

問題 12 (**)**.** X を射影的として

(1) $d_X \equiv 0$ と稠密な整曲線 $\mathbb{C} \to X$ の存在は同値か？
(2) *K3* 曲面 X に稠密な整曲線 $\mathbb{C} \to X$ は存在するか？

次の問題は，小林予想の精密化である．この問題は，グリーン・グリフィス予想が肯定的であれば，肯定的に解決することが知られている．元の小林予想は解決済である（[1] 参照）．

問題 13 (**). $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ を $\deg X \geq 2n+2$ となる一般の超曲面とすると X は小林双曲的か？

これよりも控えめな問題も未解決である．

問題 14 (**). 滑らかな超曲面 $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ で $\deg X = 2n+2$ となり，小林双曲的であるものを構成せよ．

次に，より具体的な対象に対する問題を述べる．まず，

$$\mathcal{O}(\mathbb{D})^* = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) : f \text{ は零点をもたない} \}$$

として，

$$\mathcal{B}_p = \{(f_1, \dots, f_p) \in (\mathcal{O}(\mathbb{D})^*)^p : f_1 + \cdots f_p = 0\}$$

とおく．$\mathcal{F} \subset \mathcal{B}_p$ を無限列として，$I \subset \{1, \dots, p\}$ が C-class とは，次が成り立つこととする：ある $k \in I$ が存在して

(1) 任意の $i \in I$ に対して $\{f_i/f_k\}_{(f_1,\dots,f_p)\in\mathcal{F}}$ は、$\mathbb{D}$ 上のある正則関数にコンパクト一様収束する．
(2) $\left\{ \sum_{i \in I} f_i/f_k \right\}_{(f_1,\dots,f_p)\in\mathcal{F}}$ は 0 にコンパクト一様収束する．

次の定理について，詳しくは [7] の最終章を参照．

定理 5 (Bloch, Cartan). 無限列 $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}_p$ に対して、$\mathcal{F}$ を部分列で置き換えると、次のいずれかが成立する：

(1) $\{1, \dots, p\}$ は *C-class,* または
(2) 少なくても二つの互いに交わらない *C-class* $I, J \subset \{1, \dots, p\}$ が存在する．

Cartan はより強く，$\mathcal{F}$ を部分列で置き換えると、C-class による互いに素な合併 $I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_l = \{1, \dots, p\}$ になると予想したが，これは Eremenko によって反証されている（[5]）．Eremenko は Cartan 予想を修正する予想を提示しているが（[5]），ここではもう少し控えめな次の問題を挙げる．

問題 15 (*). 無限列 $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}_p$ に対して、$\mathcal{F}$ を部分列で置き換えると、次の性質をみたす互いに素な *C-class* $I_1, \dots, I_l \subset \{1, \dots, p\}$ が存在するか？任意の $j \in \{1, \dots, p\} \backslash (I_1 \cup \cdots \cup I_l)$ に対して，$\left\{ |f_j| / \sqrt{\sum_{i \in I_1 \cup \cdots \cup I_l} |f_i|^2} \right\}_{(f_1,\dots,f_p)\in\mathcal{F}}$ は 0 にコンパクト一様収束する．

References

[1] D. Brotbek, *On the hyperbolicity of general hypersurfaces*, Publ. Math. Inst. Hautes tudes Sci. 126 (2017), 134.

[2] D. Drasin, *Proof of a conjecture of F. Nevanlinna concerning functions which have deficiency sum two*, Acta Math. 158 (1987), no. 1-2, 1–94.

[3] D. Drasin and A. Weitsman, *Meromorphic functions with large sums of deficiencies*, Advances in Math. 15 (1975), 93–126.

[4] A. Eremenko, *Meromorphic functions with small ramification*, Indiana Univ. Math. J. 42 (1993), no. 4, 1193–1218.

[5] A. Eremenko, *Holomorphic curves omitting five planes in projective space.* Amer. J. Math. 118 (1996), no. 6, 1141–1151.

[6] S. Hellerstein and J. Williamson, *Entire functions with negative zeros and a problem of R. Nevanlinna*, J. Analyse Math. 22 (1969), 233–267.

[7] S. Lang, *Introduction to Complex Hyperbolic Spaces*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1987.

[8] K. Yamanoi, *Zeros of higher derivatives of meromorphic functions in the complex plane*, Proc. London Math. Soc. 106 no. 4 (2013), 703–780.

[9] K. Yamanoi, *On a reversal of the second main theorem for meromorphic functions of finite order*, The proceedings of the 19th ICFIDCAA "Topics in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis", (2013), 75–83.

[10] K. Yamanoi, *Kobayashi Hyperbolicity and Higher-dimensional Nevanlinna Theory*, Geometry and Analysis on Manifolds, Progress in Mathematics, Vol. 308, (2015) 209–273, Springer.

[11] K. Yamanoi, *On strong second main theorem type conjecture in higher dimensional Nevanlinna theory*, RIMS Kôkyûroku 2120 (2019) 228-237

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan

E-mail address: yamanoi@math.sci.osaka-u.ac.jp