幾何解析の問題[1]

— 山辺不変量の問題 —

芥川 和雄 (中央大学・理工学部)
Kazuo Akutagawa (Chuo University)

1 序:定義 — 山辺の問題/山辺計量/山辺定数/山辺不変量 —

「幾何解析の問題」というテーマはあまりにも幅広いので，本稿で紹介するのは著者が研究してきた山辺不変量およびそれに関連する問題に限ることにさせて頂く[2].

本節では先ず，閉可微分多様体の山辺不変量および関連する諸定義・諸性質に関して，基本的な事項を簡単に解説する.

Einstein-Hilbert 汎関数　n 次元 $(n \geq 3)$ 閉可微分多様体 M 上のリーマン計量全体の空間を $\mathcal{M}(M)$ と表し，その上で正規化された Einstein-Hilbert 汎関数 (i.e., 正規化された全スカラー曲率汎関数)

$$E : \mathcal{M}(M) \to \mathbb{R}, \quad g \mapsto \frac{\int_M R_g d\mu_g}{V_g^{(n-2)/n}}$$

を考えよう[3]. ここで，$R_g, d\mu_g, V_g$ はそれぞれ g のスカラー曲率，体積測度，および (M, g) の体積を表す. よく知られているように，この汎関数の臨界点は **Einstein 計量**である. この汎関数から M の微分位相不変量を構成することを考えるのであるが，3 次元以上の任意のコンパクト可微分多様体 M に対して，次のことが知られている.

$$\inf_{g \in \mathcal{M}(M)} E(g) = -\infty, \qquad \sup_{g \in \mathcal{M}(M)} E(g) = +\infty.$$

山辺定数　M 上の各共形類 C 上に汎関数 E を制限して[4] 下限を考えると，その値はつねに有限であることが知られている. この値 $Y(M, C)$ は共形多様体 (M, C) の共形不変量で，**山辺定数**

$$Y(M, C) := \inf_{g \in C} E(g)$$

と呼ばれる.

Aubin の不等式　山辺定数に関する普遍的な上からの評価は，Aubin [Au1] による次の不等式

$$Y(M, C) \leq E(g_S) = n(n-1) \cdot \mathrm{Vol}(S^n, g_S)^{2/n} =: \mathbf{Y}_n$$

[1]本研究は，科学研究費・基盤研究 (B), JSPS, No. 18H01117 の援助を受けている.
[2]第 2 節以降で紹介する問題は限られたものであり，その他の問題については [Ak3] を参照して頂きたい.
[3]汎関数 E の分母は，E を scale 不変にするための項である.
[4]制限 $E|_C$ は**山辺汎関数**と呼ばれる.

が基本的である．また $(S^n,[g_S])$ に対しては，$E|_{[g_S]}$ の最小値は g_S で与えられることも Aubin によって示されている．すなわち，

$$Y(S^n,[g_S])=E(g_S)$$

である．ここで，$[g_S]$ は計量 g_S の共形類を表す．

山辺の問題　山辺定数を実現するリーマン計量 $\check{g}\in C$ (**山辺計量**と呼ばれる) の存在問題は**山辺の問題**と呼ばれる．C 上の汎関数 $E|_C$ の臨界点は，定スカラー曲率の計量 (以後，**csc 計量**と略) である．特に $E|_C$ の minimizer $\check{g}\in C$ が存在すれば，そのスカラー曲率は

$$R_{\check{g}}=Y(M,C)\cdot V_{\check{g}}^{-2/n}\equiv \mathrm{const.}$$

となる．山辺の問題は，山辺 [Y] により始まり，Trudinger [T]，Aubin [Au1]，Schoen [S1, S2] (cf. [SY1]) 等によって肯定的に解決された [5]．証明は，$Y(M,C)<\mathbf{Y}_n$ の場合と，$Y(M,C)=\mathbf{Y}_n$ の場合に分けて行われるが，後者の証明は Positive Mass Theorem を用いる真に大域幾何的なものである．

山辺不変量　意味のある不変量を構成するために，汎関数 E の第 2 変分を考察することが重要であり，結果として汎関数 E の臨界点である Einstein 計量はつねに saddle point であることが分かっている．汎関数の saddle point を求める指導原理に min-max 法があることに注意して，小林治 [K1] と Schoen [S2] は，**山辺不変量**と呼ばれる M の微分位相不変量

$$Y(M):=\sup_{C\in\mathcal{C}(M)}\left(\inf_{g\in C}E(g)\right)\leq \mathbf{Y}_n$$

を独立に定義した (3 次元の場合は，単に位相不変量である) [6]．ここで $\mathcal{C}(M)$ は，M 上の共形類全体を表す．山辺不変量の定義と Aubin の不等式により，$Y(S^n)=\mathbf{Y}_n$ である．山辺不変量の正負に関して，

$$Y(M)>0 \quad\Longleftrightarrow\quad \exists g\in\mathcal{M}(M)\ \ \text{s.t.}\ \ R_g>0\ \ \text{on}\ \ M$$

であることが容易に分かる．山辺不変量の上からの評価は，各山辺定数を上から一様に評価することで得られる．また山辺不変量の下からの評価は，適切な標準的共形類 (またはその族) の山辺定数を下から評価することによってなされる [7]．

山辺計量の判定/一意性　前述の通り，**山辺計量は csc 計量**である．逆に，「**csc 計量 g は山辺計量であるか？**」と言う問いが直ちに生じ，この問題は山辺定数の計算，最終的には山辺不変量の下からの評価において非常に重要である．ここで汎関数 E は scale 不変なので，$\check{g}$ が山辺計量ならば，その scaling $\lambda\cdot\check{g}$ も山辺計量であることに注意する．よって山辺計量の一意性問題は，例えば $C_1:=\{g\in C\mid V_g=1\}$ 内に制限した場合に意味を持つ．特に，$Y(M,[g])\leq 0$ の場合には次が成立する．

非正 csc 計量の一意性　C を $Y(M,C)\leq 0$ となる共形類とする．このとき，$C_1:=\{g\in$

[5] 全体を通しての解説としては，[Au2], [KAI], [LP], [SY2] 等がある．
[6] 4 次元以上の場合は，必ずしも位相不変量とはならない．
[7] 山辺不変量に関しては，[Ak3], [AK] などの解説がある．

$C \mid V_g = 1\}$ 内で csc 計量は一意的である．よって特に，C 内の csc 計量は山辺計量である．

$Y(M, [g]) > 0$ の場合には，csc 計量は必ずしも山辺計量ではない．また，$[g]_1$ 内の山辺計量の一意性も一般に成立しない．このことが，正の山辺不変量の研究の困難さの主な原因の一つとなるのである．現在知られている正の場合の山辺計量の判定法で，**小畠の定理**と呼ばれる下記のものは非常に有効である．

小畠の定理 ([O1], [O2], cf. [S2]) Enistein 計量 g は山辺計量である．さらに $(M^n, [g])$ が $(S^n, [g_S])$ に共形同値でないとすると，g は $[g]$ 内の (scaling を除いて) 唯一の csc 計量である．したがって，g は $[g]$ 内の (scaling を除いて) 唯一の山辺計量でもある．

謝辞　この場を借りて，研究集会「複素幾何学の諸問題 II」で講演の機会を与えて頂きました東京大学の平地健吾先生，高山茂晴先生，および組織員の皆さまに感謝の気持ちを表したいと思います．

2　山辺計量・山辺不変量の問題

山辺不変量に関する基本的問題は二つあり，そのうちの一つは下記のものである．

基本問題 1 ★★★ [8]　$\boxed{\text{山辺不変量} Y(M) \text{を上下から評価し，その値を決定すること．}}$

上記で特に，$Y(M, [h]) = Y(M)$ となるような標準的山辺計量 h [9]を特定することは重要なことである．

- 上からの評価は，各山辺定数 $Y(M, [g])$ $(\forall g \in \mathcal{M}(M))$ を上から一様に評価することで得られる．方法としては，**指数定理** (**α-不変量**，**SW-不変量**，**Gursky-LeBrun の共形的手法**) および**逆平均曲率流の手法**，**リッチフロー**などを使う．これらの手法によって，多くの 3 次元および 4 次元閉多様体に対して，それらの山辺不変量の値が特定された．特に非正の 3 次元閉多様体の山辺不変量の値は (原理的に) 完全に決定された．
- 下からの評価は，適切な標準的共形類 (またはその族) の山辺定数を下から評価することによって与えられる．そのため次の問題が重要となる [10]．

問題 1.1 (山辺計量の判定/一意性の問題) ★★　(正の) csc 計量はいつ山辺計量であるか．その判定法を具体的に与えよ．

次はその (数少ない) 判定法である．

Aubin の不等式より　g が山辺計量ならば，次が成立する．

$$E(g) \leq E(g_S) = n(n-1) \cdot V_{g_S}^{2/n}.$$

[8]本項で述べる問題は，筆者にとってどれも難しく，よって難易度はほとんどが ★★★ または ★★ となっている．

[9]この様な山辺計量は，**supreme 山辺計量**と呼ばれる ([L3])．もちろん supreme 山辺計量は必ず存在するとは限らず，存在しない様な閉多様体も知られている．

[10]第 1 節でも説明したが，再度記述する．

$E|_C$ の第 2 変分より　g が山辺計量ならば，次が成立する．

$$\lambda_1(-\Delta_g) \geq \frac{R_g}{n-1}.$$

ここで，$-\Delta_g$ は g の (非負) ラプラス作用素，$\lambda_1(-\Delta_g)$ は $-\Delta_g$ の (非ゼロ) 第 1 固有値を表す．

小畠の定理より　Einstein 計量 g は山辺計量である．さらに，$(M^n, [g])$ と $(S^n, [g_S])$ が共形同値でないならば (特に，$E(g) < E(g_S)$ も得られる)，g は $[g]$ 内の一意 csc 計量である (up to rescaling)．

Böhm-Wang-Ziller の定理より ([BWZ])　g_0 は，$E(g_0) < E(g_S)$ となる Einstein 計量とする．g_0 の (C^2 級の意味で) 十分近くの任意の csc 計量は山辺計量である．

下記は問題 1.1 に関する典型的な問題で，これを解決することで問題 1.1 に何らかの指針を与えると思われる．

問題 1.2 ★★　$Y(S^2 \times S^2)$ の値を決定せよ．特に，$Y(\mathbb{C}P^2) = 12\sqrt{2}\pi$ との大小関係を決定せよ．

問題 1.2 に関して知られている事実は下記のとおりである．

- g_r $(r \geq 1)$ を $S^2(1) \times S^2(r)$ 上の標準的直積 csc 計量とする．g_1 は Einstein 計量であるので，Böhm-Wang-Ziller の定理より，ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して，g_r $(1 < \forall r < 1 + \varepsilon_0)$ は山辺計量となる．ここで，$S^2(r)$ は $\mathbb{R}^3$ 内の原点中心 半径 r の 2 次元球面を表す．
- $E|_{[g_r]}$ の第 2 変分より，任意の $r > \sqrt{2}$ に対して，g_r は山辺計量ではないことが分かる．
- LeBrun の定理 ([L2]) より，$Y(\mathbb{C}P^2) = Y(\mathbb{C}P^2, [g_{FS}]) = 12\sqrt{2}\pi$ である．また，$E(g_{\sqrt{2}}) = 12\sqrt{2}\pi$ である．これが，$Y(\mathbb{C}P^2)$ と $Y(S^2 \times S^2)$ を比較する理由である．ここで，g_{FS} は $\mathbb{C}P^2$ 上の Fubini-Study 計量を表す．
- 芥川-Florit-Petean の定理 ([AFP]) より，次が分かる．

$$Y(S^2 \times S^2) \geq Y(S^2 \times \mathbb{R}^2, [g_S + g_{\mathbb{E}}]).$$

ここで，$g_{\mathbb{E}}$ はユークリッド計量を表す．またここで，$S^2 \times \mathbb{R}^2$ は非コンパクトであることに注意する．閉リーマン多様体 (M, g) に対しては，$\widetilde{g} = u^{4/n-2} \cdot g \in [g]$ $(u > 0)$ に対して，

$$E(\widetilde{g}) = \frac{\int_M \left(\alpha_n |\nabla u|^2 + R_g u^2\right) d\mu_g}{\left(\int_M u^{2n/(n-2)} d\mu_g\right)^{(n-2)/n}} =: Q_{(M,g)}(u), \quad \alpha_n := \frac{4(n-1)}{n-2} > 0$$

と書き直すことができる．そこで開リーマン多様体 (X^n, h) に対しても，$(X, [h])$ の共形不変量である山辺定数 $Y(X, [h])$ を下記の様に一般化して定義する．

$$Y(X, [h]) := \inf\{Q_{(X,h)}(f) \mid f \in C_0^\infty(X),\ f \not\equiv 0\} \in [-\infty, \mathbf{Y}_n].$$

X がコンパクトでないので，一般に $Y(X, [h]) > -\infty$ は保証されない．ただし，
$Y(S^2 \times \mathbb{R}^2, [g_S + g_{\mathbb{E}}]) > 0$ であることは容易に分かる．

問題 1.3 ★　$Y(S^2\times\mathbb{R}^2,[g_S+g_{\mathbb{E}}])$ の値を決定せよ．または，効果的な下からの評価を与えよ．

次に多様体の連結和および gluing などの手術と山辺不変量に関する問題を述べる．次は小林の山辺不変量に関する連結和公式で，最適な不等式である．

小林の連結和公式 ([K1])

$$Y(M_1^n\#M_2^n)\geq\begin{cases}-(|Y(M_1^n)|^{n/2}+|Y(M_2^n)|^{n/2})^{2/n} & \cdots\ Y(M_1^n),Y(M_2^n)\leq 0,\\ \min\{Y(M_1^n),Y(M_2^n)\} & \cdots\ \text{otherwise}\end{cases}$$

これを部分多様体に沿った gluing manifold に一般化したのが次のものである．山辺不変量が非正の場合には，それは最適な不等式を与える．

Petean-Yun の手術公式 ([PY])　W は M_1^n かつ M_2^n 内の k 次元部分多様体でその法バンドルがそれぞれ自明なものとする．$M_{1,2}^W:=M_1^n\bigcup_W M_2^n$ は，W に沿った M_1^n と M_2^n の gluing manifold を表す．$k\leq n-3$ を仮定する．このとき，次が成立する．

$$Y(M_{1,2}^W)\geq\begin{cases}-(|Y(M_1^n)|^{n/2}+|Y(M_2^n)|^{n/2})^{2/n} & \cdots\ Y(M_1^n),Y(M_2^n)\leq 0,\\ Y(M_1^n) & \cdots\ Y(M_1^n)\leq 0,Y(M_2^n)>0.\end{cases}$$

山辺不変量が正の場合に，小林の連結和公式の拡張を試みたものが次のものである．

Ammann-Dahl-Humbert の手術公式 ([ADH])　$k\leq n-3$，$Y(M_1^n),Y(M_2^n)>0$ を仮定する．このとき，ある正定数 $\Lambda_{n,k}>0$ が存在して，次が成立する．

$$Y(M_{1,2}^W)\geq\min\{Y(M_1^n),Y(M_2^n),\Lambda_{n,k}\}.$$

上記の $\Lambda_{n,k}$ は定性的に定義されていて，計算可能な量ではない．

問題 1.4 ★★　$k\leq n-3,Y(M_1^n),Y(M_2^n)>0$ の場合，山辺不変量 $Y(M_{1,2}^W)$ に対する効果的な手術公式を与えよ．例えば，次の不等式は成立するか？

$$Y(M_{1,2}^W)\geq\min\{Y(M_1^n),Y(M_2^n),Y(S^{n-k-1}\times\mathbb{R}^{k+1},[g_S+g_{\mathbb{E}}])$$

- 上記で $k=0$ の場合，$M_{1,2}^W=M_1^n\#M_2^n$ かつ $Y(S^{n-1}\times\mathbb{R},[g_S+dt^2])=Y(S^n)$ となり，小林の連結和公式より，上記の不等式は成立している．

第 2 節の最後として，低次元 (3 次元・4 次元) 閉多様体の山辺不変量に関する問題を述べる．

$\boxed{\dim\mathrm{M}=4\text{ の場合}}$

LeBrun, Gursky-LeBrun の定理 ([L2], [GL])

(1) $Y(\mathbb{C}P^2\#\ell(S^3\times S^1))=Y(\mathbb{C}P^2)=12\sqrt{2}\ (\forall\ell\geq 1)$
(2) $Y(\#k\mathbb{C}P^2\#\ell(S^3\times S^1))\leq 4\sqrt{2k+16}\,\pi\ (k=2,3,\forall\ell\geq 1)$

この結果の下，関連する問題として次の様な問題が生じる．

問題 1.5 ★★
(1) $Y(\#k\mathbb{C}P^2)=Y(\mathbb{C}P^2)$ or $>Y(\mathbb{C}P^2)$? $(\forall k\geq 2)$
(2) $Y(\mathbb{C}P^2\#\ell\overline{\mathbb{C}P^2})=Y(\mathbb{C}P^2)$ or $>Y(\mathbb{C}P^2)$? $(\forall\ell\geq 1)$
(3) $Y(K3\,$曲面$\#\overline{K3\,\text{曲面}})=0$ or >0 ?

(3) に関連した結果としては，下記がある．

Stolz の定理 ([St]) M を 5 次元以上の単連結スピン閉多様体で，その α-不変量が $\alpha(M)=0$ となるものとする．このとき，$Y(M)>0$ である．

問題 1.6 ★★ (cf. [S2]) $\mathbb{H}^4/\Gamma$ を実 4 次元双曲空間のコンパクト商とする．また，$g_{\mathbb{H}}$ はその上の双曲計量とする．このとき，次は成立するか？

$$Y(\mathbb{H}^4/\Gamma)=Y(\mathbb{H}^4/\Gamma,[g_{\mathbb{H}}])=-12\cdot\mathrm{Vol}(\mathbb{H}^4/\Gamma,g_{\mathbb{H}})^{1/2}$$

これに関連したものとしては，SW-不変量を使った下記の結果がある．

LeBrun の定理 ([L1]) $\mathbb{C}H^2/\Gamma$ を複素 2 次元双曲空間のコンパクト商とする．また，g_B はその上の Bergman 計量とする．このとき，次が成立する．

$$Y(\mathbb{C}H^2/\Gamma)=Y(\mathbb{C}H^2/\Gamma,[g_B])=-12\cdot\mathrm{Vol}(\mathbb{C}H^2/\Gamma,g_B)^{1/2}$$

dim M = 3 の場合

逆平均曲率の手法などを使い次が示された．

Bray-Neves, 芥川-Neves の定理 ([BN], [AN])

$$Y(\mathbb{R}P^3\#\ell(S^2\times S^1))=Y(\mathbb{R}P^3,[g_S])=Y(S^3)/2^{2/3}=6\cdot\pi^{4/3}\ (\forall\ell\geq 1)$$

$\mathbb{R}P^3=S^3/\mathbb{Z}_2$ であるが，小林によって次の問題が提出されている．

問題 1.7 ★★ ([K2], cf. [S2]) $C_k(\subset\mathrm{Isom}(S^3,g_S))$ を (fixed point free な) 位数 k の巡回部分群とする．このとき，

$$\lim_{k\to\infty}Y(S^3/C_k)=0\ \text{or}\ >0\ ?$$

さらに，$Y(S^3/\Gamma)=Y(S^3/\Gamma,[g_S])=Y(S^3)/|\Gamma|^{2/3}$ は成立するか？

山辺不変量が非正の場合には，次のことが成立する．

Perelman の定理 ([P1], [P2])　任意の $g \in \mathcal{M}(M^n)$ に対して，$\lambda_g, \bar{\lambda}_g, \bar{\lambda}(M)$ をそれぞれ以下の様に定義する．

$$\lambda_g := \inf_{u \neq 0} \frac{\int_M (R_g u^2 + 4|\nabla u|^2) d\mu_g}{\int_M u^2 d\mu_g}, \quad \bar{\lambda}_g := \lambda_g \cdot V_g^{2/n},$$

$$\bar{\lambda}(M) := \sup_{g \in \mathcal{M}(M)} \bar{\lambda}_g \ : \ \text{Perelman の} \bar{\lambda}\text{−不変量}.$$

$\bar{\lambda}(M) \leq 0$ のとき，$\bar{\lambda}_g$ はリッチフローで単調非減少．

さらに次の結果が成立する．

小林, Perelman-Anderson, 芥川-石田-LeBrun の結果 ([K2], [P1], [P2], [An], [AIL])

$$\bar{\lambda}(M) = \sup_{g \in \mathcal{M}(M)} (\min_M R_g \cdot V_g^{2/n}) = \begin{cases} Y(M) & \cdots \text{ if } \ Y(M) \leq 0, \\ +\infty & \cdots \text{ if } \ Y(M) > 0. \end{cases}$$

特に 3 次元の場合は，下記が得られる．

$$Y(\mathbb{H}^3/\Gamma) = Y(\mathbb{H}^3/\Gamma, [g_{\mathbb{H}}]) = -6 \cdot \mathrm{Vol}(\mathbb{H}^3/\Gamma, g_{\mathbb{H}})^{2/3}.$$

さらに，$Y(M^3) \leq 0$ となる 3 次元閉多様体 M^3 は完全に分類され，それらの山辺不変量も完全に決定されている．

3　特異空間上の山辺の問題・山辺計量

山辺不変量に関する基本的問題のもう一つは，下記のものである．

基本問題 2 ★★★　$Y(M, [h]) = Y(M)$ となる (一般には特異点を持つ) 山辺計量 h は存在するか？　存在すれば，それは Einstein 計量か？[11]

$Y(M, [h]) = Y(M)$ となる (滑らかな)Einstein 計量 h は **supreme Einstein 計量** ([L3]) と呼ばれ，存在すればこの Einstein 計量 h が M 上の一つの best 計量と言ってよいであろう．h が計量列の極限として得られ特異点を持つ場合には，一般に "M" も特異点を持つ多様体となりトポロジーも元の M とは異なる場合がある．

このような h を求めるための (ナイーブな) アプローチとして，例えば次が考えられる：「体積 1 で $Y(M, [\check{g}_j]) \nearrow Y(M)$ となる "適切な " 山辺計量の列 $\{\check{g}_j\}$ を選出し，その極限 $\lim (M, \check{g}_j)$ を解析すること．」

- $Y(M) > 0$ の場合は，この様な $\{(M, \check{g}_j)\}$ はコンパクト距離空間全体の成す空間の中でコンパクトであることが知られている ([Ak1])．

しかしこの設定では，列 $\{\check{g}_j\}$ の極限 (の存在を仮定した場合の) $\lim (M, \check{g}_j)$ の正則性のに関して，上記の基本問題に対する有効な結果をほとんど得られない．そこで次の新しい戦術を考える．

[11] $Y(M, [h]) = Y(M) \leq 0$ の場合，(滑らかな) 計量 h は Einstein 計量であることが知られている．

<u>新プログラム</u>　体積1で$Y(M,[h_j]) \nearrow Y(M)$となる"適切な"<u>特異点を持つ Einstein 計量の列 $\{h_j\}$</u>を選出し，その極限 $\lim(M,h_j)$ を解析せよ．

<u>Gursky, 芥川-遠藤-Seshadri の定理 ([G], [AES])</u>　g を S^4 上の正スカラー曲率を持つ Einstein 計量とする．ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して，

$$Y(S^4,[g]) > \frac{1}{\sqrt{3}} Y(S^4,[g_S]) - \varepsilon_0$$

を満たすならば，g は g_S と等長的である (up to rescaling)．

上記の結果は，少なくとも S^4 上では (滑らかな)Einstein 計量は孤立しており，$Y(S^4,[h_j]) \nearrow Y(S^4)$ となる非自明な Einstein 計量の列 $\{h_j\}$ は存在しないことを意味している [12]．

以上が，特異空間上で山辺の問題を考える背景である [13]．そのため適切な特異集合を持つコンパクトなリーマン多様体上で山辺の問題を考える必然性が提起されることになるのである．Einstein 計量は，たとえ特異点を持つとしても高い調和性を持つ計量で，admissible stratified spaces 上の特異 Einstein 計量は (特異) 山辺計量でもある事が知られている ([M1], [M2])．特異 Einstein 計量の列 $\{h_j\}$ の極限の正則性を示すのも，最小限度の仮定で十分と期待される [14]．しかし，現段階において列 $\{h_j\}$ の選出法の理論があるわけではない [15]．

そこで先ず，モデルケースとして $M = S^n$ の場合を考えるのである．

<u>**問題 2.1**</u> (解決済み)　S^n 上の特異 Einstein 計量族 $\{h_j\}$ で $Y(S^n,[h_j]) \nearrow Y(S^n)$ となるものを見つけ，その極限 $\lim(S^n,h_j)$ を解析せよ．

先ずは，S^n 上の標準的 edge-cone Einstein(特異) 計量について解説する．

<u>**定義 2.1.**</u> (S^n 上の標準的 edge-cone Einstein 計量 [AL])　S^n 上に座標を与え，標準計量 g_S を以下の様に記述する．

$$S^n - (S^{n-2} \sqcup S^1) = (0,\frac{\pi}{2}) \times S^1 \times S^{n-2} \ni (r,\theta,x), \qquad g_S = dr^2 + \sin^2 r\, d\theta^2 + \cos^2 r \cdot g_{S^{n-2}} =: h_1$$

このとき，$\beta > 0$ に対して，<u>(S^n, S^{n-2}) 上の cone angle $2\pi\beta$ の標準的 edge-cone 計量 h_β</u> を以下で定義する．

$$h_\beta := dr^2 + \beta^2 \sin^2 r\, d\theta^2 + \cos^2 r \cdot g_{S^{n-2}}$$

h_β は h_1 に局所的に等長なので，$S^n - S^{n-2}$ 上で定曲率 1 のリーマン計量となり，特に Einstein 計量である．$\beta \neq 1$ のとき，h_β は S^{n-2} 上特異で，その近傍で S^{n-2} 上で角度 $2\pi\beta$ の truncated cone $(S^1 \times [0,1])/(S^1 \times \{0\})$ をファイバーとするファイバー空間に近似的に等長である．これが **edge-cone 計量**と呼ばれる由来で，今の場合 S^{n-2} が edge である．

[12] これは，S^3 上でも同様である．

[13] 本稿で扱う特異空間は，edge-cone 計量を持つ edge-cone 空間に話題を限る．さらに一般の特異空間に関しては [ACM1], [ACM3] を参照のこと．

[14] この新しい方向の研究に関しては，[Ak4], [Ak5], [AM2] を参照．

[15] Fano 多様体に関しては，特異ケーラー Einstein 計量の標準的選出法がある ([D], [CDS], [JMR])．

このような edge-cone 計量を持つ特異空間は，simple edge 空間 (さらには iterated edge 空間) と呼ばれる特異空間の特別な場合となっている (cf. [ACM1])．

つぎに一般の edge-cone 計量の定義 ([AL]) を与える．

定義 2.2. (**edge-cone 計量/edge-cone 空間**) M を n 次元閉多様体とし，$\Sigma \subset M$ を $(n-2)$ 次元の埋め込まれた C^∞ 級閉部分多様体とする．任意の点 $x_0 \in \Sigma$ に対して，x_0 まわりの Σ の座標管状近傍 $\{U, (x^1, x^2, x^3, \cdots, x^n)\}$ で $\Sigma \cap U = \{x^1 = x^2 = 0\}$ となるものを取ることができる．またこの座標に付随した横断的極座標 $(\rho, \theta, x^3, \cdots, x^n)$ を $x^1 = \rho\cos\theta, x^2 = \rho\sin\theta$ とおくことにより与える．いま正定数 $\beta > 0$ を任意にとり固定する．特異計量 g が(M, Σ) **上の cone angle** $2\pi\beta$ **の edge-cone 計量**であるとは，M 上 C^0 級かつ $M - \Sigma$ 上 C^∞ 級のリーマン計量で，各点 $x_0 \in \Sigma$ に対して適切な横断的極座標近傍 $\{U, (x^1 = \rho\cos\theta, x^2 = \rho\sin\theta, x^3, \cdots, x^n)\}$ が取れ，g が $U - \Sigma$ 上次のように表されるときに言う：

$$g = \bar{g} + \rho^{1+\kappa}\mathcal{E}, \quad \bar{g} = d\rho^2 + \beta^2\rho^2\, d\theta^2 + (\Phi^* p)_{ij},$$

$$\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{AB}) \,:\, \text{infinite conormal regular along } \Sigma.$$

ここで，$\kappa > 0$ は正定数，p は Σ 上の C^∞ 級リーマン計量，$\Phi : U \to \Sigma \cap U$ は自然な射影である．また添え字に関しては，$3 \leq i, j \leq n,\ \ 1 \leq A, B \leq n$ である．(以下，$0 < \kappa < 1$ とする．) このとき，組 (M, Σ, g) を **edge-cone 空間**と呼ぶ [16]．$\Omega := M - \Sigma$ および Σ は，それぞれ (M, Σ, g) の **regular part/singular part** である．

edge-cone 空間の山辺定数・山辺の問題：

(1) edge-cone 空間 (M, Σ, g) の**山辺定数** $Y(M, [g])$ [17] を次の様に定義する．

$$Y(M, [g]) := Y(\Omega, [g]) = \inf\{Q_{(\Omega, g)}(u) \mid u \in C_0^\infty(\Omega),\ u \not\equiv 0\} \in (-\infty, Y(S^n)].$$

(2) edge-cone 空間 (M, Σ, g) の**局所山辺定数** $Y_\ell(M, [g])$ を以下で定義する．

$$Y_\ell(M, [g]) := \inf_{p \in \Omega} \lim_{r \searrow 0} Y(\Omega \cap B_r(p; g), [g]) \in (-\infty, Y(S^n)].$$

ここで，$B_r(p; g)$ は計量 g に関する中心 p 半径 r の測地閉球体を表す．

- $p \in \Omega$ のとき，$\lim_{r\searrow 0} Y(\Omega \cap B_r(p; g), [g]) = Y(S^n)$ であることが分かる．このことと定義より，局所山辺定数 $Y_\ell(M, [g])$ は singular part Σ の無限小近傍にのみ依存して決定されることが分かる．

以下，edge-cone 空間の山辺定数・山辺の問題に関する基本的結果を述べる．

Aubin の不等式の一般化 ([ACM1]) (M, Σ, g) を edge-cone 空間とする．このとき，次が成立する．

(1) $0 < Y_\ell(M, [g]) \leq Y(S^n)$.

[16] edge-cone 空間の underlying manifold M は，多様体としては滑らかな多様体で，特異点はない．
[17] この場合，$Y(M, [g]) > -\infty$ であることが分かる．

(2)　$Y(M,[g]) \le Y_\ell(M,[g])$ $\cdots$ **一般化された Aubin の不等式** [18]

- $Y_\ell(S^n,[h_\beta]) = Y(S^n,[h_\beta])$ であることが容易に分かる．この値は，下記の Mondello の定理により決定された．

edge-cone 空間上の山辺の問題の解 ([ACM1])　(M,Σ,g) を edge-cone 空間で，$Y(M,[g]) < Y_\ell(M,[g])$ を満たしているとする．このとき，次が成立する．

$$\exists u \in C^\infty_{>0}(\Omega) \cap W^{1,2}(M) \cap L^\infty(M) \quad \textbf{s.t.} \quad \inf_M u > 0, \ \ ||u||_{L^{2n/n-2}} = 1,$$

$$Q_{(\Omega,g)}(u) = Y(M,[g]), \qquad \underline{-\alpha_n \Delta_g u + R_g u = Y(M,[g]) \cdot u^{\frac{n+2}{n-2}} \quad \text{on} \quad \Omega.}$$

正則性定理 ([ACM1], [ACM2])　(M,Σ,g) を edge-cone 空間とする．$u \in C^\infty_{>0}(\Omega) \cap W^{1,2}(M) \cap L^\infty(M)$ を山辺の問題の解とする．このとき，$\check{g} := u^{4/n-2} \cdot g$ は再び edge-cone 計量である．

Mondello の定理 ([M1], [M3], cf. [ACM1])

$$Y(S^n,[h_\beta]) = \begin{cases} \beta^{2/n} \cdot Y(S^n) & \cdots \ 0 < \beta \le 1, \\ \qquad Y(S^n) & \cdots \ \beta > 1. \end{cases}$$

さらに，$0 < \beta \le 1$ のとき，h_β は S^n 上の edge-cone“山辺計量”である．
また，$\beta > 1$ のとき，h_β は S^n 上の edge-cone“山辺計量”ではない．

問題 2.1 の解答　S^n 上の特異 Einstein 計量の族 $\{h_\beta\}_{0<\beta<1}$ が問題 2.1 の解答を与えるのであるが，特に $\beta \nearrow 1$ のとき，次を満たす．

$$h_\beta \ \to \ h_1 = g_S \quad \text{on} \quad C^0(S^n) \cap C^\infty(S^n - S^{n-2}),$$

$$Y(S^n,[h_\beta]) = \beta^{2/n} \cdot Y(S^n) \ \nearrow \ Y(S^n,[g_S]) = Y(S^n).$$

$\boxed{\text{QED}}$

edge-cone 山辺計量の非存在 ([AM1])　$\beta \ge 2$ のとき，$(S^n,[h_\beta])$ 上の edge-cone “山辺計量”は存在しない．

問題 2.2 ★　$1 < \beta < 2$ に対しても，上記と同様に非存在を示せ．

問題 2.3 ★★★　S^n 以外の M 上で，$Y(M,[g_\beta]) \nearrow Y(M)$ $(\beta \nearrow 1)$ となる edge-cone Einstein 計量の族 $\{g_\beta\}$ を構成し，その極限 $\lim{(M,g_\beta)}$ を解析せよ [19]．

- cone angle $2\pi\beta\,(0 < \beta < 1)$ の edge-cone Einstein 計量は，山辺計量であることが知られている ([M2])．

[18] 局所山辺定数やこの不等式はかなり一般の特異空間に対して一般化される ([ACM1], [ACM3])．またオービフォールドのような単純な特異空間の局所山辺定数は，具体的に計算できる ([Ak2], cf. [AB])．
[19] Fano Kähler 多様体に関しては，[D], [CDS], [JMR] を参照せよ．

edge-cone 計量 g は特異計量なので，その山辺定数 $Y(M,[g])$ と，滑らかな計量を使って定義される本来の (smooth な) 山辺不変量 $Y(M)$ との関係は自明ではない．本稿の最後として，edge-cone Einstein 計量の存在が山辺不変量の下からの評価に有効であることをみる．

<u>edge-cone Einstein 計量の応用 ([Ak4], [Ak5], cf. [AM2])</u>　g_β を M^n 上の正スカラー曲率の cone angle $2\pi\beta\,(0<\beta<1)$ の edge-cone Einstein 計量とする．このとき，次の下からの評価が成立する．

$$Y(M) \geq Y(M,[g_\beta]) = R_{g_\beta} \cdot V_{g_\beta}^{2/n}.$$

参考文献

[Ak1] K. Akutagawa, *Yamabe metrics of positive scalar curvature and conformally flat manifolds*, Diff. Geom. Appl. **4** (1994), 239–258.

[Ak2] K. Akutagawa, *Computations of the orbifold Yamabe invariant*, Math. Z. **271** (2012), 611–625.

[Ak3] K. Akutagawa, *The Yamabe invariant*, Amer. Math. Soc. Transl., Sugaku Expositions **34** (2021), 1–34.

[Ak4] 芥川和雄,「Edge-cone Einstein 計量と山辺不変量」, **第 63 回幾何学シンポジウム基調講演要旨** (於　岡山大学), 101–113, 2016.

[Ak5] K. Akutagawa, *Edge-cone Einstein metrics and the Yamabe invariant*, "Analysis, Geometry and Topology of Positive Scalar Curvature Metrics 2017", Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Report No. **36**/2017.

[AB] K. Akutagawa and B. Botvinnik, *Yamabe metrics on cylindrical manifolds*, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), 259–333.

[ACM1] K. Akutagawa, G. Carron and R. Mazzeo, *The Yamabe Problem on stratified spaces*, Geom. Funct. Anal. **24** (2014), 1039–1079.

[ACM2] K. Akutagawa, G. Carron and R. Mazzeo, *Hölder regularity of solutions for Schrödinger operators on stratified spaces*, J. Funct. Anal. **269** (2015), 815–840.

[ACM3] K. Akutagawa, G. Carron and R. Mazzeo, *The Yamabe problem on Dirichlet spaces*, Tsinghua Lectures in Mathematics (edited by L. Ji, Y.-S. Poon and S.-T. Yau), Adv. Lect. in Math. **45**, International Press, 2019, pp. 101–122.

[AES] K. Akutagawa, H. Endo and H. Seshadri, *A gap theorem for positive Einstein metrics on the four-sphere*, Math. Ann. **373** (2019), 1329–1339.

[AFP] K. Akutagawa, L. A. Florit and J. Petean, *On Yamabe constants of Riemannian products*, Comm. Anal. Geom. **15** (2007), 947–969.

[AIL] k. Akutagawa, M. Ishida and C. LeBrun, *Perelman's invariant, Ricci flow, and the Yamabe invariants of smooth manifolds*, Arch. Math. (Basel) **88** (2007), 71–76.

[AK] 芥川 和雄, (協力 小林 治) 「山辺の問題と山辺不変量」, **幾何解析, 幾何学百科 II,** 朝倉書店 (2018).

[AM1] K. Akutagawa and I. Mondello, *Non-existence of Yamabe minimizers on singular spheres*, preprint 2019, arXiv:1909.09367v1.

[AM2] K. Akutagawa and I. Mondello, *Edge-cone Einstein metrics and the Yamabe invariant*, in preparation.

[AN] K. Akutagawa and A. Neves, 3*-manifolds with Yamabe invariant greater than that of* $\mathbb{RP}^3$, J. Differential Geom. **75** (2007), 359–386.

[ADH] B. Ammann, M. Dahl and E. Humbert, *Yamabe invariant and surgery*, J. Differential Geom. **94** (2013), 1–58.

[An] M. Anderson, *Canonical metrics on* 3*-manifolds and* 4*-manifolds*, Asian J. Math. **10** (2006), 127–163.

[AL] M. Atiyah and C. LeBrun, *Curvature, cones and characteristic numbers*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **155** (2013), 13–37.

[Au1] T. Aubin, *Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pures Appl. **55** (1976), 269–296.

[Au2] T. Aubin, *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*, **Springer Monographs in Math.**, Springer-Verlag, 1998.

[BWZ] C. Böhm, M. Wang and W. Ziller, *A variational approach for compact homogeneous Einstein manifolds*, Geom. Funct. Anal. **14** (2004), 681–733.

[BN] H. L. Bray and A. Neves, *Classification of prime* 3*-manifolds with Yamabe invariant greater than* $\mathbb{R}P^3$, Ann. of Math. **159** (2004), 407–424.

[CDS] X. Chen, S. Donaldson and S. Sun, *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. I: Approximation of metrics with cone singularities*, J. Amer. Math. Soc. **28** (2015), 183–197.

[D] S. Donaldson, *Kähler metrics with cone singularities along a divisor*, **Essays in Math. and Appl.**, P. A. Pardalos and T. M. Rasssias (eds.), 49–79, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

[G] M. Gursky, *Four-manifolds with* $\delta W^+ = 0$ *and Einstein constants on the sphere*, Math. Ann. **318** (2000), 417–431.

[GL] C. LeBrun and M. Gursky, *Yamabe invarints and Spin*^{c} *structures*, Geom. Funct. Anal. **8** (1998), 965–977.

[JMR] T. Jeffres, R. Mazzeo and Y. A. Rubinstein, *Kähler-Einstein metrics with edge singularities*, Ann. of Math. **183** (2016), 95–176.

[K1] O. Kobayashi, *Scalar curvature of a metric with unit volume*, **Math. Ann. 279** (1987), 253–265.

[K2] 小林 治, 「山辺の問題」, Seminar on Math. Sci. **16**, Keio Univ. (1990).

[KAI] 小林 治, 芥川 和雄, 井関 裕靖, 「山辺の問題」, 数学メモアール **7**, 日本数学会 (2013).

[L1] C. LeBrun, *Einstein metrics and Mostow rigidity*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 1–8.

[L2] C. LeBrun, *Yamabe constants and the perturbed Seiberg-Witten equations*, Comm. Anal. Geom. **5** (1997), 535–553.

[L3] C. LeBrun, *Einstein metrics and the Yamabe problem*, Trends in Mathematical Physics (Knoxville, TN, 1998), AMS/IP Stud. Adv. Math. **13**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 353–37.

[LP] J. Lee and T. Parker, *The Yamabe problem*, Bull. Amer. Math. Soc. **17** (1987), 37–91.

[M1] I. Mondello, *The Yamabe problem on staratified spaces*, Ph.D. Thesis, available at HAL Id: tel-01204671 (2015).

[M2] I. Mondello, *The local Yamabe constant of Einstein stratified spaces*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non linéaire **34** (2015), 249–275.

[M3] I. Mondello, *An Obata singular theorem for stratified spaces*, Trans. Amer. Math. **370** (2018), 4147–4175.

[O1] M. Obata *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere*, J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 333–340.

[O2] M. Obata *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **6** (1971), 247–258.

[P1] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv:math/0211159v1[math.DG], 2002.

[P2] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, arXiv:math/0303109v1 [math.DG], 2003.

[PY] J. Petean and G. Yun, *Surgery and the Yamabe invariant*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), 1189–1199.

[S1] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to a constant scalar curvature*, J. Differential Geom. **20** (1984), 479–495.

[S2] R. Schoen, *Variational theory for the totatl scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics*, Topics in calculus of variations (Montecatini Terme, 1987), 120-154, Lecture Notes in Math. **1365**, Springer-Verlag, 1989.

[SY1] R. Schoen and S.-T. Yau, *Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature*, Invent. Math. **92** (1988), 47–71.

[SY2] R. Schoen and S.-T. Yau, *Lectures on Differential Geometry*, **Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology I**, International Press, 1994.

[St] S. Stolz, *Simply connected manifolds of positive scalar curvature*, Ann. of Math. **136** (1992), 511–540.

[T] N. S. Trudinger, *Remarks conserning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **22** (1968), 265–274.

[Y] H. Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J. **12** (1960), 21–37.