

リーマン面に関連する位相幾何学の問題

Riemann 面の moduli 空間上の微分形式、函数、tensor 場について

Problems on topology around Riemann surfaces

On differential forms, functions and tensor fields on the moduli space of Riemann surfaces

河澄 響矢 (東京大学大学院数理科学研究科) *

Nariya Kawazumi (University of Tokyo)

種数 g の向きづけられた C^∞ 閉曲面を Σ_g と表す。本稿では $g \geq 2$ とする。点 $P_0 \in \Sigma_g$ および 0 でない接 vector $v_0 \in T_{P_0}\Sigma_g$ をとっておく。また、 $\Sigma_{g,1}$ を種数 g 向きづけられた連結コンパクト C^∞ 曲面であって連結な境界 $\partial\Sigma_{g,1}$ をもつものとする。 $\Sigma_{g,1}$ の基本群の基点として境界上の点 $*$ $\in \partial\Sigma_{g,1}$ をとる。点 $P_0 \in \Sigma_g$ において real oriented な blow-up を施して $\Sigma_{g,1}$ が得られ、 v_0 に対応する $\partial\Sigma_{g,1}$ 上の点 $*$ であると理解することもできる。種数 g コンパクト Riemann 面のモジュライ空間 \mathbb{M}_g つまり種数 g コンパクト Riemann 面 C の双正則同値類 $[C]$ 全体の空間は以下のような商空間と捉えることができる:

$$\mathbb{M}_g = \mathbb{J}^+(\Sigma_g)/\text{Diff}^+(\Sigma_g) = \mathcal{T}_g/\mathcal{M}_g. \quad (1)$$

ここで $\text{Diff}^+(\Sigma_g)$ は Σ_g の向きを保つ微分同相写像全体のなす位相群であり、 $\mathbb{J}^+(\Sigma_g)$ は向きづけられた C^∞ 曲面 Σ_g 上の正の向きの概複素構造全体の空間であり、群 $\text{Diff}^+(\Sigma_g)$ が明らかなやり方で作用している。また、位相群 $\text{Diff}^+(\Sigma_g)$ の単位連結成分 $\text{Diff}_0(\Sigma_g)$ による $\mathbb{J}^+(\Sigma_g)$ の商空間が Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_g := \mathbb{J}^+(\Sigma_g)/\text{Diff}_0(\Sigma_g)$ であり、ここには位相群 $\text{Diff}^+(\Sigma_g)$ の連結成分群である写像類群 $\mathcal{M}_g := \pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma_g)) = \text{Diff}^+(\Sigma_g)/\text{Diff}_0(\Sigma_g)$ が作用している。Teichmüller 空間 \mathcal{T}_g は可縮であって、そこへの写像類群 \mathcal{M}_g の作用は固有不連続であるから標数 0 の体である実数体 \mathbb{R} に係数をもつコホモロジー代数の同型

$$H^*(\mathbb{M}_g; \mathbb{R}) = H^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{R}) = H^*(B\text{Diff}^+(\Sigma_g); \mathbb{R}) \quad (2)$$

がなりたつ。Madsen-Weiss [32] によりこれらのコホモロジー代数は安定域 $* < 2g/3$ においては Mumford-Morita-Miller 類 (MMM 類) $e_i = (-1)^{i+1}\kappa_i \in H^{2i}(\mathbb{M}_g; \mathbb{R})$, $i \geq 1$, の生成する多項式代数に同型である

$$H^*(B\text{Diff}^+(\Sigma_g); \mathbb{R}) = \mathbb{R}[e_i; i \geq 1] \quad (* \leq 2g/3). \quad (3)$$

Madsen-Weiss による証明は代数トポロジーによるものである。そこで、

*東京大学大学院数理科学研究科, 〒153-8914, 東京都目黒区駒場 3-8-1, kawazumi@ms.u-tokyo.jp
本研究は科研費 (課題番号: 18KK0071, 20H00115, 19H01784, 18K03283) の助成を受けたものである。

問題 1 (*)**. ((2) と (3) を組み合わせた) 安定域における同型 $H^*(\mathbb{M}_g; \mathbb{R}) = \mathbb{R}[e_i; i \geq 1]$ を複素解析的ないしは微分幾何的に証明せよ。

ここで \mathbb{M}_g の上のコホモロジー類としての MMM 類 e_i の定義 [40, 35, 34] を復習する。 \mathbb{C}_g を \mathbb{M}_g 上のコンパクト Riemann 面の普遍族とする

$$\mathbb{C}_g := \coprod_{[C] \in \mathbb{M}_g} C / \text{Aut}(C) \xrightarrow{\pi} \mathbb{M}_g.$$

別の言い方をすると種数 g コンパクト Riemann 面 C と点 $P_0 \in C$ の組 (C, P_0) の双正則同値類 $[C, P_0]$ 全体の空間が \mathbb{C}_g である。点の忘却写像 $\pi : \mathbb{C}_g \rightarrow \mathbb{M}_g$ は V-バンドルである。その相対接束を $T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}$ とする。これは複素 V 直線束である。その Euler 類

$$e := c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}) \in H^2(\mathbb{C}_g; \mathbb{R})$$

の冪の fiber 積分として MMM 類は定義される

$$e_i := \int_{\text{fiber}} e^{i+1} \in H^{2i}(\mathbb{M}_g; \mathbb{R}), \quad i \geq 1.$$

例えば、任意の $i \geq 1$ について e_i の超楕円的ローカスへの制限は \mathbb{R} 上のコホモロジー類としては 0 である。この事実にはいろいろな証明がある。なお、写像類群の上で同様に考えると e_i は整数係数のコホモロジー類として定義される [35]。 e_i の超楕円的写像類群への制限はトーションとしては非自明である (詳しくは [20] およびそこで引用されている文献を参照)。なお、空間

$$T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}^\times := T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g} \setminus (0\text{-section})$$

は、種数 g コンパクト Riemann 面 C と点 $P_0 \in C$ および 0 でない接ベクトル $v \in T_{P_0}C$ の三つ組 (C, P_0, v) の双正則同値類 $[C, P_0, v]$ 全体の空間であるが、これは写像類群

$$\mathcal{M}_{g,1} := \pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma_{g,1}, 1_{\partial\Sigma_{g,1}} \text{ on } \partial\Sigma_{g,1}))$$

の分類空間である: $T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}^\times = B\mathcal{M}_{g,1}$. 実際、 $\mathcal{M}_{g,1}$ は torsion-free だからである。

さて、MMM 類の非安定的な振舞いについて考える。 $R_g \subset H^*(\mathbb{M}_g; \mathbb{R})$ を MMM 類 e_i , $i \geq 1$, たちの生成する $H^*(\mathbb{M}_g; \mathbb{R})$ の部分代数とする。実コホモロジー代数 $H^*(\mathbb{M}_g; \mathbb{R})$ ではなく Chow 環 $CH^*(\mathbb{M}_g)$ を考えるとき R_g は tautological ring と呼ばれる。また、その次数 $k \geq 0$ の成分を

$$R_g^k := R_g \cap H^{2k}(\mathbb{M}_g; \mathbb{R}) \quad \text{または} \quad R_g \cap CH^k(\mathbb{M}_g)$$

と表す。ここで外すことができないのは Faber 予想である。Faber 予想の文献としては [7] が引用されるが、もっと以前から言われていた。たとえば Looijenga [31] の序文には

On the basis of many calculations Carel Faber has made the intriguing conjecture that this ring has the formal properties of the even-dimensional cohomology ring of a projective manifold of dimension $g - 2$, i.e., satisfies Poincaré duality and a Lefschetz decomposition.

とある。(森田茂之先生から同様のお話をうかがった記憶がある。) Faber 予想のうち既に解決している部分として以下の結果がある。

- Looijenga [31]: $k > g - 2$ のとき $R_g^k = 0$ である。(とくに実数体上で $e_1^{g-1} = 0$ である。)
- Looijenga-Faber [31, 8]: $\dim R_g^{g-2} = 1$.
- Morita [38], Ionel [15]: R_g は $e_1, \dots, e_{[g/3]}$ によって生成され、次数 $\leq [g/3]$ では非自明な関係式をもたない。

カップ積

$$R_g^k \times R_g^{g-2-k} \rightarrow R_g^{g-2}$$

が非退化であるという部分は依然として未解決である。

Faber 予想に限らずコホモロジー類が与えられれば、その微分形式表示が欲しくなるのは人情というものである。

疑問 2. MMM 類 $e_i \in H^*(\mathbb{M}_g; \mathbb{R})$, $i \geq 1$, を代表する canonical な微分形式は何だろうか?

以下の議論で明らかになるはずだが、canonical は unique を意味しない。言わば「多神教」的な状況にある。

まず i が奇数のときの e_i は、Grothendieck-Riemann-Roch の定理によって、Siegel 上半空間 \mathcal{H}_g 上の $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ -不変微分形式の引き戻しとして表されることがわかる。しかし、これだけが canonical な微分形式とは言えない。 i が偶数の場合も含め e_i を代表する canonical な微分形式として、最初に考えなければならないのは、相対接束 $T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}$ の双曲計量から決まる微分形式であり、その計算は Wolpert [44] によって実行された。実際、Wolpert は、上半平面上の微分作用素についての Maass calculus というものを巧みに用いることで第一 Chern 形式

$$c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}, \text{双曲計量}) \in \Omega^2(\mathbb{M}_g)$$

および、任意の $i \geq 1$ についてのファイバー積分

$$\int_{\text{fiber}} c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}, \text{双曲計量})^{i+1} \in \Omega^{2i}(\mathbb{M}_g)$$

を具体的に計算した。とくに $i = 1$ のとき、これは Weil-Petersson Kähler 形式 ω_{WP} に一致する。とくに ω_{WP} は第一 MMM 類 e_1 を代表する。一方、 $i \geq 2$ のとき、この微分形式にはレゾルベント $(D_0 - 2)^{-1}$ が残ってしまう。ここで $D_0 = y^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right)$ は上半平面 $\{x + y\sqrt{-1}; y > 0\}$ のラプラシアンである。

問題 3 (悪問). Wolpert の微分形式たちを用いて Faber 予想を部分的にでも証明せよ。

これを悪問とする理由は Weil-Petersson Kähler 形式 ω_{WP} の非退化性 $\omega_{\text{WP}}^{3g-3} \neq 0$ にある。既に述べたように Looijenga [31] の結果の系として $e_1^{g-1} = 0$ である。さらに、 e_1 は超楕円的 locus において 0 だが、これも ω_{WP} の非退化性と相性が良くない。

唐突だが、ここで moduli 空間 \mathbb{M}_g の第二 Betti 数が 1 であることを思い出しておく。

定理 4 (Harer[11] ほか). $g \geq 3$ のとき $H^2(\mathbb{M}_g; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ である。

したがって、 $g \geq 3$ であれば exact でない \mathbb{M}_g 上の 2 次閉微分形式は全て、(適切なスカラー倍により) e_1 を代表する微分形式となる。

さて、相対接束 $T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}$ の上には、他にも canonical な計量が考えられる。種数 g コンパクト Riemann 面 C の正則 1-形式全体の空間を $H^0(C; K)$ と書くことにする。 $\varphi, \psi \in H^0(C; K)$ に対して複素数 $\frac{\sqrt{-1}}{2} \int_C \varphi \wedge \bar{\psi}$ をとる対応は $H^0(C; K)$ 上の Hermite 内積である。この Hermite 内積に関する $H^0(C; K)$ の正規直交基底 $\{\psi_i\}_{i=1}^g$ をとり、Bergman 計量

$$B := \frac{\sqrt{-1}}{2g} \sum_{i=1}^g \psi_i \wedge \bar{\psi}_i \in \Omega^2(C)$$

を考える。これは C の体積要素であって、正規直交基底 $\{\psi_i\}_{i=1}^g$ の取り方によらない。また、 $\int_C B = 1$ となるようにしてある。

問題 5 (**). B に関する第一 Chern 形式

$$c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}, B) \in \Omega^2(\mathbb{C}_g)$$

および、任意の $i \geq 1$ についてのファイバー積分

$$\int_{\text{fiber}} c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}, B)^{i+1} \in \Omega^{2i}(\mathbb{M}_g)$$

を具体的に計算せよ。

なお、接束 TC の Arakelov 計量とは、 $c_1(TC, \text{Arakelov}) = (2 - 2g)B$ をみたく計量のことであった。後述するように、 $c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}, \text{Arakelov})$ および $i = 1$ でのファイバー積分 $\int_{\text{fiber}} c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}, \text{Arakelov})^2$ は具体的に計算できている。これらには Bergman 計量 B に関する Green 関数がゴチャゴチャ出てくる。

問題 6 (***) . これらの微分形式たちを用いて Faber 予想を部分的にでも証明せよ。

ここまでは MMM 類の定義に則した微分形式の構成であったが、ここからは森田による拡大第一 Johnson 準同型 [36] を用いた MMM 類の構成 [37] に則した微分形式の構成を考える。Johnson 準同型の写像類群全体への拡張は [36] にはじまるが、本稿では、その後の北野-河澄-Massuyeau [29, 21, 33] による symplectic 展開を用いた構成法を述べる。

少し長い準備をする。基点 $*$ $\in \partial\Sigma_{g,1}$ についての曲面 $\Sigma_{g,1}$ の基本群を π と表す: $\pi := \pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$. これは階数 $2g$ の自由群であるが、その自由生成系 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g\}$ として symplectic 生成系をとる。とくに $\prod_{i=1}^g \alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1} \in \pi$ は境界 $\partial\Sigma_{g,1}$ を負の向きに一周する loop である。また、 $H := H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{R})$ と略記し、 $x_i := [\alpha_i], y_i := [\beta_i] \in H$ とおくと、これらは H の symplectic 基底となる。ここで一般に $\gamma \in \pi$ のホモロジー類を $[\gamma] \in H$ と書いた。

$$\omega_0 := \sum_{i=1}^g x_i y_i - y_i x_i \in H^{\otimes 2}$$

は symplectic 基底によらない。これを symplectic 形式と呼ぶことにする。他方、ベクトル空間 H の完備テンソル代数 $\widehat{T}(H) := \prod_{m=0}^{\infty} H^{\otimes m}$ は standard な完備 Hopf 代数の構造をもつ。とくに余積

$$\Delta : \widehat{T}(H) \rightarrow \widehat{T}(H) \otimes \widehat{T}(H)$$

は、任意の $X \in H$ について $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$ をみたす代数準同型である。なお、上式右辺の \otimes は完備テンソル積を表し、以下も同様である。群的 (group-like) 元の全体の集合

$$G(\widehat{T}(H)) := \{u \in 1 + \prod_{m=1}^{\infty} H^{\otimes m}; \Delta(u) = u \otimes u\}$$

は代数 $\widehat{T}(H)$ の乗法群の部分群である。

定義 7 (Massuyeau [33]). 写像 $\theta : \pi \rightarrow \widehat{T}(H)$ が symplectic 展開であるとは、次の 3 つの条件を充すことを言う。

- (1) θ は群準同型 $\pi \rightarrow G(\widehat{T}(H))$ である。
- (2) 任意の $\gamma \in \pi$ について $\theta(\gamma) \equiv 1 + [\gamma] \pmod{\prod_{m=2}^{\infty} H^{\otimes m}}$ がなりたつ。
- (3) (symplectic 条件) $\theta(\prod_{i=1}^g \alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1}) = \exp(\omega_0) (= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \omega_0^m)$.

条件 (1) (2) だけを仮定したものを群的 (group-like) 展開という。たとえば上記の自由生成系 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g\}$ について $\theta_{\text{exp}}(\alpha_i) = \exp(x_i)$, $\theta_{\text{exp}}(\beta_i) = \exp(y_i)$, $1 \leq i \leq g$, をみたす群準同型 $\theta_{\text{exp}} : \pi \rightarrow G(\widehat{T}(H)) \hookrightarrow \widehat{T}(H)$ は群的展開であるが、symplectic 展開ではない。symplectic 展開は実際に存在する。Massuyeau [33] による LMO 関手を用いた構成、久野 [30] による組み合わせ的な構成などもあるが、以下のように複素解析的にも構成できる [22]。

複素解析的に基本群 π からの準同型を構成するには、Riemann 面上の平坦接続を定義し、そのホロノミーをとるのが素直である。そこで、 C を種数 g コンパクト Riemann 面、 $P_0 \in C$, $0 \neq v \in T_{P_0}C$, とする。 C 上の実カレントの全体を $A^*(C)$ と書くことにする。接ベクトル v を tangential basepoint にもつ $C \setminus \{P_0\}$ の基本群 $\pi_1(C \setminus \{P_0\}, v)$ とは、区分的 C^∞ path $\ell : [0, 1] \rightarrow C$ であって、条件 $\ell(0) = \ell(1) = P_0$, $\ell([0, 1]) \subset C \setminus \{P_0\}$ および速度の条件 $\ell'(0) = -\ell'(1) = v$ をみたすもの全体の集合を、これらの条件を保つホモトピーで同一視した商集合である。 v のところでスイッチバックすることで積が定まり、 $\pi = \pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$ と同型な群となる。 $A^1(C)$ 上の Hodge $*$ -作用素 $*$ は C の共形構造だけで決まることに注意する。 P_0 におけるデルタ・カレントを $\delta_{P_0} \in A^2(C)$ とすると、完全列

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\text{const}} A^0(C) \xrightarrow{d^*d} A^2(C) \xrightarrow{\int_C} \mathbb{R} \rightarrow 0$$

がなりたち、Green 作用素が決まる。まず、 δ_{P_0} に関する Green 作用素を $\Phi_0 : A^2(C) \rightarrow A^0(C)/\mathbb{R}$ とする。任意の $\Omega \in A^2(C)$ について $d^*d\Phi_0(\Omega) = \Omega - (\int_C \Omega)\delta_{P_0}$ がなりたつ。一方、Bergman 計量 B に関する Green 作用素を $\hat{\Phi} : A^2(C) \rightarrow A^0(C)$ とする。任意の $\Omega \in A^2(C)$ について $d^*d\hat{\Phi}(\Omega) = \Omega - (\int_C \Omega)B$ および $\int_C \hat{\Phi}(\Omega)B = 0$ がなりたつ。

以上を踏まえて C 上に完備テンソル代数 $\widehat{T}(H_1(C; \mathbb{R}))$ に係数をもつ「平坦な」接続形式

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{(m)}, \quad \omega_{(m)} \in A^1(C) \otimes (H_1(C; \mathbb{R}))^{\otimes m}$$

を $m \geq 1$ について帰納的に構成する。まず、 $m = 1$ のとき、双対 $(H_1(C; \mathbb{R}))^*$ を C 上の実調和 1-形式の全体と同一視して $A^1(C)$ の部分空間とみなす。恒等写像 $1_{H_1(C; \mathbb{R})} \in (H_1(C; \mathbb{R}))^* \otimes H_1(C; \mathbb{R}) \subset A^1(C) \otimes H_1(C; \mathbb{R})$ に対応する調和 1-形式を $\omega_{(1)} \in A^1(C) \otimes H_1(C; \mathbb{R})$ とする。 $m = 2$ のとき $d\omega_{(2)} = \omega_{(1)} \wedge \omega_{(1)}$ をみたす $\omega_{(2)}$ が欲しいが、そのようなものは存在しない。 $\int_C \omega_{(1)} \wedge \omega_{(1)} = \omega_0 \in (H_1(C; \mathbb{R}))^{\otimes 2}$ だからである。そこで、 $m \geq 2$ については、帰納的に

$$\omega_{(m)} := *d\Phi_0 \left(\sum_{p=1}^{m-1} \omega_{(p)} \wedge \omega_{(m-1-p)} \right) \in A^1(C) \otimes (H_1(C; \mathbb{R}))^{\otimes m}$$

と定義すると $d\omega = \omega \wedge \omega - \omega_0 \delta_{P_0}$ となる。つまり $C \setminus \{P_0\}$ 上で ω は平坦となる。さらに、 $\ell(0) = -\ell(1) = v \neq 0$ をみたす path ℓ に沿うホロノミーは有限確定値をとるので、「平坦」接続 ω のホロノミーとして写像

$$\theta^{(C, P_0, v)} : \pi_1(C \setminus \{P_0\}, v) \rightarrow \widehat{T}(H_1(C; \mathbb{R}))$$

が得られる [22]。これは symplectic 展開であり、Harris [12] の調和体積の高次化なので調和的 Magnus 展開と命名した。

symplectic 展開の一般論にもどる。河澄-久野 [27] は、symplectic 展開 $\theta : \pi \rightarrow \widehat{T}(H)$ の線型拡張 $\theta : \mathbb{R}\pi \rightarrow \widehat{T}(H)$ が、曲面 $\Sigma_{g,1}$ の Goldman 括弧積を保つことを示した。また、Alekseev-河澄-久野-Naef [3] は、Goldman 括弧積を保つ群的展開は symplectic 展開と共役であることを示した。曲面 $\Sigma_{g,1}$ に随伴する柏原 Vergne 問題 [2] は、群的展開に関する問題であって、二つの条件 (KVI) と (KVII) からなる。第一の条件 (KVI) は symplectic 展開の symplectic 条件に他ならない。symplectic 展開について θ が Turaev 余括弧積を保つことと同値であるように (KVII) が定められている。このように定義する根拠は、オリジナルの柏原 Vergne 問題 [19, 5] (の共役) が、種数 0 の曲面の基本群の群的展開が Goldman 括弧積と Turaev 余括弧積を保つという条件に同値であることを [1] において証明したからである。Alekseev-Torossian [5] と Enriquez [6] の議論を用いると、 $g \geq 2$ ならば曲面 $\Sigma_{g,1}$ に随伴する柏原 Vergne 問題は解をもつことがわかる。ここでは曲面をパンツ分解して、それぞれのパンツ上の解を張り合わせている。

柏原 Vergne 問題は群的展開についての問題であるわけだが、explicit な解は構成できるだろうか？ 種数 0 の (つまりオリジナルの) 柏原 Vergne 問題については Knizhnik-Zamonodchikov 接続のホロノミーが解を与える。Alekseev-Naef [4] は、このホロノミーが Goldman 括弧積と Turaev 余括弧積を保つことを直接証明している。次の問題は、まもなく解決されると思っている。

問題 8 (*). 調和的 Magnus 展開 $\theta^{(C, P_0, v)}$ は曲面 $\Sigma_{g,1}$ についての柏原 Vergne 問題の解を与えるだろう。

回り道が長かったが、拡大第一 Johnson 準同型を用いた MMM 類を代表する微分形式の構成に戻る。最初に、北野-河澄-Massuyeau のやり方で拡大第一 Johnson 準同型を構成する。 $\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \theta_m$, $\theta_m : \pi \rightarrow H^{\otimes m}$, を $\pi = \pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$ の symplectic 展開とする。任意の

$\gamma \in \pi$ について $\theta_0(\gamma) = 1$, $\theta_1(\gamma) = [\gamma]$ であるが、 θ が群的であることから $\theta_2(\gamma) \in \Lambda^2 H$ である。任意の $\varphi \in \mathcal{M}_{g,1}$ と $\gamma \in \pi$ について

$$\tau_1^\theta(\varphi)[\gamma] := \theta_2(\gamma) - \varphi\theta_2(\varphi^{-1}(\gamma)) \in \Lambda^2 H$$

とおく。右辺は φ を止めれば π からアーベル群 $\Lambda^2 H$ への準同型になっている。そこで $\tau_1^\theta(\varphi) \in H^* \otimes \Lambda^2 H$ とみなすことができる。ホモロジー群 H の交叉形式つまり Poincaré 双対性 $H = H^*$ によって $H^* \otimes \Lambda^2 H = H \otimes \Lambda^2 H$ とみなすと、ここには $\Lambda^3 H$ が含まれているが、 θ が symplectic 展開であることから $\tau_1^\theta(\varphi) \in \Lambda^3 H$ であることがわかる。こうして得られる写像 $\tau_1^\theta : \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \Lambda^3 H$ は、写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ の symplectic 群 $Sp(H)$ の加群 $\Lambda^3 H$ に値をもつねじれコサイクルである。そのコホモロジー類 $[\tau_1^\theta] \in H^1(\mathcal{M}_{g,1}; \Lambda^3 H)$ が森田 [36] による拡大第一 Johnson 準同型に他ならない。 $T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}^\times = B\mathcal{M}_{g,1}$ および $T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}^\times \rightarrow \mathbb{C}_g$ の Gysin 列により、コホモロジー群の同型 $H^1(\mathcal{M}_{g,1}; \Lambda^3 H) = H^1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}^\times; \Lambda^3 H) \cong H^1(\mathbb{C}_g; \Lambda^3 H)$ になりたつ。ここで $Sp(H)$ 加群 $\Lambda^3 H$ の定める \mathbb{M}_g 上の平坦ベクトル束 $\coprod_{[C] \in \mathbb{M}_g} \Lambda^3 H_1(C; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}_g$ (の引き戻し) も $\Lambda^3 H$ と書いている。この同型によって対応する元を $\tilde{k} \in H^1(\mathbb{C}_g; \Lambda^3 H)$ と表すことにする。Poincaré 双対性によって $Sp(H)$ 加群の同型 $\Lambda^3 H \cong \Lambda^3 H^*$ になりたつことに注意する。そこで $d \geq 0$ について $Sp(H)$ -不変テンソル $\alpha \in (\Lambda^d(\Lambda^3 H))^{Sp(H)}$ を $Sp(H)$ -準同型 $\alpha : \Lambda^d(\Lambda^3 H) \rightarrow \mathbb{R}$ とみなして、コホモロジー群の誘導準同型 $\alpha_* : H^*(\mathbb{C}_g; \Lambda^d(\Lambda^3 H)) \rightarrow H^*(\mathbb{C}_g; \mathbb{R})$ が定まる。次の森田 [37] の観察は MMM 類を作る一つのレシピを与えている。

定理 9 (森田のレシピ [37]). (1) $Sp(H)$ -不変テンソル α_0 および $\alpha_1 \in (\Lambda^2(\Lambda^3 H))^{Sp(H)}$ がただ一つ存在して次をみたす

$$e = \alpha_{0*}(\tilde{k}^2), \quad e_1 = \alpha_{1*}(\tilde{k}^2) \in H^2(\mathbb{C}_g; \mathbb{R}).$$

(2) 写像

$$\tilde{k}_* : \Lambda^*(\Lambda^3 H)^{Sp(H)} \rightarrow H^*(\mathbb{C}_g; \mathbb{R}), \quad \alpha \mapsto \alpha_*(\tilde{k}^{\#})$$

は代数準同型であって、その像 $\text{Im } \tilde{k}_*$ は部分代数 $\mathbb{R}[e, e_i; i \geq 1]$ を含む。

河澄-森田 [28] は (非安定域も含め) 等式 $\text{Im } \tilde{k}_* = \mathbb{R}[e, e_i; i \geq 1]$ になりたつことを示した。Faber 予想に関する上述の森田の結果 [38] はこの等式に $Sp(H)$ の表現論を組み合わせて得られる。なお、コホモロジーの次数が 4 以上のところでは $\text{Ker } \tilde{k}_*$ は 0 ではない。

このことから \tilde{k} を代表する canonical な (ねじれ係数) 1 次微分形式が得られれば森田のレシピを使って MMM 類を表す微分形式が得られる。とくに $e = [\alpha_{0*}(\tilde{k}^2)]$, $e_1 = [\alpha_{1*}(\tilde{k}^2)]$ については canonical と言ってもよいだろう。その \tilde{k} を代表する微分形式として、これから述べる Harris-Pulte の点付き調和体積 [12, 41] の第一変分をとることができる。

さきと同じく、 C を種数 g コンパクト Riemann 面とし、点 $P_0 \in C$ と接ベクトル $v \in T_{P_0}C \setminus \{0\}$ を考える。 $\varphi, \psi \in H_1(C; \mathbb{Z})$ および $\gamma \in \pi_1(C \setminus \{P_0\}, v)$ について、点付き調和体積 $I(\varphi, \psi; \gamma) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ が以下のように定まる。まず、Poincaré 双対性により同一視 $H_1(C; \mathbb{Z}) = H^1(C; \mathbb{Z})$ により φ, ψ を C 上の調和 1-形式とみなし、Chen の反復積分 $\int_\gamma \varphi\psi \in \mathbb{R}$ をとる。これはホモトピー不変ではないが、

$$I(\varphi, \psi; \gamma) = I_{P_0}^C(\varphi, \psi; \gamma) := \int_\gamma \varphi\psi - \int_\gamma *d\Phi_0(\varphi \wedge \psi) \bmod \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

と補正するとこれは $[C, P_0] \in \mathbb{C}_g$ と φ, ψ および $[\gamma] \in H_1(C; \mathbb{Z})$ だけに依存する量である。 $[C, P_0] \in \mathbb{C}_g$ を動かして考える。 $\Lambda^3 H_{\mathbb{Z}}$ を \mathbb{M}_g 上の平坦束 $\coprod_{[C] \in \mathbb{M}_g} \Lambda^3 H_1(C; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{M}_g$ (の引き戻し) とし、Poincaré 双対性により自身の双対と同一視すると、 I は平坦束 $\Lambda^3 H / \Lambda^3 H_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C}_g$ の切断を与える。上述の調和的 Magnus 展開 θ はこの構成を高次に拡張したものであり、

$$(\varphi \wedge \psi \text{ part of } \theta_2(\gamma)) \equiv I_{P_0}^C(\varphi, \psi; \gamma) \pmod{\mathbb{Z}}$$

がなりたつ。上述の τ_1^θ の定義式と比較することで、点付き調和体積 I の第一変分 $\delta I \in \Omega^1(\mathbb{C}_g; \Lambda^3 H)$ は

$$\tilde{k} = [\delta I] \in H^1(\mathbb{C}_g; \Lambda^3 H)$$

をみたく。なお、Riemann 面 C 上の交叉数 \cdot に関して $\varphi \cdot \psi = \psi \cdot [\gamma] = [\gamma] \cdot \varphi = 0$ がなりたつならば、 $I_{P_0}^C(\varphi, \psi; \gamma)$ は点 P_0 の取り方によらない。これが Harris [12] による調和体積である。また、 C が超楕円曲線で、 $P_0 \in C$ が Weierstrass 点のとき、超楕円対合を考えれば $I_{P_0}^C(\varphi, \psi; \gamma) \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$ である。そこで第一変分 δI は超楕円的ローカスの上で 0 である。このことから、超楕円的ローカスの上では任意の $i \geq 1$ について実コホモロジー類として $e_i = 0$ であることが示される。なお、田所勇樹は、ここで述べた超楕円曲線を含め、いくつかの具体的な Riemann 面についての点付き調和体積の計算を実行している。詳細は田所自身によるサーベイ [42] を参照。

そこで点付き調和体積の第一変分 δI の具体的な形が欲しくなるが、それは Harris [12] で計算されている。直和分解 $A^1(C) \otimes \mathbb{C} = A^{1,0}(C) \oplus A^{0,1}(C)$ にともなって $\varphi \in A^1(C) \otimes \mathbb{C}$ は $(\varphi', \varphi'') \in A^{1,0}(C) \oplus A^{0,1}(C)$ に対応しているとする。この記号を使うと、任意の $\varphi, \psi, \gamma \in H_1(C; \mathbb{Z}) = H^1(C; \mathbb{Z}) \subset A^1(C)$ について

$$(\delta I)(\varphi, \psi, \gamma) = \varphi'(*d\Phi_0(\psi, \gamma))' + \psi'(*d\Phi_0(\gamma, \varphi))' + \gamma'(*d\Phi_0(\varphi, \psi))'$$

となる。右辺は P_0 のみに高々 1 位の極をもつ C 上の有理型二次微分 $\in H^0(C; 2K + P_0) = T_{[C, P_0]}^* \mathbb{C}_g$ である。

以上の議論を合わせると e, e_1 を代表する canonical な微分形式

$$\begin{aligned} e^J &:= \alpha_{0*}((\delta I)^2) \in \Omega^2(\mathbb{C}_g), \\ e_1^J &:= \alpha_{1*}((\delta I)^2) \in \Omega^2(\mathbb{M}_g) \end{aligned}$$

が得られる。後者 e_1^J は本来 $\Omega^2(\mathbb{C}_g)$ の元であるが、一意的に定まる $\Omega^2(\mathbb{M}_g)$ の元の射影による引き戻しであることがわかる。しかし、 e, e_1 を代表する canonical な微分形式はこれだけではない。

$$\begin{aligned} e^A &:= c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}, \text{Arakelov}) \in \Omega^2(\mathbb{C}_g), \\ e_1^F &:= \int_{\text{fiber}} (e^J)^2 \in \Omega^2(\mathbb{M}_g) \end{aligned}$$

も canonical であり、各 $[C] \in \mathbb{M}_g$ について $e^A|_C = (2 - 2g)B = e^J|_C$ がなりたつ。また、微分形式としては $e_1^J \neq e_1^F$ である。

定理 10 (河澄 [22]).

$$e^A - e^J = \frac{1}{(2g - 2)^2} (e_1^F - e_1^J) \in \Omega^2(\mathbb{C}_g)$$

$g \geq 3$ のとき \mathbb{M}_g の佐武コンパクト化を用いると \mathbb{M}_g 上の正則関数は定数関数しかない。したがって、 $e_1^F - e_1^J = \partial\bar{\partial}(h)$ をみたす \mathbb{M}_g 上の関数 h は存在してただ一つである。この関数は $g \geq 2$ のとき以下のように具体的に与えられる。 C を種数 g コンパクト Riemann 面とし、 $\{\psi_i\}_{i=1}^g \subset H^0(C; K)$ を正規直交基底とする。

$$a_g(C) := - \sum_{i,j=1}^g \int_C \psi_i \wedge \bar{\psi}_j \hat{\Phi}(\bar{\psi}_i \wedge \psi_j) \in \mathbb{R}_{>0}$$

と定める。ここで $\hat{\Phi}$ は B に関する Green 作用素である。この不変量は河澄 [23, 24] (a_g と書く) および Zhang [45] (φ と書く) が同じ不変量を別の文脈で独立に定義したもので、Kawazumi-Zhang 不変量または Zhang-Kawazumi 不変量と呼ばれている。この不変量を持ちいると次がなりたつ。

定理 11 (河澄 [23]).

$$\frac{-2\sqrt{-1}}{2g(2g+1)} \partial\bar{\partial}(a_g) = \frac{1}{(2g-2)^2} (e_1^F - e_1^J).$$

次は是非考えるべき問題である。

問題 12 (**). $i \geq 2$ についても $\int_{\text{fiber}} (e^A)^{i+1} \in \Omega^{2i}(\mathbb{M}_g)$ を研究せよ。とくに、これらを a_g と $\text{Im } \tilde{k}_*$ の元を用いて表すことができるか？

後半の問いは、どちらとも見当がつかないが、後述する modular graph テンソルが関係するのかもしれない。

不変量 a_g について最も仕事をしているのは R. de Jong である。[16] において、Faltings delta 不変量 [9], Hain-Reed 不変量 [10] および Kawazumi-Zhang 不変量 a_g が線型従属であることを示し、[17] などでも a_g の漸近的な振る舞いを研究し、[18] では定理 10 と定理 11 の別証明を与えている。これらとは別に、Wilms [43] は不変量 a_g の theta 定数を用いた表示を与えており、d'Hoker-Green [13] は種数 2 のときの不変量 a_2 と超弦理論との関係を論じている。

不変量 a_g の一般化として $\mathbb{M}_g \subset \mathfrak{H}_g / Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ 上のテンソル場を考えることができる [25, 26]。 $[C] \in \mathbb{M}_g$ とし $\{\psi_i\}_{i=1}^g \subset H^0(C; K)$ を正規直交基底とする。

$$\begin{aligned} & \{\psi_i\}_{i=1}^g \subset H^0(C; K) \text{ o.n. basis} \\ & A_{i\bar{j}k\bar{l}} := \int_C \psi_i \wedge \bar{\psi}_j \hat{\Phi}(\psi_k \wedge \bar{\psi}_l) \in \mathbb{C} \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} z' \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \quad \circ \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \bar{j} \quad \quad \quad \quad \quad k \end{array} \\ \bar{l} \end{array} \\ & \left(a_g = - \sum_{i,j=1}^g A_{i\bar{j}j\bar{i}} \right) \quad \left(i,j,k,l \in \{1, \dots, g\} \right) \end{aligned}$$

と定義する。

定理 13 (河澄 [25, 26]). 微分形式

$$48\sqrt{-1} \sum_{i,j,k,l} (\psi_i \psi_j A_{i\bar{j}k\bar{l}} \bar{\psi}_i \bar{\psi}_k - \psi_i \psi_j A_{i\bar{j}k\bar{l}} \bar{\psi}_k \bar{\psi}_i) \in T_{[C]}^* \mathbb{M}_g \otimes \overline{T_{[C]}^* \mathbb{M}_g}$$

は $e_1 \in H^2(\mathbb{M}_g; \mathbb{R})$ を代表する。

この構成は、最近 d'Hoker-Schlotterer [14] によって modular graph tensors という名称のもとで一般化されている。注目すべきは、これらの modular graph tensors の間に非自明な関係式が見出されており、さらにそれらの関係式は Green 作用素 $\hat{\Phi}$ の形式的な性質だけから導かれているということである。これらは個人的には大いに励まされる結果である。そこで次の問いを立てたい。

問題 14 ().** (1) $i \geq 2$ とくに i 偶数について第 i MMM 類 e_i を代表する微分形式が modular graph tensors たちから構成できないか？

(2) その上で e_i たちの (非安定域における) 非自明な関係式が Green 作用素 $\hat{\Phi}$ の形式的な性質から導かれないか？

講演内容は以上であるが、質疑応答の際に世話人の高山茂晴さんから、問題5を $(TC)^{\otimes n}$, $n \geq 2$, に拡張するという興味深い示唆をいただいた。見当違いである心配があるが、私なりの解釈を書いておきたい。 $(T^*C)^{\otimes n}$ すなわち nK の正則切断の空間 $H^0(C; nK)$ に計量 B をつかって Hermite 内積

$$\frac{(\sqrt{-1})^n}{2^n} \int_C u\bar{v} B^{1-n} \in \mathbb{C} \quad (u, v \in H^0(C; nK))$$

を定義する。局所座標 z について $u\bar{v} = f(z)\overline{g(z)}(dz)^{\otimes n}(\bar{d}z)^{\otimes n}$ という形をしているから B^{1-n} をかけて $(1, 1)$ -形式が得られ、これを C 上で積分することができる。この内積に関する正規直交基底 $\{u_i\}_{i=1}^{(2n-1)(g-1)}$ をとり、

$$B_n := \frac{(\sqrt{-1})^n}{2^{n(2n-1)(g-1)}} \sum_{i=1}^{(2n-1)(g-1)} u_i \bar{u}_i B^{1-n} \in \Omega^2(C)$$

とおく。もちろんこれは正規直交基底のとり方によらない。標準束 K は底点をもたないので nK も底点をもたず、 B_n は C の体積要素となる。

問題 15 ().** (1) 第一 Chern 形式

$$c_1((T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}), B_n) \in \Omega^2(\mathbb{C}_g)$$

を計算せよ。

(2) 次をみたま \mathbb{C}_g 上の実解析関数 $h_{n,g}$ を調べよ

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} h_{n,g} = c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}, B_n) - c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}, B).$$

これらの関数がモジュライ空間 \mathbb{M}_g 上の determinant 直線束に関する Mumford の定理 [39][定理 5.10, p.64] と何か関係があってもよさそうだと思う。

References

- [1] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno, F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra in genus zero and the Kashiwara-Vergne problem, *Adv. Math.* **326** (2018), 1–53.
- [2] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno, F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Kashiwara-Vergne problem in higher genera, arXiv:1804.09566.
- [3] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno, F. Naef, Goldman-Turaev formality implies Kashiwara-Vergne, *Quantum Topol.* **11** (2020), no. 4, 657–689.
- [4] A. Alekseev and F. Naef, Goldman-Turaev formality from the Knizhnik-Zamolodchikov connection, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **355** (2017), no. 11, 1138–1147.
- [5] A. Alekseev and C. Torossian, The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld’s associators, *Ann. of Math. (2)* **175** (2012), no. 2, 415–463.
- [6] B. Enriquez, Elliptic associators, *Selecta Math. (N.S.)* **20** (2014), no. 2, 491–584.
- [7] C. Faber, A conjectural description of the tautological ring of the moduli space of curves, in: *Moduli of curves and abelian varieties*, Aspects Math., E33, Vieweg, Braunschweig, 109–129 (1999)
- [8] C. Faber, A non-vanishing result for the tautological ring of \mathcal{M}_g , preprint, arXiv:math/9711219 (1997)
- [9] G. Faltings, Calculus on arithmetic surfaces, *Ann. Math.*, **119**, 387–424 (1984)
- [10] R. Hain and D. Reed, On the Arakelov geometry of the moduli space of curves, *J. Differential Geom.*, **67** 195–228 (2004)
- [11] J. Harer, The second homology group of the mapping class group of an orientable surface, *Invent. math.*, **72**, 221–239 (1983)
- [12] B. Harris, Harmonic volumes, *Acta Math.*, **150**, 91–123 (1983)
- [13] E. D’Hoker and M. B. Green, Zhang-Kawazumi invariants and superstring amplitudes, *J. Number Theory*, **144** 111–150 (2014)
- [14] E. D’Hoker and O. Schlotterer, Identities among higher genus modular graph tensors, preprint, arXiv: 2010.00924 (2020)
- [15] E. Ionel, Relations in the tautological ring of M_g , *Duke Math. J.*, **129**, 157–186 (2005)
- [16] R. de Jong, Second variation of Zhang’s λ -invariant on the moduli space of curves, *Amer. J. Math.*, **135** 275–290 (2013)

- [17] R. de Jong, Asymptotic behavior of the Kawazumi-Zhang invariant for degenerating Riemann surfaces. *Asian J. Math.*, **18**, 507–524 (2014)
- [18] R. de Jong, Torus bundles and 2-forms on the universal family of Riemann surfaces, in: *Handbook of Teichmüller theory*, ed. A. Papadopoulos, Volume VI, EMS Publishing House, Zurich, 195–227 (2016)
- [19] M. Kashiwara and M. Vergne, The Campbell-Hausdorff formula and invariant hyperfunctions, *Invent. math.* **47** (1978), no. 3, 249–272.
- [20] N. Kawazumi, Weierstrass points and Morita-Mumford classes on hyperelliptic mapping class groups, *Topology and its appl.* **125**, 363–383 (2002)
- [21] N. Kawazumi, Cohomological aspects of Magnus expansions, preprint, math.GT/0505497 (2005)
- [22] N. Kawazumi, Harmonic Magnus expansion on the universal family of Riemann surfaces, preprint, math.GT/0603158 (2006)
- [23] N. Kawazumi, Johnson’s Homomorphisms and the Arakelov-Green function, preprint, math.0801,4218 (2008)
- [24] N. Kawazumi, Canonical 2-forms on the moduli space of Riemann surfaces, in: *Handbook of Teichmüller theory*, ed. A. Papadopoulos, Volume II, EMS Publishing House, Zurich, 217–237 (2009)
- [25] N. Kawazumi, Some tensor field on the Teichmüller space, in Lecture at MCM2016, OIST (2016) http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kawazumi/OIST1610_v1.pdf.
- [26] N. Kawazumi, Differential forms and functions on the moduli space of Riemann surfaces, in Séminaire Algèbre et topologie, Université de Strasbourg. (2017) http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kawazumi/1701Strasbourg_v1.pdf.
- [27] N. Kawazumi and Y. Kuno, The logarithms of Dehn twists, *Quantum Topology* **5**, 347–423 (2014)
- [28] N. Kawazumi and S. Morita, The primary approximation to the cohomology of the moduli space of curves and cocycles for the stable characteristic classes, *Math. Res. Lett.*, **3**, 629–641(1996)
- [29] T. Kitano, Johnson’s homomorphisms of subgroups of the mapping class group, the Magnus expansion and Massey higher products of mapping tori, *Topology Appl.*, **69**, 165–172 (1996)
- [30] Y. Kuno, A combinatorial construction of symplectic expansions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **140**, 1075–1083 (2012)
- [31] E. Looijenga, On the tautological ring of \mathcal{M}_g , *Invent. math.*, **121**, 411–419 (1995)

- [32] I. Madsen and M. Weiss, The stable moduli space of Riemann surfaces: Mumford’s conjecture, *Ann. of Math.*, **165**, 843–941 (2007).
- [33] G. Massuyeau, Infinitesimal Morita homomorphisms and the tree-level of the LMO invariant, *Bull. Soc. Math. France*, **140**, 101–161 (2008)
- [34] E. Y. Miller, The homology of the mapping class group, *J. Differential Geom.*, **24**, 1–14 (1986).
- [35] S. Morita, Characteristic classes of surface bundles, *Invent. math.*, **90**, 551–577 (1987).
- [36] S. Morita, The extension of Johnson’s homomorphism from the Torelli group to the mapping class group, *Invent. math.*, **111**, 197–224 (1993)
- [37] S. Morita, A linear representation of the mapping class group of orientable surfaces and characteristic classes of surface bundles, in *Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995)*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996, 159–186.
- [38] S. Morita, Generators for the tautological algebra of the moduli space of curves, *Topology*, **42**, 787–819 (2003)
- [39] D. Mumford, Stability of projective varieties, *L’Enseignement Mathématique*, **23**, 39–110 (1977)
- [40] D. Mumford, Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves, in *Arithmetic and Geometry*, *Progr. Math.*, **36**, Birkhäuser, Boston, 1983, 271–328.
- [41] M. J. Pulte, The fundamental group of a Riemann surface: Mixed Hodge structures and algebraic cycles, *Duke Math. J.*, **57** 721–760 (1988)
- [42] Y. Tadokoro, Harmonic volume and its applications, *Handbook of Teichmüller theory*, ed. A. Papadopoulos, Volume VI, EMS Publishing House, Zurich, 167–193 (2016).
- [43] R. Wilms, New explicit formulas for Faltings’ delta-invariant, *Invent. math.*, **209**, 481–539 (2017)
- [44] S. Wolpert, Chern forms and the Riemann tensor for the moduli space of curves, *Invent. math.*, **85**, 119–145 (1986).
- [45] S.-W. Zhang, Gross-Schoen cycles and dualising sheaves, *Invent. math.*, **179** 1–73 (2010)