一般化ホッジ理論に関連する問題

京都大学・数理解析研究所　望月 拓郎
Takuro Mochizuki
Research Institute for Mathematical Sciences
Kyoto University

以下に述べる問題では, 結果よりも, 解く過程で見えてくるものに意義があることを期待しています. (実際には袋小路かもしれませんが.) “一般化ホッジ理論” といいつつ, 講演の準備をしていた時にモノポールや差分加群の Kobayashi-Hitchin 対応に関心を持っていたため, その方面の問題について述べました. 講演の際に触れた時とは少し違う形で述べた問題や, 講演では触れましたが本稿では省略した問題もあります.

1　ツイスター構造と一般化ホッジ理論

初めに大まかな問題意識を説明するためにツイスター構造について説明します. Simpson によって導入されたツイスター構造 [34] とは, $\mathbb{P}^1$ 上の正則ベクトル束のことです. 断らないかぎり階数は有限とします. $\mathbb{Z}$ で添字づけられた増大フィルトレーション W をもち, $W_w(V) = V$ $(w >> 0)$, $W_w(V) = 0$ $(w << 0)$ であり, さらに $\mathrm{Gr}^W_w(V) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(w)^{\oplus r}$ がみたされるとき, (V, W) を混合ツイスター構造といいます. そして, ある w があって, $\mathrm{Gr}^W_n(V) = 0$ $(n \neq w)$ となるとき, (V, W) (あるいは単に V) を重み w の純ツイスター構造といいます. 混合ツイスター構造の射 $(V, W) \longrightarrow (V', W)$ は, $V \longrightarrow V'$ という $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-加群としての射で, フィルトレーション W を保つものです.

ツイスター構造は Hodge 構造の一般化です. $\mathbb{Q}$-Hodge 構造は, $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間 $H_{\mathbb{Q}}$ と, $H_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} H_{\mathbb{Q}}$ 上の減少フィルトレーション F の組のことでした. Rees 構成によって, $\mathbb{C}[\lambda]$ 上の自由加群 $R_F(H_{\mathbb{C}})$ が定まります. また, F の共役として $\overline{F}$ というフィルトレーションが $H_{\mathbb{C}}$ 上に得られるので, Rees 構成によって, 今度は変数を λ^{-1} として, $\mathbb{C}[\lambda^{-1}]$-自由加群 $R_{\overline{F}}(H_{\mathbb{C}})$ が定まります. これらをはりあわせることで, 局所自由 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-加群 $\xi(H_{\mathbb{Q}}, F)$ が得られます. そして, $(H_{\mathbb{Q}}, F)$ が重み w の純ホッジ構造であれば, 得られたツイスター構造が重み w の純ツイスター構造になります. また, 混合ホッジ構造にこの構成を適用すると混合ツイスター構造が得られます. このような意味で, ツイスター構造はホッジ構造の一般化になっています.

Simpson はツイスター構造を導入した上で, ホッジ構造についての概念や定理等はツイスター構造についての概念や定理等に拡張されるはずであり, 証明も多くの場合に, ホッジの場合の証明をそのままツイスターに適用できるはず, というアイディア (Simpson のメタ定理) を提案しました. 実際, 例えば, “混合ホッジ構造の圏がアーベル圏になる”, というような主張は, 証明も含めて, “混合ツイスター構造の圏がアーベル圏になる”, という主張に容易に拡張されます. また, Tate ツイストや偏極などのホッジ構造において重要な概念は自然にツイスター構造の場合に一般化されます. 次のことを問題ではなく, “問題意識” として挙げておきます.

問題意識 Simpson のメタ定理の追究.

簡単すぎる一般化をしてもそれだけでは仕事になりませんが, 特異性があるような状況では, 興味深い話につながることがあり得ます. 調和束の漸近挙動の研究やツイスター D 加群の研究 [19, 18, 28, 29] などは, Simpson のメタ定理に触発されて, ホッジ構造の変動の漸近挙動やホッジ加群の理論のツイスター版を目指したものです. de Cataldo-Migliorini は Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber による分解定理のホッジ理論的な別証明を与えていますが, Wei-Yang [36] はそのツイスター版を与えました. まだ手付かずになっている面白い話が, かなりあるのではないかと思います.

ツイスターへの一般化によってホッジの時には起きなかったような現象が生じることもあります. 例えば, ホッジの時には確定特異点しかあらわれませんが, ツイスターでは不確定特異点も許容されます. ですから, 常に単純な拡張ができるわけではありませんが, どのような主張が成り立ち得るかを探す時に役立つこともありますし, 一般化において最も重要な核になる部分をホッジ的にとらえられることもあります.

偏極付純ツイスター構造と一般化ホッジ理論 容易にわかるように, 重みが 0 の純ツイスター構造のなす圏は, 複素数体上の有限次元ベクトル空間のなす圏と同値です. 実際, 重み 0 のツイスター構造 V は有限次元ベクトル空間 $H^0(\mathbb{P}^1, V)$ を誘導し, 逆に有限次元ベクトル空間 U は重み 0 のツイスター構造 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \otimes U$ を誘導し, 互いに逆の対応になります. また, 重み w の純ツイスター構造全体のなす圏と重み 0 の純ツイスター構造全体のなす圏の間の同値が, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(w)$ とのテンソル積によって得られます.

$\mathbb{P}^1$ の anti-holomorphic な involution σ を $\sigma(\lambda) = -(\overline{\lambda})^{-1}$ によって定めます. すると, σ によって $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ を引き戻したものは, 共役をとることで, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ と同型になりますので, ツイスター構造の σ による引き戻しは自然にツイスター構造になります. 重みが 0 の純ツイスター構造 V に対して, ペアリング $S : V \otimes \sigma^* V \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ がエルミート性 $\overline{\sigma^{-1} S(u \otimes \sigma^{-1}(v))} = S(v \otimes \sigma^{-1}(u))$ をみたし, $H^0(\mathbb{P}^1, V)$ 上に誘導されるエルミート積 $H^0(S)$ が正定値の時, S を polarization といいます. $S_1 : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \otimes \sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \longrightarrow \mathbb{T}(-1)$ で $\overline{\sigma^{-1}(S_1(u \otimes \sigma^{-1}(v)))} = -S_1(v \otimes \sigma^{-1}(u))$ をみたすものを固定することで, 重み w の純ツイスター構造の偏極も定義されます.

重み w の偏極付純ツイスター構造と正定値エルミート形式をもつ $\mathbb{C}$-ベクトル空間は同値です. したがって, 偏極付純ツイスター構造だけ見てもあまり面白くはありません. しかし, いくつかの微分幾何的に興味深い対象を偏極付純ツイスター構造を用いて捉えなおすことで, その

ような対象の研究に複素幾何の手法やホッジ理論的な見方をより有効に使えるようになります. それが, 偏極付純ツイスター構造を考える理由になります. "一般化ホッジ理論" というタイトルは, 従来のホッジ理論的対象に加えて, このような対象もホッジ理論に含めて考えたい, ということを意図しました.

最も典型的な例は調和束です. 複素多様体 X 上のヒッグス束 $(E, \overline{\partial}_E, \theta)$ とエルミート計量 h が与えられた時, Chern 接続 $\overline{\partial}_E + \partial_{E,h}$ と, θ の adjoint $\theta_h^\dagger$ が定まります. $\overline{\partial}_E + \partial_{E,h} + \theta + \theta_h^\dagger$ が平坦になる時, h を多重調和計量といい, $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ を調和束といいます. Simpson は, 偏極付純ホッジ構造の変動のツイスター版として偏極付純ツイスター構造の変動というものを導入し, 重み 0 の偏極付純ツイスター構造の変動が調和束と同値な対象であることを示しました. これより得られる問題意識 "ホッジ構造の変動についての話を調和束についての話に拡張する" に基づいて [18, 19] の研究を行なったことは既に述べた通りです.

よく知られているように, インスタントンも偏極付純ツイスター構造によって捉えられる幾何学的対象です. 簡単な場合について述べると, 通常のユークリッド計量をもつ $\mathbb{R}^4$ 上のインスタントンとは, ベクトル束 E, エルミート計量 h, ユニタリ接続 ∇ の組で, ASD 方程式 $*F(\nabla) + F(\nabla) = 0$ をみたすものです. $\mathbb{R}^4$ はハイパーケーラー多様体であり, そのツイスター空間として複素多様体 $\mathrm{Tw}(\mathbb{R}^4)$ が得られます. $\mathrm{Tw}(\mathbb{R}^4)$ は微分可能多様体としては $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}^4$ であり, 各 $x \in \mathbb{R}^4$ について $\mathbb{P}^1 \times \{x\}$ は $\mathrm{Tw}(\mathbb{R}^4)$ の複素部分多様体です. また, $\mathbb{P}^1$ の対合 σ より定まる $\sigma : \mathrm{Tw}(\mathbb{R}^4) \to \mathrm{Tw}(\mathbb{R}^4)$ が, 反正則になります. $\mathbb{R}^4$ 上のインスタントンは, $\mathrm{Tw}(\mathbb{R}^4)$ 上の正則ベクトル束 $\mathcal{E}$ とペアリング $S : \mathcal{E} \otimes \sigma^*(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Tw}(\mathbb{R}^4)}$ の組で $(\mathcal{E}, S)_{|\mathbb{P}^1 \times \{x\}}$ $(x \in \mathbb{R}^4)$ が重み 0 の偏極付純ツイスター構造であるようなものと同値であることが知られています. したがって, インスタントンやその次元簡約であるモノポールも広い意味でホッジ理論的対象とみなせることになります. そこで, 次のような問題意識に至ります.

問題意識 調和束やホッジ構造の変動の場合に調べたことを, インスタントンやその次元簡約であるモノポールや, あるいは対応する代数的対象の場合にも調べる. より一般に, ハイパーケーラー多様体のツイスター空間上の $(\mathcal{E}, S)$ (あるいはその次元簡約) について, 調和束やホッジ理論の話を拡張する.

2 モノポール

もう少し具体的な問題を, 周期性をもつモノポールの場合に説明します. M を 3 次元の向きづけられたリーマン多様体とします. E を M 上のベクトル束とし, h をエルミート計量, ∇ をユニタリ接続, ϕ を半自己共役準同型とし, Bogomolny 方程式 $F(\nabla) = *\nabla\phi$ がみたされるとき, (E, h, ∇, ϕ) がモノポールであるといいます.

特に, M が $\mathbb{R}^3/\Gamma$ の開集合の場合に興味を持ちます. ただし, Γ は $\mathbb{R}^3$ の離散部分群であり, $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^m$. このような局所的にユークリッド空間と同型であるような 3 次元多様体上のモノポールは, 複素幾何学と密接な関係があり, 複素幾何学的な手法も用いて研究されています.

また, この場合, $\mathbb{R} \times M$ のインスタントンと M 上のモノポールが自然に対応しますので, M 上のモノポールもツイスター構造によって捉えられる対象です.

2.1 $\mathbb{R}^3$ 上の L^2-曲率をもつモノポール

最も古典的なのは, Donaldson と Hitchin による研究で $\mathbb{R}^3$ 上の L^2-曲率をもつ SU(2)-モノポールと, $\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ という正則写像で $\varphi(\infty) = 0$ となるようなものの間の一対一対応が存在します. (正確な主張は [1] を参照.) この結果は, SU(2) だけでなく, 一般のコンパクトリー群の場合に拡張されています [15, 16]. この場合はよく理解されているともいえるのですが, 次のような課題もあります. Donaldson と Hitchin による結果は, 曲率が L^2 であるような SU(2)-モノポールの漸近挙動に関する Jaffe と Taubes の結果 [14] に基づいています. つまり, 曲率が L^2 という漸近条件から, より詳しく, 次のような評価が得られています.

- 無限遠において, $|\phi|_h = 1 - \frac{k}{2r} + O(r^{-2})$. ただし, $r^2 = \sum x_i^2$ であり, k は正整数.
- $\frac{\partial|\phi|_h}{\partial\Omega} = O(r^{-2})$. ただし, $\frac{\partial}{\partial\Omega}$ は S^2 方向の微分.
- $|\nabla\phi|_h = O(r^{-2})$.

SU(2) 以外の場合には, "曲率が L^2" という条件から出発するかわりに, 上のような評価から出発してモノポールの分類がなされています. したがって, モノポールの研究者達にとっては面白くないのかもしれませんが, 次のような問題が挙げられます.

問題 $**$ (Jaffe-Taubes の結果の一般化) 曲率が L^2 であるような G-モノポールの漸近挙動を調べて, G-モノポールの分類で出発点になっているような仮定がみたされていることを確認する.

より一般的な問題意識として, 例えばモノポールのような良い方程式をみたす幾何学的対象の場合に, "一見弱い漸近条件が満たされる時に, 実はもっと強い漸近条件が満たされる" というタイプの主張は, 基礎的な意義を持つように思います.

2.2 周期性を持つモノポールと差分加群

Γ が自明でない場合に, モノポールと差分加群の間の Kobayashi-Hitchin 対応を研究しています [22, 23, 24]. これは, 直接的には Charbonneau-Hurtubise [4] によるコンパクトリーマン面と S^1 の直積上のモノポールについての仕事に触発されたものですが, リーマン面上の調和束と平坦束とヒッグス束の間の Kobayashi-Hitchin 対応 [2, 7, 8, 11, 30, 31] の類似と考えられます. すると, 次のような問題意識が得られます.

問題意識 周期性をもつモノポールや差分加群について, リーマン面上の調和束や平坦束やヒッグス束や局所系に関する非可換ホッジ理論に類似することがどのぐらい成り立つかを調べる.

ディラク型特異点　$\mathcal{M}_\Gamma = \mathbb{R}^3/\Gamma$ として, $Z \subset \mathcal{M}$ を有限集合として, $\mathcal{M}_\Gamma \setminus Z$ 上のモノポール (E, h, ∇, ϕ) を考えるのですが, 無限遠や Z の各点のまわりの挙動に条件をつけます.

まず, Z の各点は (E, h, ∇, ϕ) の Dirac 型特異点とします. ここで, $P \in Z$ が Dirac 型特異点とは Kronheimer [17] によって導入された条件で, $\varphi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ を $(u_1, u_2) \longmapsto (|u_1|^2 - |u_2|^2, 2u_1u_2)$ として, $(\widetilde{E}, \widetilde{h}) = \varphi^{-1}(E, h)$ 上に

$$\widetilde{\nabla} = \varphi^*(\nabla) + \sqrt{-1}\varphi^*(\phi)\big(-u_1\, d\overline{u}_2 + \overline{u}_1\, du_2 + u_2\, d\overline{u}_1 - \overline{u}_2\, du_1\big)$$

を考えた時に, $(\widetilde{E}, \widetilde{h}, \widetilde{\nabla})$ が $(0, 0)$ において滑らかなインスタントンになることとして, 定義されます. (Dirac 型特異点でない特異点に関しては, 筆者の知るかぎりでは, ほとんど何も調べられていません. インスタントンの removable でないような特異点について, どのようなことがいえるか, という話でもあります.)

次の問題は簡単なはずで, 星半分ぐらいだと思います.

問題 $*$ Dirac 型特異点から, 重み 0 の偏極付混合ツイスター構造が得られることを確認する.

ホッジ構造の変動の特異点からは, 偏極付混合ホッジ構造というものが得られます. それは調和束の場合にも拡張されていまして, 偏極付混合ツイスター構造というものが特異点にあらわれます. 上の問題は, モノポールの Dirac 型特異点でも偏極付混合ツイスター構造が自然にあらわれることを確認する, というものです.

重み 0 の偏極付混合ツイスター構造とは, 混合ツイスター構造 (V, W) に射 $(V, W) \to (V, W) \otimes \mathbb{T}(-1)$ 与えられていて, W が N のウェイトフィルトレーションで, S と N が Gr^W_j の primitive part の polarization を誘導する, という条件がみたされることです (例えば [18] を参照). このとき, V と N は, $\mathbb{P}^1$ の接束 $T\mathbb{P}^1$ 上の連接層で, 0-切断に台を持つようなものを誘導します.

一方, 簡単のため, $O = (0, 0, 0)$ とし, $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ 上で定義されるモノポール (E, h, ∇, ϕ) があり, O は Dirac 型特異点とします. 同型 $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}_t \times \mathbb{C}_w$ を, $\sum dx_i^2 = dt\, dt + dw\, d\overline{w}$ がみたされるようにとり, $\epsilon > 0$ とすると, $\{\epsilon\} \times \mathbb{C}_w$ と $\{-\epsilon\} \times \mathbb{C}_w$ への制限として, 二つの局所自由 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_w}$-加群 E^+, E^- が得られ, $\nabla_t - \sqrt{-1}\phi$ による平行移動は 0 において有理型な同型 $E^-_{|\mathbb{C}\setminus\{0\}} \simeq E^+_{|\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ を誘導します. $E^-/(E^- \cap E^+)$, $E^+/(E^- \cap E^+)$ という $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_w}$-加群が得られ, 台は 0 に含まれます.

同型 $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ で $\sum dx_i^2 = dt\, dt + dw\, d\overline{w}$ のようにあらわされるもの全体は $\mathbb{P}^1$ で, そのような同型と $\mathbb{C}_w$ の組全体は $\mathbb{P}^1$ の接束 $T\mathbb{P}^1$ になりますので, 0-切断に台を持つ $T\mathbb{P}^1$ 上の連接層 $\mathcal{G}^\pm$ が得られます. モノポールの偏極付純ツイスター構造を用いた定式化を用いると, $\mathcal{G}^-$, $\mathcal{G}^+$ のそれぞれがペアリングを持ち, 偏極付混合ツイスター構造になることを確認する, というのが上で述べた問題です. これを確認すること自体はおそらく簡単なので, もう少しなにか調べられると良いように思います. 例えば, $\mathbb{R}^3$ 上の (特異点をもたない) モノポールの Nahm 変換は有限個の区間上の Nahm 方程式の解で, 区間の共通部分で適当な意味ではりあうようなものですが, Dirac 型特異点がある場合は, 無限遠まで延びるような半直線上の解もあらわれ, Nahm 方程式の解の無限遠におけるデータからも偏極付混合ツイスター構造がでてくるはずなので, モノポールの Dirac 型特異点からあらわれる偏極付混合ツイスター構造と比較することが自然な問題になると思います. (すぐになにかの応用があるわけではないのですが.)

無限遠における条件と漸近挙動の研究　無限遠における条件についてですが, $\mathrm{rank}\,\Gamma = 1$ のときは, $\mathcal{M} \simeq S^1_t \times \mathbb{C}_w$, $\sum dx_i^2 = dt\,dt + dw\,d\overline{w}$ のようにとった上で, $|\phi|_h = O\big(\log|w|\big)$, $|F(\nabla)|_h \to 0$ という条件を課します. $\mathrm{rank}\,\Gamma = 2$ のときは Z を含むコンパクト集合の外で $|F(\nabla)|_h$ が有界という条件を課します. このような条件から出発して, より精密な条件が満たされ (漸近的な直交性), 簡単なモノポールによって "近似される" ことがわかります. これはモノポールの研究をする上で基礎になるのですが, 近似をより精密にするという問題があります.

$\mathrm{rank}\,\Gamma = 1$ の場合に [23] の言葉や記号を用いて説明します. $\lambda = 0$ において $S^1 \times \{|w| > R\}$ 上のモノポール (E, h, ∇, ϕ) が上の条件をみたすと, (適当な分岐被覆の上で) ミニ正則ベクトル束の分解

$$(E, \overline{\partial}_E) = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{C}} E_{\ell,\alpha} = \bigoplus_{\ell,\alpha} \mathbb{L}_q^*(\ell,\alpha) \otimes \Psi_q^*(V_{\ell,\alpha}, f_{\ell,\alpha}) \tag{1}$$

が得られ, $h^\circ = \bigoplus h_{|E_{\ell,\alpha}}$ や, $h_{|E_{\ell,\alpha}} \otimes (h_{\mathbb{L}_q^*(\ell,\alpha)})^{-1}$ をフーリエ展開の定数項に置き換えて得られる $h^\sharp$ は, Bogomolny 方程式を漸近的に満たすことがわかります. 例えば, $h^\sharp$ の場合は $F(h^\sharp) - \nabla^\sharp\phi = O\big(\exp(-\epsilon|w|)\big)$ という評価が得られます. これより, $(V_{\ell,\alpha}, f_{\ell,\alpha}dw, h_{V,\ell,\alpha})$ が漸近的に Hitchin 方程式を満たします. h° や $h^\sharp$ は h に非常に近いので, h に関する評価が得られます. [23] の目的にはそれで十分なのですが, その精密化として次のような問題があります.

問題 $**$–$***$　$(E_{\ell,\alpha}, \overline{\partial}_{E_{\ell,\alpha}})$ の計量 $\widetilde{h}^\circ_{\ell,\alpha}$ を, $h_{|E_{\ell,\alpha}}$ に非常に近く, かつ Bogomolny 方程式を満たすように, h から "標準的な方法" で構成する. また, $(V_{\ell,\alpha}, f_{\ell,\alpha}dw)$ の調和計量 $\widetilde{h}_{V,\ell,\alpha}$ を, $\widetilde{h}^\circ_{\ell,\alpha}$ から "標準的な方法" で構成する. さらに, 同様のことを $\mathrm{rank}\,\Gamma = 2$ の場合も調べる.

Dirac 型特異点のところでも触れましたが, 偏極付純ホッジ構造の変動の特異点において偏極付混合ホッジ構造が得られます. そのツイスター版として, KMS-構造に関する Gr をとることで従順な調和束から偏極付混合ツイスター構造が得られます. また, Stokes 構造に関する Gr をとることでワイルドな調和束から従順な調和束が得られます. このような簡約化の列が, モノポールの場合にも得られることを示す, というのが上の問題です. 差分加群の構造についてのより深い理解が必要になると思います.

M を 3 次元多様体として, $M \times \{t > 0\}$ 上の L^2-インスタントンをより簡単なインスタントンで近似できることが, Morgan-Mrowka-Ruberman [25] によって知られています. $\mathrm{rank}\,\Gamma = 2$ の場合, L^2-曲率をもつモノポールに関しては Morgan-Mrowka-Ruberman の結果が上の問題に有効だと思われます. (ただし, L^2-曲率という条件は, 今考えている境界条件よりも強いです.)

モジュライの構成　モジュライの構成は, 基礎的な問題です.

問題 $*$　モノポールのモジュライを微分幾何的に構成し, その上の自然な構造として, 例えばハイパーケーラー構造が得られることを確認する.

各 Dirac 型特異点において重み (整数の組) を固定し, 無限遠ではある固定されたモデルによって近似されるもの全体として, モジュライを構成するのが標準的な考え方だと思います. 少なくとも, $\mathrm{rank}\,\Gamma = 1$ で, 分解 (1) が互いに異なる階数 1 のものへの分解であるような場合には,

Foscolo [10] が構成しています．一般のモデルの場合について議論した文献もある方が望ましいように思います．

問題 $**$ 境界条件 (モデル) を固定しないモジュライを構成する．その上に, 自然な幾何学的構造 (距離, Poisson 構造など) が入るかを調べる．

モデルが退化しない状況だけ考えると, 星一つかもしれません．モデルが退化する状況まで扱えると面白いように思います．退化といっている意味は, 例えば, 分解 (1) の様子が変わるような状況や, Dirac 型特異点の合流などを意味します．モノポールだけでなく, 調和束の場合にも同様の問題を考えられます．

モジュライの幾何学的性質　モジュライの幾何学的性質を調べるというのは自然な問題意識で, 例えば, 調和束やモノポールのモジュライの計量の無限遠における漸近挙動は重要な研究課題で, 特に, 調和束の場合には詳しく研究されています．(例えば [35] を参照.) また, モジュライ空間上の測地線を調べることには物理的な意味があり, $\mathrm{rank}\,\Gamma = 0$ に加えてさらに条件をつけた場合が [1] で詳しく調べられています．$\mathrm{rank}\,\Gamma > 0$ の場合にも同様の問題が考えられます．

2.3　差分加群

A を $\mathbb{C}$-代数として, $\Phi^*: A \longrightarrow A$ を $\mathbb{C}$-代数としての自己同型とします．A-加群 $\boldsymbol{V}$ に $\mathbb{C}$-線型同型 $\Phi^*_{\boldsymbol{V}}: \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{V}$ が与えられていて, $\Phi^*_{\boldsymbol{V}}(fs) = \Phi^*(f)\Phi^*_{\boldsymbol{V}}(s)$ がみたされる時, $(\boldsymbol{V}, \Phi^*_{\boldsymbol{V}})$ を差分加群といいます．モノポールの研究では次の三つの場合に興味があります．

- $A = \mathbb{C}(y)$ で, $\Phi^*(f)(y) = f(y+\varrho)$ $(\varrho \in \mathbb{C})$ の時, 加法的差分加群 (あるいは単に差分加群).
- $A = \mathbb{C}(y)$ で, $\Phi^*(f)(y) = f(qy)$ $(q \in \mathbb{C}^*)$ の時, 乗法的差分加群 (あるいは q-差分加群).
- A が楕円曲線 C の関数体 $k(C)$ で, Φ^* が $\Phi: C \longrightarrow C$, $\Phi(z) = z + \alpha$ から誘導される時, 楕円曲線上の差分加群.

さらにパラボリック構造をのせて, 安定性条件を課したものを考えます．([22, 23, 24] 参照.)

次の問題は代数的スタックとしての構成であれば, 特に難しいことはないと思います．ヒッグス束や平坦束の場合 [13, 12] のように, GIT 構成もあると良いかもしれません．

問題 $*$ パラボリック構造を持つ差分加群のモジュライを代数幾何的に構成.

ヒッグス束や平坦束のモジュライについて調べられているようなことを差分加群の場合に調べてみるというのは, 安直ですが, 自然な問題だと思います．例えば次のような問題を挙げておきます．

問題 $**$ 差分加群のモジュライ (の開集合) の調べやすい表示を得る．さらに, Poisson 構造などを具体的に表示する．

問題 $*$–$**$ 差分加群のモジュライのベッチ数, ホッジ数 (その母関数), motivic class の計算, コホモロジー環の生成元等の計算.

非可換ホッジ理論では, 指標多様体 (局所系のモジュライ) も興味深い対象として詳しく研究されています. Zastava という空間が導入されて, モノポールに対する "指標多様体" のようなものと期待されています ([9] とその参考文献を参照.)

問題 $*$–$**$ Zastava との関係.

$\mathrm{rank}\,\Gamma = 2$ で, さらに条件を課した場合には, 乗法的差分加群の Riemann-Hilbert 対応 [26, 27] と Kobayashi-Hitchin 対応を用いることで, reduced elliptic Zastava がモノポールの (ある漸近条件に付随する) モジュライと同型であることはわかるはずで, 特別な場合は容易に確認できます. $\mathrm{rank}\,\Gamma = 1$ の場合には, 加法的差分加群の Riemann-Hilbert 対応を整備して Kobayashi-Hitchin 対応に帰着されることが期待されます.

2.4 Kobayashi-Hitchin 対応

[22, 23, 24] で, モノポールと差分加群の間の Kobayashi-Hitchin 対応が得られました. 次の問題には, 例えば [32, 33] が参考になるのではないかと思います.

問題 $**$ モノポールの Kobayashi-Hitchin 対応がモジュライの間の同相 (微分同相) を誘導することを確認する.

Kobayashi-Hitchin 対応はツイスターパラメータ λ に依存します. $\mathrm{rank}\,\Gamma = 1$ の場合 [23], 対応は λ に関して正則ではありません. この問題はワイルド調和束の場合にも生じていて, 対応を正則にするには Stokes 構造の変形が必要でした. モノポールの場合にも同様の問題が考えられます.

問題 $**$ λ に関して正則な対応を得る.

これはすぐになんらかの応用があるわけではないのですが, 一般化ホッジ理論的な観点からみると意義があって, 6 ページの問題にも関連します. 少なくとも $\mathrm{rank}\,\Gamma = 1$ の場合は "Stokes 構造による変形" が必要になります. (漸近条件のとり方によって必要ない場合もあり得ます.) また, $\mathrm{rank}\,\Gamma = 2$ の場合は, Stokes 構造の変形は必要ないかもしれませんが, $\mathrm{rank}\,\Gamma = 1$ の場合に比べて座標の取り方が複雑なので非自明な問題だと思います.

2.5 Nahm 変換と代数的 Nahm 変換

$\mathbb{R}^4$ 上の L^2-インスタントンと ADHM データの間に双対性がありますが, その一般化として離散部分群 $\Lambda \subset \mathbb{R}^4$ に対して $\Lambda^\vee = \left\{\chi^\vee \in (\mathbb{R}^4)^\vee \,\middle|\, \chi^\vee(\chi) \in \pi\mathbb{Z}\,(\forall \chi \in \Lambda)\right\}$ とおくと, Λ 同変なインスタントンと $\Lambda^\vee$ 同変なインスタントンの間にフーリエ変換に類似した双対性が成り立つことが

期待されて研究されてきました. 既にさまざまな場合に確立されているのですが, (どのぐらい意義があるかは別にして) 細かい問題はいろいろと残っていると思います.

Nahm 変換が 1-周期的モノポールと $\mathbb{P}^1$ 上の harmonic bundle の間の対応を与えることが, Cherkis-Kapustin [6] によって (漸近条件が特別な場合に) 示されました.

問題 $**$ より一般の場合に, モジュライの間のハイパーケーラー構造込みで同型が得られることを確認する.

ツイスターパラメータ λ を固定すると, $\mathbb{P}^1$ 上の調和束からはフィルトレーション付 λ-平坦束が得られ, モノポールからはパラボリック構造をもつ $2\sqrt{-1}\lambda T$-差分加群が得られます. これらの間には, 代数的 Nahm 変換という変換が定まります.

問題 $**$ 各 λ ごとに, 代数的 Nahm 変換を正確に定式化した上で, Nahm 変換が代数的 Nahm 変換を誘導することを示す.

2-周期的なモノポールの Nahm transform は 2-周期的です. この場合も同様の問題が考えられます.

問題 $**$ 2-周期的モノポールについて Nahm 変換を与え, モジュライの同型が誘導されることを確認する. また, 代数的 Nahm 変換を定式化し, Nahm 変換が代数的 Nahm 変換を誘導することを確認する.

3-周期的なモノポールの Nahm 変換に関しては, Charbonneau-Hurtubise による研究があります [5].

楕円曲線上の調和束と 2-periodic なインスタントンの Nahm 変換 $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2$ の時, $\Lambda^\vee \simeq \mathbb{Z}^2$ であり, Λ-同変なインスタントンは $\mathbb{C}/\Gamma$ 上の (ワイルド) 調和束であり, $\Lambda^\vee$-同変なインスタントンは $(\mathbb{C}/\Gamma^\vee) \times \mathbb{C}$ 上のインスタントンになります. これらの間の Nahm 変換は [3, 20] で研究されています. [20] では, $\lambda = 0$ における代数的 Nahm 変換を定式化して, Nahm 変換が代数的 Nahm 変換を誘導することを示しました. また, その結果を用いて $\lambda = 0$ における $(\mathbb{C}/\Gamma^\vee) \times \mathbb{C}$ 上のインスタントンとフィルトレーション付正則ベクトル束の間の Kobayashi-Hitchin 対応を示しました. ただし, 基礎理論の進展 [21] を用いて直接示す方が容易です. また, $\lambda \neq 0$ でも Kobayashi-Hitchin 対応が得られるはずです.

問題 $*$ $\lambda \neq 0$ における $(\mathbb{C}/\Gamma^\vee) \times \mathbb{C}$ 上のインスタントンに関する Kobayashi-Hitchin-対応を示す. 対応する正則なデータは, $(\mathbb{C}/\Gamma)$ 上の λ-平坦直線束のモジュライの自然なコンパクト化上の, フィルトレーション付ベクトル束で, 無限遠では半安定で次数 0 という条件をみたし, さらに, 全体が複安定であるもの. (この対応の正則なデータの無限遠での条件に関して, Hukuhara-Levelt-Turrittin 型の定理を用います.)

次のような問題も標準的だと思います.

問題 $**$ Nahm 変換がモジュライの同型を与えることを示す. $\lambda \neq 0$ における代数的 Nahm 変換を定式化し, Nahm 変換が代数的 Nahm 変換を誘導することを示す.

次の問題も自然に考えられます.

問題 $**$ ALG-space 上のインスタントンと (各ツイスターパラメータごとに) 適切なコンパクト化の上のフィルトレーション付ベクトル束の間の Kobayashi-Hitchin 対応.

2.6 高次元化

例えば, $\mathbb{R}^8$ 上に $\sum dx_i^2$ という計量を考えます. ツイスター空間 $\mathrm{Tw}(\mathbb{R}^8)$ 上の正則ベクトル束 $\mathcal{E}$ でペアリング $S : \mathcal{E} \otimes \sigma^* \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}$ を持ち, エルミート性をみたし, 各 $\mathbb{P}^1 \times \{P\}$ への制限 $(\mathcal{E}, S)_{|\mathbb{P}^1 \times \{P\}}$ が重み 0 の偏極付純ツイスター構造になっているようなものに対応する微分幾何的構造や, その次元簡約を考えます. $\mathrm{rank}\,\Gamma = 2$ として, $(\mathbb{R}^3/\Gamma) \times (\mathbb{R}^3/\Gamma)$ 上に誘導される幾何的な構造を考えると二重周期モノポールの高次元化を考えることになります. 一方, $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ への $q^{\mathbb{Z}} \times q^{\mathbb{Z}}$ の自然な作用より乗法的差分加群の概念が定まります. 次のような問題が自然に考えられます.

問題 $***$ 適切な条件を定式化した上で, これら二つの対象の同値性を示す.

準備として, 次のような点を明確にする必要があります.

問題 $**$ 高次元の場合に, Dirac 型特異点の一般化を定式化する.

問題 $**$ 無限遠における良い条件をはっきりさせる.

高次元の場合には, 例えば, 内部の特異点集合自体が特異点をもつ場合や, 内部の特異点が無限遠にまでのびていくような場合の考察が必要になります. また, $\mathrm{rank}\,\Gamma = 2$ の場合に述べましたが, $\mathrm{rank}\,\Gamma = 1$ の場合には, ワイルド調和束の場合の "turning point" に対応するような困難も生じるのではないかと思います. 調和束の研究では, 適当な双有理変換によって, 特異点集合が正規交叉で "良い" ワイルド調和束を調べることに帰着されますが, モノポールやインスタントンの高次元化などのように底空間の計量に依存するものの場合には, そのような議論の仕方は有効ではないかもしれません.

問題 $***$ さらに一般次元に拡張する.

ただちになにかの応用があるわけではないですし, 意義があるかどうかは別にして, 次のようなことが一つのゴールになるのではないかと思います.

問題 $***$ $(\mathbb{C}^*)^m \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^\ell$ という準同型に関して, 上の微分幾何的な対象や代数幾何的な対象の push-forward を与え, それらが compatible であることを示す.

謝辞　この原稿は, RIMS 共同研究 “一般化ホッジ理論に関連する問題” における講演をもとにしています. 講演の機会をくださった組織委員の方々に感謝いたします. 日本学術振興会より科研費基盤 (S) (No. 17H06127), 科研費基盤 (S) (No. 16H06335), 科研費基盤 (A) (No. 21H04429), 科研費基盤 (C) (No. 20K03609) の補助をいただいたことに感謝します.

References

[1] M. F. Atiyah, N. Hitchin, *The geometry and dynamics of magnetic monopoles*, M. B. Porter Lectures. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988

[2] O. Biquard, P. Boalch, *Wild non-abelian Hodge theory on curves*, Compos. Math. **140** (2004), 179–204.

[3] O. Biquard, M. Jardim, *Asymptotic behaviour and the moduli space of doubly-periodic instantons*. J. Eur. Math. Soc. **3** (2001), 335–375.

[4] B. Charbonneau, J. Hurtubise, *Singular Hermitian-Einstein monopoles on the product of a circle and a Riemann surface*, Int. Math. Res. Not. (2011), 175–216.

[5] B. Charbonneau, J. Hurtubise, *Spatially periodic instantons: Nahm transform and moduli*, Comm. Math. Phys. **365** (2019), 255–293.

[6] S. A. Cherkis, A. Kapustin. *Nahm transform for periodic monopoles and $\mathcal{N} = 2$ super Yang-Mills theory*, Comm. Math. Phys. **218**, (2001), 333–371.

[7] K. Corlette, *Flat G-bundles with canonical metrics*, J. Differential Geom. **28** (1988), 361–382.

[8] S. K. Donaldson, *Twisted harmonic maps and the self-duality equations*, Proc. London Math. Soc. **55** (1987), 127–131.

[9] M. Finkelberg, M. Matviichuk, A. Polishchuk, *Elliptic Zastava*, arXiv:2011.11220

[10] L. Foscolo, Deformation theory of periodic monopoles (with singularities). Comm. Math. Phys. **341** (2016), 351–390.

[11] N. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. London Math. Soc. (3) **55** (1987), 59–126.

[12] M.-A. Inaba, *Moduli of parabolic connections on curves and the Riemann-Hilbert correspondence*, J. Algebraic Geom. **22** (2013), 407–480.

[13] M.-A.Inaba, K. Iwasaki, M.-H. Saito, *Moduli of stable parabolic connections, Riemann-Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. I*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **42** (2006), 987–1089.

[14] A. Jaffe, C. Taubes, *Vortices and monopoles*, Structure of static gauge theories, Progress in Physics, **2**. Birkhäuser, Boston, Mass., 1980

[15] S. Jarvis, *Euclidean monopoles and rational maps*, Proc. London Math. Soc. **77** (1998), 170–192.

[16] S. Jarvis, *Construction of Euclidean monopoles*, Proc. London Math. Soc. (3) **77** (1998), 193–214.

[17] P. B. Kronheimer, *Monopoles and Taub-NUT metrics*, Master's thesis, Oxford, 1986.

[18] T. Mochizuki, *Asymptotic behaviour of tame harmonic bundles and an application to pure twistor D-modules I, II*, Mem. AMS. **185** (2007)

[19] T. Mochizuki, *Wild harmonic bundles and wild pure twistor D-modules*, Astérisque **340**, (2011)

[20] T. Mochizuki, *Asymptotic behaviour and the Nahm transform of doubly periodic instantons with square integrable curvature*, Geom. Topol. **18**, (2014), 2823–2949.

[21] T. Mochizuki, *Kobayashi-Hitchin correspondence for analytically stable bundles*, Trans. Amer. Math. Soc. **373** (2020), 551–596. arXiv:1712.08978.

[22] T. Mochizuki, *Triply Periodic Monopoles and Difference Modules on Elliptic Curves*, arXiv:1903.03264, SIGMA **16** (2020), 048, 23 pages

[23] T. Mochizuki, *Periodic monopoles and difference modules*, arXiv:1712.08981, to appear as Lecture Notes in Mathematics **2300**, Springer-Verlag.

[24] T. Mochizuki, *Doubly periodic monopoles and q-difference modules*, arXiv:1902.03551 (version 1)

[25] J. W. Morgan, T. Mrowka, D. Ruberman, *The L^2-moduli space and a vanishing theorem for Donaldson polynomial invariants.* Monographs in Geometry and Topology, II. International Press, Cambridge, MA, 1994.

[26] M. van der Put, M. Reversat, *Galois theory of q-difference equations.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **16** (2007), 665–718.

[27] J.-P. Ramis, J. Sauloy, C. Zhang, *Local analytic classification of q-difference equations*, Astérisque **355** (2013).

[28] C. Sabbah, *Polarizable twistor D-modules*, Astérisque, **300**, (2005)

[29] C. Sabbah, *Wild twistor D-modules*, in *Algebraic analysis and around*, Adv. Stud. Pure Math., **54**, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2009), 293–353.

[30] C. T. Simpson, *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 867–918.

[31] C. T. Simpson, *Harmonic bundles on noncompact curves*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 713–770.

[32] C. T. Simpson, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. I.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **79** (1994), 47–129.

[33] C. T. Simpson, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **80** (1994), 5–79 (1995).

[34] C. Simpson, *Mixed twistor structures*, math.AG/9705006.

[35] J. Swoboda, *Moduli spaces of Higgs bundles*—*old and new*, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **123** (2021), no. 2, 65–130.

[36] C. Wei and R. Yang, *Cohomology of semisimple local systems and the Decomposition theorem*, arXiv:2109.11578