# 代数多様体の安定性とモジュライの問題

京都大学数学教室　尾高悠志
YUJI ODAKA
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
KYOTO UNIVERSITY

Abstract. 以下代数多様体の安定性, 標準計量の存在問題を中心に概観をしなおし，私見に基づいて問題を提案する．無論実際はもっと果てし無く多くの問題があり，あくまでその中の一部の紹介である．

このような機会をいただいた高山先生に感謝申し上げます．予めもうしておくと以下の内容は満渕先生と細野先生のご講演・論稿と少しばかりの重複があり得ますがご容赦お願いします．

## 1. 標準計量と K 安定性

1.1. **K 安定性とは.** さて，まず何と言っても長い間この分野の目玉であり続けたのは以下の予想である．

**Conjecture 1.1** (**Yau-Tian-Donaldson 予想** ([Don02])). 非特異複素射影多様体 $X$ とその上の偏極（つまり豊富な線束）$L$ について，$X$ の上の**スカラー曲率一定**である *Kähler* 計量であって *Kähler* 類が $c_1(L) \in H^{1,1}(X)$ になるもの *(cscK* 計量*)* の存在，$(X, L)$ の **K-poly 安定**という代数幾何的条件が同値である．

cscK 計量は **C**onstant **S**calar **C**urvature **K**ähler metric の略である．以下，慣習に倣ってこの予想は略して YTD 予想という．対応する Kähler ポテンシャルの偏微分方程式は，**Kähler-Einstein 計量**は 2 階の非線形な複素 Monge-Ampère 方程式に対応した一方，cscK 計量は 4 階のより複雑な非線形性をもつ．定義により，**Kähler-Einstein 計量**は cscK 計量であるが，更に上記の設定ではそれから従う $c_1(L)$ と $c_1(X) = -c_1(K_X)$ が比例するという条件のもと，逆も従う．その比例条件は代数多様体の双有理幾何に根ざした分類論・構造論における三つの基本的なピースである Fano 多様体, (広義)Calabi-Yau 多様体, 標準モデルの特徴づけも与えることに注意されたい．
9 年ほど前の大きな進展は以下の定理であった．

**Theorem 1.2** ([CDS15, Tia15]). 予想 *1.1* は $X$ が *Fano* 多様体で $L = -K_X$ の場合は正しい．

これによって Kähler-Einstein 計量の場合は一般に予想 1.1 が解決したことになるが実際の K 安定性の判定は代数幾何側の問題として残された．上記 Fano の場合の証明は元々Cheeger-Colding 理論に基づいて (反多重標準) 因子に沿って錐型特異点を持った特異計量の Gromov-Hausdorff 極限を用いてテスト配位を構成するという手法であったが，後にこれは様々な別証明が与えられた：

- より従来の連続法に基づいた [DS16]
- Kähler-Ricci 流による [CSW18]
- 変分法に基づいた [BBJ15]

*Date*: September 10, 2021.

がいずれも Fano 性に強く依存し，一般の偏極の場合は困難に見えた．強いていうと最後の変分法の方法だけは一般の偏極でも, [BBJ15, CC17, CC18a, CC18b] に続く最近の C.Li の仕事 [Li20, Li21] により一部拡張され始めているが技術的困難はまだ大きいということと，純ポテンシャル論的な扱いの中での解決を見込んでいるために上記 [CDS15, Tia15] の時の方法に比べ具体的な判定法の理解，またモジュライ理論的側面の理解には応用が効きにくいように感じる．道は長く広い景色が続くであろう．

**問題 1** (***)．予想 *1.1* を解決せよ．

ここで K 安定の定義を復習しよう．

**Definition 1.3.** $(n+1)$ 次元の正規偏極射影多様体 $(\mathcal{X},\mathcal{L})$ およびその固有な正則写像 $\pi\colon \mathcal{X}\to\mathbb{P}^1$ が**テスト配位 (test configuration)** であるとは

- (i) 代数群 $\mathbb{G}_m$ の[1] $(\mathcal{X},\mathcal{L})$ への作用があり，$\mathbb{P}^1$ にも掛け算による自然な作用をすると $\pi$ が $\mathbb{G}_m$ 同変．
- (ii) ある自然数 $a$ を用いて $(\mathcal{X},\mathcal{L})|_{\mathbb{P}^1\setminus\{0\}}\simeq (X,L^{\otimes a})\times(\mathbb{P}^1\setminus\{0\})$ ($a$ は exponent と言われるが，以降は簡単のために $a=1$ として $\mathcal{L}$ は $\mathbb{Q}$ 線束とする．本質的差異は生じない．)
- (iii) $\mathcal{L}$ は $\pi$ 豊富，つまり中心ファイバーに制限しても豊富．

上記は元の Mumford の [Mum65] での 1 パラメータ部分群に対応するものであり，実質的な例はそこに現れていた．これについて対応する GIT 重みを考えてその正値性が古典的な GIT 安定性なのであった (Hilbert-Mumford 判定法)．Donaldson-二木不変量は本質的にそうして生じる GIT 重みの "極限"（重みのなす多項式列の最高次係数）として定義されたが，しばらく後に筆者と Wang 氏によって **交点数**により記述を得て，K 安定性で使われる重みの正値性は以下のように述べられる：

**Definition 1.4** ([Don02, Wan12, O13b])**.** $(X,L)$ が **K 安定 (resp., K 半安定)** とは任意の非自明な (i.e., $\mathcal{X}\neq X\times\mathbb{P}^1$) テスト配位について

$$\frac{(n+1)(c_1(\mathcal{X}/B).\mathcal{L}^n)}{(\mathcal{L}^n)}<(\text{resp., }\le)\frac{n(c_1(X).L^{n-1})}{(L^n)}$$

たることである．ただし今必要なら $\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}_m:=\mathcal{L}\otimes\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)(m\gg 0)$ に置き直して $(\mathcal{L}^{\cdot n+1})>0$ とする．また $c_1(\mathcal{X}/B):=c_1(\mathcal{X})-\pi^*c_1(B)$ である．また，少なくとも右辺はスカラー曲率の平均としての意味があることにも注意されたい．

cscK 計量の存在と同値性が期待されている K-poly 安定性は，K 安定性より弱く K 半安定性より強い概念である．つまり上記等式が成立する必要十分条件を $(\mathcal{X},\mathcal{L})$ が底 $\mathbb{P}^1$ 上の $(X,L)$-ファイバー束 ("積テスト配位") であることとする．上の不等式の両辺の差（の分子）

$$-n(L^{n-1}.K_X)(\mathcal{L}^{n+1})+(n+1)(L^n)(\mathcal{L}^n.K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1}) \tag{1}$$

$$=-n(L^{n-1}.K_X)(\mathcal{L}^{n+1})+(n+1)(L^n)(\mathcal{L}^n.K_X)+(n+1)(L^n)(\mathcal{L}^n.K_{\mathcal{X}/(X\times\mathbb{P}^1)}) \tag{2}$$

が **Donaldson-二木不変量** $\mathrm{DF}(\mathcal{X},\mathcal{L})$ であり，以下はしばしば省略して DF 不変量とも呼ぶ．（満渕汎関数の "非アルキメデス化" のようにも "解釈" できる．）元の二木不変量はその積テスト配位の場合に対応する．上記の式 (2) における 3 項は今は非アルキメデス幾何学的観点から non-archimedean energy, non-archimedean Ricci energy, non-archimedean entropy とも呼ば

[1] $\mathbb{G}_m(\mathbb{C})=\mathbb{C}^*$.

れており，テスト配位の一般化へも拡張されている．これは公式の発見の後に満渕汎関数の Chen-Tian 公式との対応が整理された経緯によるが，詳細は [BHJ17, BHJ16, Li20, 尾高 20] 等参照.

1.2. **モジュライ理論との関係.** 種数 $g(>1)$ の非特異射影曲線のモジュライ $M_g$ の "Deligne-Mumford" コンパクト化の高次元化である Kollár-Shepherd-Barron-Alexeev(略して KSBA) 型の極小モデルプログラムに依存して作られた様々なモジュライ空間が K 安定性によって捉えられ，これや藤木氏, Schumacher 氏, Donaldson 氏らの仕事 (特に [FS90, 藤木 90]) にも影響されて **K 安定理論によるよいモジュライ構成 ("K-moduli")** の期待をもった：

> **K-poly 安定な代数多様体のモジュライ空間がよい代数多様体の構造を持ち，古典的な多くの「標準的な」モジュライ空間やそのコンパクト化たちを統一的に作るのではないか？**

あえて漠然と書いた理由はその定式化の難しさにあり，講演中も論じた．この方向性やファイブレーションに興味を持つ方には，Donaldson-二木不変量を次数として encode するテスト配位の底 $\mathbb{P}^1$ 上の自然な線束 "**CM 線束**"[2]というものがあり，これは一般の偏極射影代数多様体族の底の線束に拡張されることを付記しておく．これは当初藤木-Schumacher [FS90] によって非特異条件付きで導入されたが，[PT06, FR06] によって代数的に簡潔に記述された．ともあれその次数であれば，安直に DF 不変量の交点数公式の真似をするだけで定義される．

**問題 2** (**/***)**.** *Kähler-Einstein でない偏極多様体の場合にも具体例を見ることで，K-moduli の構造を調べ，一般的な K-moduli 予想を厳密に定式化せよ．*

もちろん様々な具体例を調べることがまず第一の問題であると考えている．Fano 多様体の場合は [OSS16] が初めて一般的定式化を行ったが，本質的にはただ étale local に GIT を行って貼り合わせた構造を持っている．その後 Alper の "good moduli space" という言語があてられ，$\mathbb{Q}$-Fano 多様体の K-moduli 予想がその形で解決された．

**広義 Calabi-Yau 多様体の場合.** 広義 Calabi-Yau 多様体の場合については楕円曲線, Abel 多様体, K3 曲面等モジュライ理論が長く深い歴史を持つために多くの研究がある．楕円曲線の小平の意味での $I_N$ 型退化を modular curve $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ の無限遠点の上に「乗せて」考えることができるが，それは (任意の偏極について)K 半安定であるが K-polystable ではない．実際 K-polystable な退化を無限遠点の上にのせることはできず，Fano 多様体の場合と大きく様相を異にする．このように K 半安定な退化を乗せたものを **weak K-moduli** と呼ぶことにする．さらに, weak K-moduli コンパクト化は一意性がないということも大きな特徴である．関連した例としては準古典的なものとしては Abel 多様体に対する [Ale02, Nak10] 等があるが K3 曲面について最近の Alexeev-Engel [AE21] は注目を浴びている．

**問題 3** (**/***)**.** *偏極付き正則シンプレクティック多様体の moduli の weak K-moduli コンパクト化の正規化は必ず Looijenga の semitoric コンパクト化か？*

**問題 4** (*/**)**.** *Alexeev* [Ale02], *Nakamura* [Nak10] *の 2nd Voronoi toroidal コンパクト化* $\overline{A_g}^{\mathrm{Vor}}$ *の境界がパラメトライズする退化は実は漸近 Chow（半）安定か？まず２次元ではどうか？（中村郁氏の別の退化多様体 PSQAS は Hilbert 安定であると示されているが，漸近的なものではないことの注意せよ．この問いに関連して Alexeev 氏と私の部分的な観察がある（未出版））*

---

[2] "CM" の語源は Chow-Mumford 安定性由来であり，超曲面の場合を主に扱っていた 80 年代-90 年代の経緯のある [PT06] からきた言葉のようである．しかし，今となってわかることではあるが，超曲面以外では古典的な Chow(-Mumford) 安定性と K 安定性は大きくずれるため，誤解を招く可能性があろう．

これらについてもまた多くの問題があるが，例えば [Od21] を見られたい．一意性のない weak K-moduli という射影的なモジュライ及びその中の一意性のある open subspace である K-moduli の存在を論じている．後者は微分幾何的には Weil-Petersson 計量の完備化と一致し，非崩壊 (compact) 極限だけを加えたものでもある．更にコンパクト化について微分幾何的観点から一意性を求めた方向性 (の最近の大きな進展) が [OO21] であるともいえ，それについても [OO21] 主予想をはじめとして多くの問題があるが，以下ではその主要なものに限定する．

**問題 5** (**/***)．*Ricci* 平坦計量の崩壊極限を分類し[3]，それによるモジュライの *Gromov-Hausdorff* コンパクト化を決定せよ．

別の特殊な場合として以下の問題はある程度手頃かもしれない．

**問題 6** (*/**)．（非特異と限らない）曲線上の射影ベクトル束やその退化のクラスにおける *K-moduli* 理論を論ぜよ．

関連した節 3.2.1 及びその中の引用文献は参考になるであろう．以前 Fano 多様体の K-moduli に取り組んでいた時（ポスドク時），一度ホストの Donaldson 先生に聞かれた問として以下もあった．

**問題 7** (*/**)．非特異射影曲線 $C$ 上の *rank* $r$ の多重 *(poly)* 安定射影ベクトル束 *(*行列式線束 $L$ を固定*)* のモジュライ $U(r,L)$ は *locally factorial* な特異点のみを持った *Picard* 数 1 の $\mathbb{Q}$*-Fano* 多様体になり *(*[DZ89, Theorem F]*)*，さらにその変形空間は $C$ のそれと一致する *(*[NR75]*)*．これにより $C$ の *moduli* $M_g$ は $\mathbb{Q}$*-Fano* 多様体のモジュライと解釈できるが，それら及びその *compact* 化を *K-moduli* の観点から調べよ．

(反標準偏極付きの)Fano 多様体の場合には 2010 年代に大きな発展があったのでそちらの一部を少し復習しよう．

## 2. Fano 多様体の場合

定理 1.2 により Fano 多様体の Kähler-Einstein 計量の存在問題は K 安定性の判定に帰着されたが，K 安定性の判定は一般には困難であるという意味で，実際具体的な Fano 多様体に適応できるような効果的な判定法は $\alpha$ 不変量（または global log canonical threshold）による強い十分条件及び松島の判定法（自己同型群の簡約性）以外にはそれほどしかなかった．最近になって藤田氏, C.Li 氏による $\beta$ 不変量の判定条件（[Fjt16, Li21]），藤田-O による $\delta$ 不変量による判定条件 ([FO18], [BJ17]) が確立し状況が飛躍的に改善された．このあたりを概観する．これについて他に書かれたサーベイとしては [Xu20] がある．一つ重要な注意であるが，Fano 多様体であっても偏極を $-K_X$ でないようにとると K 安定の判定理論は一般にはない．最近の発展はあくまで “anticanonically polarized” Fano 多様体についてのものである．

以下がその場合に基礎的な判定理論となる．

**Theorem 2.1** ([Fjt16, Li21])**.** $X$ を $\mathbb{Q}$*-Fano* 多様体（つまり *log-terminal* 特異点まで許した *Fano* 多様体の特異版）とすると $(X,-K_X)$ が **K 半安定であるための必要十分条件は**，任意

[3] K3 の場合は最近 Sun-Zhang[SZ21] がこれを行なった．[OO21] 予想の解決も近い？

の因子的な付値 $v = v_E$(*E* は *X* の爆発の中の因子である) に対して，以下が成立することである：

$$\beta(v_E) := A_X(v_E) - \frac{\int_{x=0}^{\infty} \mathrm{vol}(-K_X - xE)}{(-K_X^n)} \geq 0.$$

ここで $\mathrm{vol}(-K_X - xE)$ は厳密に述べると，$E$ を実現する爆発 $\pi\colon Y \to X$ の上で自然に定めた体積 $\mathrm{vol}(Y, -\pi^* K_Y - xE)$ であり，$Y$ の取り方には依存しない．実際は，擬有効閾値によって記述される値以上の $x$ については 0 となる．

上記定理 2.1 の証明の根にあるアイデアは，付値 $v_E$ に対して，次数付き環

$$R(v) := \oplus_{m,a \geq 0} H^0(Y, -m\pi^* K_X - aE)t^a$$

を考えるというものであり，仮にこれが有限生成であるとするとこの射影スペクトラム

$$\mathrm{Proj}_{\mathbb{A}^1_t}(R(v))$$

がテスト配位を与えるが，一般にはテスト配位の列で近似することを考えて，その Ding 不変量の極限を $\beta(v_E)$ と同定するというからくりである．

デルタ不変量の理論においては，以下のような特殊な形の反標準 $\mathbb{Q}$ 因子を導入する：

**Definition 2.2** ([FO18]). $X$ を Fano 多様体, $m$ を自然数として $H^0(-mK_X)$ の基底 $s_1, \cdots, s_{N_m}$ をとった時にそれに対応する因子たち $D_1, \cdots, D_{N_m}$ を用いて作った

$$D := \frac{\sum_{i=1}^{N_m} D_i}{mN_m} (\equiv -K_X)$$

を ($-K_X$ のクラスの)$m$-基底型因子（basis-type divisor）ということにする．いわば十分に "平均化" されたような反標準因子である．この時,

$$\delta_m(X) := \sup\{c \geq 0 \mid \text{任意の } m - \text{基底型因子 } D \text{ に対して } (X, cD) : \mathrm{klt}\},$$

$$\delta(X) := \lim_{m\to\infty} \sup \delta_m(X),$$

とする．これが $\delta$ **不変量**の定義である．すると

**Theorem 2.3** ([FO18, BJ17]). $(X, -K_X)$ が $K$ 半安定であることと $\delta(X) \geq 1$ は同値である．

後に K 安定性と $\delta(X) > 1$ の同値性も多くの技術的改良の論文を合わせると証明されたことになる．80 年代に導入されたアルファ不変量による Kähler-Einstein 計量存在の十分条件 (cf., [Tia87, OS12]) が必要条件からは程遠い強い条件であった点を改良した結果とも見られる．

技術的に微妙な問題であるが，定理 2.3 において $m$ について極限をとることは必要である．

**問題 8** (*, **). (i) *(I)* 様々な *Fano* 多様体の具体例について $\beta$ 不変量を用いて $K$ 安定性を確認せよ．*($\delta(X)$ と 1 を比較することと同等)*

(ii) *(**)* 様々な *Fano* 多様体の具体例について $\delta$ 不変量を決定せよ．

(iii) *($**^+$)* 様々な *Fano* 多様体の具体例について *K-moduli* を決定せよ．

これは純粋に Fano 多様体の代数幾何学の問題である．ごく最近の仕事として，非特異 3-fold の場合に（少なくとも変形同値類の中の一般ファイバーについて）Iskovskih, Mori-Mukai の有名な分類[4]に基づいて [ACFKGSSV21] が上記問題 8(i) を解決した．[AZ20] により $\delta(X)$ の

[4]Fano 3-fold に関しては Fano graphy (`https://www.fanography.info`) というウェブサイトが分類表や付随情報を示している．

計算方法も飛躍的に進展した効果の影響もある．とりわけ大きな関心が払われているのは以下の場合[5]である：

**問題 9** (**/***)**.** 向井梅村多様体 $V_{22}$ の場合に具体的な *K-moduli* を記述せよ．難しければ部分的にでも記述せよ．

向井先生が幾らかの方向の退化を記述されているようである．

更に少し分野を跨いで以下の問題意識を抱くのは，[CCGK16] の論文が出た頃 (2012, 2013) に Imperial college で同僚であった私たちの間では自然であり，多少の模索の会話やセミナーはあったが，残念ながら結局 10 年ほど全く発展がない．

**問題 10** (***)**.** *Fano* 多様体 $X$ についてはミラー対称性に近い文脈で *Landau-Ginzburg model* というファイブレーション $X^{\mathrm{LG}} \to B$ が対応されている．$(X, -K_X)$ の $K$ 安定性は *LG model* に反映されるか？

## 3. 一般の偏極多様体の場合へ

3.1. **一般論.** [CDS15, Tia15] は Cheeger-Colding 理論を用いて Gromov-Hausdorff 極限の構造を明らかにしながら YTD 予想を解くものだったのでモジュライ理論にも有効であったが，YTD 予想を解くということを目標に据える場合は pluri-potential theoretic なアプローチも有効である．特に [BBJ15] は定理 CDST.thm をその方向で再証明し，[CC17, CC18a, CC18b] は cscK 計量の存在を満渕汎関数の固有性と同値と示したのでこの方向の発展はより期待されるものとなった．

とりわけ顕著であるのは [BBJ15] における以下の対応である：

[BBJ15] **の意味で maximal な弱測地線**
$\longleftrightarrow \mathcal{E}^1(L)$ **の非アルキメデス版** $\mathcal{E}^{1,\mathrm{NA}}(L)$

の (同値関係を法とした)1:1 対応も生まれた．後者の意味の詳細は [BFJ16, ?] を見られたいが，代数幾何的には Shokurov の b 因子の枠組みで論じることもできる．上記対応は Monge-Ampere エネルギーの漸近 slope と非アルキメデス版 Monge-Ampere エネルギーを一致させるものである．

Fano 多様体の場合の [BBJ15] による Yau-Tian-Donaldson 対応の別証明では，Monge-Ampere 体積に加えてもう一つの "対数項" が加わった **Ding 汎関数**という満渕 K-energy の亜種が使われ，上記対応との整合性が鍵となった．その無限での slope が前掲の Ding 不変量である．

そしてごく最近，Li[Li20] は上記プログラムに則ってさらなる発展をもたらした．論文前半では満渕汎関数の漸近挙動の slope が有限であるような場合は [BBJ15] の意味で maximal であることを示すことによって，maximal な弱測地線の解析に cscK の存在判定を帰着し，これらによって一般の YTD 予想は次の non-archimedean entropy の regularization 予想に帰着された．

**問題 11** (Boucksom-Jonsson 予想 [Li20, 1.5] **/***)**.** テスト配位の一般化である $\mathcal{E}^{1,\mathrm{NA}}(L)$ の元 $\phi$ であって対応する *non-archimedean entropy* が有限の時，それを近似するテスト配位 $\{\phi_m\}_m$ の列で *non-archimedean entropy* も連続なものがとれるか？

さて一方で K-moduli の固有性 (compact 性) を考えるとき，pluri-potential 論よりも以下のようなより代数幾何的定式化で行うのが良いように思う．固有性の付値的判定法を確立する問題がもともとの動機付けである．

[5] 歴史的経緯は [Tia97] で言及されている．

**Conjecture 3.1** (CM 線束次数最小化予想, ***)**.** $(\mathcal{X},\mathcal{L})\to C$ を非特異射影曲線 $C\ni 0$ 上の偏極多様体族[6]とする．また，この底変換として有限射 $r\colon C'\to C$ によるファイバー積

$$(\mathcal{X}_{C'},\mathcal{L}_{C'})=(\mathcal{X},\mathcal{L})\times_C C'$$

を考え，$r^{-1}(0)$ 上のファイバーのみ変化させうる双有理変換

$$b\colon(\mathcal{X}'_{C'},\mathcal{L}'_{C'})\dashrightarrow(\mathcal{X}_{C'},\mathcal{L}_{C'})$$

を考えてそれらの底曲線の上の *CM* 線束 $\lambda_{\mathrm{CM}}$ *(*[FS90, PT06, FR06]*)* を考える．この時,

$$\deg\lambda_{\mathrm{CM}}((\mathcal{X},\mathcal{L}))\le\frac{\deg\lambda_{\mathrm{CM}}((\mathcal{X}_{C'},\mathcal{L}_{C'}))}{\deg(r)}$$

が任意の $r,(\mathcal{X}'_{C'},\mathcal{L}'_{C'})$ の組について成立することと $(\mathcal{X}_0,\mathcal{L}_0:=\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_0})$ が $K$ 半安定であることは同値であろう．更に，それが $K$ 安定であれば等号成立条件は $b$ が余次元 2 以上の閉部分を除いて同型であることである．

上記予想は筆者が口頭で色々述べてきたが論文にはしていない．[7]"Kähler-Einstein" 型の場合，つまり一般ファイバーが Kähler-Einstein 計量を持つ場合のみ証明は完了している（Fano 以外の場合は [O13c], Fano の場合は本質的には [BX19]）．一般偏極の場合の部分成果としては Ross-Thomas [RT06, RT07] の slope 安定性を扱った大野氏の修士論文 [大野 21] が唯一の部分結果であると思う．

3.2. **具体性を伴って．** 仮に一般偏極で YTD 予想が解けたとしても，K 安定性を具体的な代数多様体について判定するというのは改めてまた独立な難問である．そこでは $\beta,\delta$ 不変量はそのまま安直な判定法は与えない．

3.2.1. 射影ベクトル束の場合.

**問題 12** (** or ***)**.** 一般の偏極射影多様体 $(X,L)$ 及び $X$ 上の正則ベクトル束 $E$ に対して $\mathbb{P}(E)$ の様々な偏極に対しての $K$ 安定性や相対 $K$ 安定性を調べよ．

この方向で顕著なのは [ACGT11, AK19] があり，$X$ が非特異曲線の場合の理解は完全に近づいており，結論的には $E$ の (相対) 多重安定性とおよそ同値であるということになっている．代数的アプローチとしては [RT06] の部分成果もある．

他の森ファイバー空間やもっと一般の代数的ファイバー空間についての研究へと発展が期待されるが，難易度は格段に上がるであろう．執筆時修士課程の学生である服部真史氏（京大）がこの方向で研究成果を出しつつある．

3.2.2. 双有理変換の影響.

**問題 13** (**)**.** $(X,L)$ と $(X',L')$ が *birational* であるとき，あるいはより具体的に $X'$ が $X$ の兵部分スキーム $Z$ の爆発であり，$L'=L-eE$ とかける時，$(X,L)$ と $(X',L')$ の $K$ 安定性を比較せよ．

この方向の部分成果としては筆者は Stoppa の [Stp10] しかしらない．

---

[6]正確にはそうであって全空間が Serre 条件 $S_2$ を満たすものとする．底変換及び双有理変換後も同様.

[7]正確には，R.Thomas 氏と示せたと思ったが撤回したままであると経緯がある．

3.2.3. 球多様体の場合. Donaldson が K 安定性を調べた ([Don02] etc) トーリック多様体の拡張である球多様体の場合は，T.Delcroix によって判定法の進展があり，(筆者の appendix により）YTD 予想も解かれている．

**問題 14** (*/**/***)**.** *T.Delcroix 理論に基づいて球多様体の $K$ 安定性の判定法を（より具体的・簡明な形で）確立せよ.*

なお，Delcroix 本人曰く一般の球多様体を相手にすることは今尚大変難しいだろうということである．

## 4. 非アルキメデス幾何・Arakelov 幾何との関係

**4.1.** S-W.Zhang らが 90 年代にもたらしたと思われる知見を我々の前述の設定でのべると

> $(X, L)$ の (半) テスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ の引き戻しによる同値類は，$\mathrm{Spec}\mathbb{C}[[t]]$ に制限すると $L \times_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t))$ の非アルキメデス (Berkovich) 解析化 $L^{\mathrm{an}}$ 上の計量をあたえる

ということになる．実際に $(X, L)$ の爆発型半テスト配位を考えるとして，その例外因子 $E$ ごとに $X$ の非アルキメデス (Berkovich) 解析化 $X^{\mathrm{an}}$ の上に因子的付値の点 $v_E \in X^{\mathrm{an}}$ が定まる．$L \times_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t))$ の有理切断 $s$ があると，$s$ を $\mathcal{L}$ の有理切断と思った時の位数 $\mathrm{ord}_E(s)$ を用いて $|s|_{v_E} := c^{-\frac{\mathrm{ord}_E(s)}{\mathrm{ord}_E(t)}}$ と適切な定数 $c$ を持って定められる．この $\frac{\mathrm{ord}_E(s)}{\mathrm{ord}_E(t)}$ は $v_E$ における Kähler ポテンシャルの類似を与える．ただこうして生じる非アルキメデス計量は特殊なものであり，その極限としてしか生じないものも，そのようにもかけない $L^{\mathrm{an}}$ 上の非アルキメデス計量も存在する．

この対応を元に，手探りで満渕汎関数の Chen-Tian 公式 (定理**??**) と DF 不変量の公式 (定義 1.4 の後の (1)) の各項を見比べて，それらが類似物であるだろうという認識が専門家の間で広まってきた．

**4.2.** そこで整数係数モデルと計量ごとに，

$$\int_{\mathbb{Q}\text{ の素点たち}} \text{満渕汎関数 or DF 不変量}$$

のようなものを考えよう．"Arakelov 的な" 発想である．

Arakelov 幾何にまつわる歴史を辿る．1970 年代の Arakelov の有名な数論的な交点理論の導入の仕事後，80 年代に入って，G. Faltings の初期の有名な仕事 [Fal83] で彼はアラケロフ幾何の基礎的な仕事も並行して行いながら代数体上のアーベル多様体の Shafarevich 予想，Tate 予想，さらに Mordell 予想を解いたがそこでの鍵となる不変量の一つが数論的な偏極アーベル多様体の Faltings 高さであった．これが上記の望んでいた積分の特殊例となる．

以下ではこの Faltings 高さの**一般の数論的代数多様体への拡張を K 安定のアイデアの応**用として論じるわけである．ただこれはまだ定義ならびに基礎付け段階であり，具体的に値についての予想などもほぼ存在せず，同時に K 安定性の理論への応用も込めて，今後の発展を期待したい．

**Definition 4.1** (**K-モジュラー高さ** [O18])**.** $(\mathcal{X}, \mathcal{L}, h)$ を *Spec*$(\mathbb{Z})$ (またはその有限拡大 *Spec*$(\mathcal{O}_K)$, ここで $K$ は有限次代数体) 上の算術的な正規な射影スキーム[8]とする．この時に対応する **K-**

[8]本当はもう少し技術的な条件を要する．詳細は原論文参照．

モジュラー高さ (ないし一般化された **Faltings** 高さ)$h_K(\mathcal{X},\mathcal{L},h)$ を

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\bigl(-n(L^{n-1}.K_X)((\bar{\mathcal{L}}^h)^{n+1})+(n+1)(L^n)((\bar{\mathcal{L}}^h)^n.\overline{K_{\mathcal{X}/B}}^{Ric(\omega_h)})\bigr)$$

として定義する．ここで $(X,L)$ は $(\mathcal{X},\mathcal{L})$ の生成ファイバーのことである.

**問題 15.** *(**)* 具体的な $(X,L)$ について上記の $h_K$ を最小化するモデル $(\mathcal{X},\mathcal{L},h)$ を決定してそれを計算せよ.

**Conjecture 4.2** (数論的 **Yau-Tian-Donaldson** 予想 [O18, 3.2 節])**.** 代数体 $K$ 上滑らかな偏極射影多様体 $(X,L)$ の自己同型群が有限（例えば $K_X$ が *effective*）である時，以下は同値である.

- *(微分幾何的条件)* $X(\mathbb{C})$ が一定スカラー曲率ケーラー計量で *Kähler* 類を $2\pi c_1(L(\mathbb{C}))$ とするものが存在する.
- *(数論幾何的条件)* 必要であれば $K$ を有限次拡大させた上でその整数環上のモデル $(\mathcal{X},\mathcal{L})$ が存在し，$\mathcal{O}_K$ の各素イデアル $\mathfrak{p}$ に対してそこでの還元 $(\mathcal{X}_\mathfrak{p},\mathcal{L}_\mathfrak{p})$ が $K$ 半安定であり，有限個以外の $\mathfrak{p}$ に対して $(\mathcal{X}_\mathfrak{p},\mathcal{L}_\mathfrak{p})$ が $K$ 安定である.

更に上の 2 つは以下を導くであろう.（只簡単のためにこの方向の定式化のみ述べる.）

- *(融合・アラケロフ的条件)* $(\mathcal{X},\mathcal{L})$ として $(X,L)$ の全てのモデルを，$h$ を曲率正の $L(\mathbb{C})$ の計量を走らせたとき，高さ $h_K(\mathcal{X},\mathcal{L},h)$ はいつか最小化される.

**問題 16** (***)**.** 上記予想を一般に解決せよ.

**問題 17** (**)**.** 上記予想を *2* 次元 *(*$\mathbb{Q}$*-)Fano* 多様体 *(の model)* の場合に解決せよ.

**最後に.** まだわからないことだらけであり，多くの分野との魅力的な関連性を持つこの分野，数十年は上記の問題が全て解かれることはないのではないか．意欲ある若い方や他分野の研究者の参入を期待したい．関連分野で何か一つ自分の得意な “武器” があると活躍の突破口があるという分野でもあると思う.

## References


[AZ20] H. Ahmadinezhad, Z. Zhuang, K-stability of Fano varities via admissible flags, arXiv:2003.13788.

[Ale02] V.Alexeev, Complete moduli in the presence of semiabelian group action, Annals of Math. 155 (2002), 611-708.

[AE21] V.Alexeev, P.Engel, Compact moduli of K3 surfaces, arXiv:2101.12186

[ACGT08] V.Apostolov, D.Calderbank, P.Gauduchon, C.W.Tnnesen-Friedman, Hamiltonian 2-forms in Kähler geometry. III. Extremal metrics and stability, Invent. Math. 173 (2008), no. 3, 547-601.

[ACGT11] V.Apostolov, D.Calderbank, P.Gauduchon, C.W.Tnnesen-Friedman, Extremal Kähler metrics on projective bundles over a curve, Adv. Math. 227 (2011), no. 6, 2385-2424.

[AK19] V.Apostolov, J.Keller, Relative K-polystability of projective bundles over a curve, Trans. Amer. Math. Soc. 372 (2019), no. 1, 233-266.

[Ber16] R.Berman, K-polystability of $\mathbb{Q}$-Fano varieties admitting Kahler-Einstein metrics. Invent. Math. 203 (2016).

[BDL16] R. J. Berman, T. Darvas, and C. H. Lu, Regularity of weak minimizers of the K-energy and applications to properness and K-stability, arXiv:1602.03114 (2016).

[BBEGZ11] R.Berman, S.Boucksom, P.Eyssideux, V.Guedj, A.Zeriahi, Kähler-Einstein metrics and the Kähler-Ricci flow on log Fano varieties, J. Reine Angew. Math.

[BBJ15] R. Berman, S. Boucksom, M. Jonsson, A variational approach to the Yau-Tian-Donaldson conjecture, arXiv:1509.04561.

[BX19] H.Blum, C.Xu, Uniqueness of K-polystable degenerations of Fano varieties, Ann. of Math. 190 (2019), 609-656.

[BLX19] H.Blum, Y.Liu, C.Xu, Openness of K-semistability for Fano varieties, arXiv:1907.02408.

[BJ17] H.Blum, M.Jonsson, Thresholds, valuations, and K-stability, arXiv:1706.04548.

[BFJ16] S. Boucksom, C. Favre, M. Jonsson, Singular semipositive metrics in non-Archimedean geometry, J. Algebraic Geom. 25, 77-139 (2016).

[BHJ17] S. Boucksom, T. Hisamoto, M. Jonsson Uniform K-stability, Duistermaat-Heckman Measures and Singularities of Pairs, Ann. Inst. Fourier 67, 743-841 (2017)

[BHJ16] S. Boucksom, T. Hisamoto, M. Jonsson Uniform K-stability and asymptotics of energy functionals in Kähler geometry, arXiv:1603.01026

[Ber16] R.Berman, K-polystability of $\mathbb{Q}$-Fano varieties admitting Kahler-Einstein metrics. Invent. Math. 203 (2016).

[BJ17] H.Blum, M.Jonsson, Thresholds, valuations, and K-stability, arXiv:1706.04548.

[ACFKGSSV21] C.Araujo, A-M.Castravet, K.Fujita, A-S.Kaloghiros, J.M-Garcia, C.Shramov, H.Süss, N.Viswanathan, The Calabi problem for Fano threefolds, `https://www.maths.ed.ac.uk/cheltsov/pdf/Fanos.pdf`

[CC17] X. Chen, J-R. Cheng, On the constant scalar curvature Kähler metrics (I) -a priori estimates, arXiv:1712.06697.

[CC18a] X. Chen, J-R. Cheng, On the constant scalar curvature Kähler metrics (II) -Existence results, arXiv:1801.00656.

[CC18b] X. Chen, J-R. Cheng, On the constant scalar curvature Kähler metrics (III) -General automorphism groups, arXiv:1801.05907.

[CDS15] X.X. Chen, S. K. Donaldson and S. Sun: Kahler-Einstein metrics on Fano manifolds I,II,III, J. Amer. Math. Soc. (2015).

[CSW18] X.X. Chen, S.Sun, B.Wang, Kähler-Ricci flow, Kähler-Einstein metric, and K-stability, Geom. Topol. 22 (2018), no. 6, 3145-3173.

[DS16] V. Datar, G.Szekelyhidi, Kähler-Einstein metrics along the smooth continuity method, Geom. Funct. Anal. 26 (2016) no. 4, 975–1010

[Don02] S. Donaldson, Scalar curvature and stability of toric varieties, J. Differential Geom. 62 (2002), no. 2, 289–349.

[DonSun14] S. Donaldson, S. Sun, Gromov-Hausdorff limits of Kähler manifolds and algebraic geometry, Acta Math. 213 (2014), no. 1, 63–106.

[DonSun17] S. Donaldson, S. Sun, Gromov-Hausdorff limits of Kähler manifolds and algebraic geometry II, J. Differential Geom.Volume 107, Number 2 (2017), 327-371.

[DZ89] J.M.Drezet, M.S.Narasimhan, Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques, Invent. Math. 97 (1989), no. 1, 53-94.

[Fal83] G. Faltings, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, Invent. Math. (1983).

[FR06] J.Fine, J.Ross, A note on the positivity of CM line bundle, Int. Math. Res. Notices (2006).

[Fjt16] K.Fujita, A valuative criterion for uniform K-stability of $\mathbb{Q}$-Fano varieties, J. Reine Angew. Math. (2016).

[FO18] K. Fujita, Y. Odaka, On the K-stability of Fano varieties and anticanonical divisors, Tohoku Math. J. (2) Volume 70, Number 4 (2018), 511-521.

[藤木 90] 藤木 明, 偏極代数多様体の moduli 空間と Kähler 計量, 雑誌 数学 / 42 巻 (1990) 3 号.

[FS90] A. Fujiki, G. Schumacher, The moduli space of extremal compact Kähler manifolds and generalized Weil-Petersson metrics, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 26 (1990), no. 1, 101–183.

[Jia17] C.Jiang, Boundedness of $\mathbb{Q}$-Fano varieties with degrees and alpha-invariants bounded from below, to appear in Annales scientifiques de l'ENS. arXiv:1705.02740

[KoMo98] J. Kollár, 森重文，双有理幾何学　岩波書店　現代数学の展開シリーズ (1998).

[CCGK16] T Coates, A Corti, S Galkin, A Kasprzyk, Quantum periods for 3-dimensional Fano manifolds, Geometry and Topology 20 (1), 103-256, 2016.

[LWX19] C. Li, X. Wang, C. Xu, On the proper moduli spaces of smoothable Kahler-Einstein Fano varieties, Duke Math (2019).

[LWX18] C. Li, X. Wang, C. Xu, Quasi-projectivity of the moduli space of smooth Kahler-Einstein Fano manifolds, Annales Scientifiques de l'ENS (4)51 (2018), no.3, 739-772.
[Li20] C. Li, Geodesic rays and stabilities in the cscK problem, arXiv:2001.01366(v1).
[Li21] C.Li, K-stability and Fujita approximation, arXiv:2102.09457.
[Mum65] D. Mumford, Geometric Invariant Theorey, Springer-Verlag (1965).
[Mat57] Y. Matsushima, Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählérienne. Nagoya Math. J. 11 (1957), 145-150.
[Nak10] I.Nakamura, Another canonical compactification of the moduli space of abelian varieties, Algebraic and Arithmetic Structures of Moduli Spaces (Sapporo, 2007), Advanced Studies of Pure Mathematics 58, (2010) 69-135.
[NR75] M.S.Narasimhan, S.Ramanan, Deformations of the moduli space of vector bundles over an algebraic curve, Ann. of Math. (2) 101 (1975), 391-417.
[O13a] Y. Odaka, A generalization of the Ross-Thomas slope theory, Osaka J. Math. 50 (2013), no. 1, 171–185.
[O13b] Y. Odaka, The GIT stability of polarized varieties via Discrepancy, Ann. of Math. (2) 177 (2013), no. 2, 645–661.
[O12] Y. Odaka, The Calabi conjecture and K-stability, Int. Math. Res. Not. IMRN (2012), no. 10, 2272–2288.
[OS12] Y. Odaka, Y. Sano, Alpha invariants and K-stability of $\mathbb{Q}$-Fano varieties, Advances in Math vol.229, 2818-2834(2012).
[O10] Y. Odaka, On the GIT stability of polarized varieties - a survey -, 城崎代数幾何シンポジウム報告集 (2010).
[O13c] Y. Odaka, On the moduli of Kähler-Einstein Fano manifolds, arXiv:1211.4833v4. 城崎代数幾何シンポジウム報告集 (2013)
[O15a] Y. Odaka, Invariants of varieties and singularities inspired by Kähler-Einstein problems, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. Volume 91, Number 4 (2015), 50-55.
[O15b] Y. Odaka, Compact moduli spaces of Kähler-Einstein Fano varieties, Publ. Res. Int. Math. Sci. 51 (2015), no. 3, 549–565.
[O18] Y. Odaka, Canonical Kähler metrics and arithmetics - Generalizing Faltings heights -, Kyoto J. Math. 58 (2018), no.2, 243-288.
[OSS16] Y. Odaka, C. Spotti, S. Sun, Compact moduli spaces of del Pezzo surfaces and Kähler-Einstein metrics, J. Differential Geom. 102 (2016), no. 1, 127–172.
[OSS18] Y. Odaka, C. Spotti, S. Sun, Appendix (errata correction) to [SS17], Pure and Applied Mathematics Quarterly (in honour of 60th birthday of S.Donaldson), Vol. 13, No. 3, 2017, p. 477-515.
[Od19.$A_g$] Y. Odaka, Tropical Geometric Compactification II - $A_g$ case, holomorphic limits -, Int. Math. Res. Notices. 2019, no. 21, 6614-6660.
[Od19.$M_g$] Y. Odaka Tropical Geometric Compactification I - $M_g$ case, Proceeding of Moduli of K-stable varieties, (Springer INdAM Series) Springer-Verlag.
[OO18] Y. Odaka, Oshima, Collapsing K3 surfaces and Moduli compactifications, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. Volume 94, Number 8 (2018), 81-86.
[OO21] Y. Odaka, Y. Oshima, Collapsing K3 surfaces, Tropical geometry and Moduli compactifications of Satake, Morgan-Shalen type, MSJ Memoir vol. 40 (2021)
[OS12] Y.Odaka, Y.Sano, Alpha invariants and K-stability of $\mathbb{Q}$-Fano varieties, Adv. Math. 229(5) (2012), 2818-2834
[尾高 20] 尾高悠志, K 安定性と代数多様体のモジュライ問題について- Kähler-Einstein 計量との関わり - 雑誌数学　日本数学会 (2020)
[Od21] Y.Odaka, On log minimality of weak K-moduli compactifications of Calabi-Yau varieties, arXiv:2108.03832
[大野 21] K. Ohno, Minimizing CM degree and slope stability of projective varieties, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. (2021).
[PT06] S.Paul, G.Tian, CM stability and the generalized Futaki invariants, arXiv:0605278.
[RT06] J. Ross, R. Thomas, An obstruction to the existence of constant scalara curvature Kähler metrics, J. Diff. Geom. 72 (2006).

[RT07] J. Ross, R. Thomas, A study of Hilbert-Mumford criterion of stability of projective varieties, J. Alg. Geom. (2007).

[Stp10] J.Stoppa, Unstable blow ups, Journal of Algebraic Geometry 19, 1-17 (2010)

[SS17] C.Spotti, Sun, Explicit Gromov-Hausdorff compactifications of moduli spaces of Kähler-Einstein Fano manifolds, Pure and Applied Mathematics Quarterly (in honour of 60th birthday of S.Donaldson), Vol. 13, No. 3, 2017, p. 477-515.

[SSY16] C.Spotti, Sun, S., Yao, C.: Existence and deformations of Kähler-Einstein metrics on smoothable $\mathbb{Q}$-Fano varieties. Duke Math. (2016).

[SZ21] S.Sun, R.Zhang, Collapsing geometry of hyperkaehler 4-manifolds and applications, arXiv:2108.12991

[Sze14] G. Szekelyhidi, Introduction to extremal Kähler metrics, Graduate Studies in Mathematics 152 (2014).

[Tia87] G. Tian, On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $c_1(M) > 0$, Invent. Math. vol. 89, (1987) 225-246.

[Tia97] G. Tian, Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature, Invent. Math. (1997).

[Tia00] G. Tian, Canonical metrics in Kähler geometry, Notes taken by Meike Akveld. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, (2000).

[Tia15] G. Tian, K-stability and Kähler-Einstein metrics, Comm. Pure Appl. Math. (2015).

[Wan12] X.Wang, Height and GIT weight. Math. Res. Lett. 19, 909-926 (2012)

[Xu20] C. Xu, K-stability of Fano varieties: an algebro-geometric approach, arXiv:2011.10477

Contact: `yodaka@math.kyoto-u.ac.jp`